CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) mercoledì 5 settembre 2007

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*	PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- S è un insieme tale che $|S| = 175$. Esiste un'equivalenza $\sim$ in S tale che $|S/{\sim}| = 92$.
  vero ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\big((p \Rightarrow q) \iff (q \Rightarrow p)\big) \iff \big(p \iff q\big)$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esistono insiemi non vuoti A, B, C tali che $(A\cap B)\cup(A\cap C) = B\smallsetminus C$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Ogni anello booleano è finito. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- n è un intero positivo fissato. $[n^2+n+1]_n$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione $*\colon (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto a + a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$ è commutativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione $*\colon (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto a + a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$ è associativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Il *nucleo di equivalenza* di (o equivalenza associata ad) un'applicazione $f\colon A \to B$ è, per definizione, la relazione binaria $\sim_f$ in . . . definita ponendo $(\forall\, x, y \in \ . . .)(x \sim_f y \iff \ . . . .)$ ed è ☐ *sempre*, oppure, ☐ *non sempre* una relazione di equivalenza. È possibile che $\sim_f$ sia la relazione di uguaglianza? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, precisamente, lo è se e solo se f è un'applicazione* . . . .

---

3 Si forniscano due esempi di anelli commutativi unitari che non siano domini di integrità:
uno finito: . . . . e uno infinito: . . . .

---

4 Nel gruppo $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ sia g un elemento di ordine 14. Allora $g^{28014200}$ è:
☐ g^{-1}, ☐ g, ☐ g^{10}, ☐ g^{-10}, ☐ 1, ☐ g^2, ☐ *nessuno dei precedenti.*

---

5 Si considerino le relazioni binarie α, β, γ definite su $\mathbb{Z}$ ponendo, per ogni a, $b \in \mathbb{Z}$,

$$a\ \alpha\ b \iff (a < b \wedge a|b); \qquad a\ \beta\ b \iff (a \le b \vee a|b); \qquad a\ \gamma\ b \iff (a \le b \Rightarrow a|b).$$

α è transitiva? *sì* ☐ *no* ☐; β è riflessiva? *sì* ☐ *no* ☐; γ è antisimmetrica? *sì* ☐ *no* ☐. Tra α, β e γ quali sono: . . . . e quali non sono: . . . . relazioni d'ordine?

Se possibile, si scelga una relazione d'ordine ρ tra α, β e γ (dunque $\rho =$ . .) e si risponda poi alle domande che seguono. ρ è un ordinamento ☐ *stretto* o ☐ *largo*? È totale? *sì* ☐ *no* ☐. $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Ha minimo? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è:* . . . . . Ha massimo? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è:* . . . . . Sempre con riferimento a $(\mathbb{Z}, \rho)$,
$\inf\{120, 300, 800\} =$ . . . . , oppure: ☐ $\inf\{120, 300, 800\}$ *non esiste.*
$\inf\{120, -300, 800\} =$ . . . . , oppure: ☐ $\inf\{120, -300, 800\}$ *non esiste.*

Sia S l'insieme dei divisori (in $\mathbb{Z}$) di 10. Allora $|S| =$ . . . . . Si disegni a destra il diagramma di Hasse di S, ordinato dalla relazione indotta su esso da ρ. Questo insieme ordinato è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, è booleano? *sì* ☐ *no* ☐.
S ha una parte di cardinalità 5 che, ordinata dalla relazione indotta su essa da ρ, sia un reticolo? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, una tale parte è* { . . , . . , . . , . . , . . } e ☐ *essa è l'unica*, oppure: ☐ *ne esistono anche altre.*
S ha una parte di cardinalità 4 che, ordinata dalla relazione indotta su essa da ρ, sia un reticolo booleano? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, una tale parte è* { . . , . . , . . , . . } e ☐ *essa è l'unica*, oppure: ☐ *ne esistono anche altre.*

---

6 Quante sono le stringhe (di lunghezza 15) costituite da 5 occorrenze del carattere a e 10 occorrenze del carattere b? . . . . E quante quelle costituite da 10 occorrenze di a e 5 di b? . . . .

7 Si calcoli $348478194780! \bmod 982489! = \dots\dots\dots$; $\quad 348478194780 \bmod 9 = \dots\dots\dots$;

$$\binom{348478194780}{3} \bmod 3 = \dots\dots\dots\dots$$

---

8 Siano $A = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (|X| > 45) \wedge (X \smallsetminus \{456, 1923\} = \varnothing)\}$ e $B = \{a^2 + a + 1 \mid (a \in \mathbb{R}) \wedge (a^2 \leq -9)\}$.
Quali delle seguenti sono vere?
☐ $A = B$; ☐ $A \neq B$; ☐ *nessuna delle due precedenti*; ☐ *entrambe*.
☐ $A \subseteq B$; ☐ $B \subseteq A$; ☐ $A \subset B$; ☐ $B \subset A$; ☐ $A \cup B = A$; ☐ $B \cap B = A$; ☐ $\mathrm{Map}(A, B) = \varnothing$.

---

9 Sia $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano $U_n = \{\{X, Y\} \in \mathcal{P}(A) \mid |X \cup Y| + |X \cap Y| = n\}$ e $M_n = \{\{X, Y\} \in \mathcal{P}(A) \mid |X \cup Y| + |X \cap Y| \leq n\}$. (A, U_2) è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐; (A, U_5) è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐; (A, M_5) è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐; (A, M_8) è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐. Se almeno uno dei precedenti è un grafo (indicare quale: $(A, \dots)$, chiamiamolo G) lo si disegni a lato e si risponda alle domande che seguono: G è un albero? *sì* ☐ *no* ☐, una foresta? *sì* ☐ *no* ☐, è planare? *sì* ☐ *no* ☐. Quante sono le sue componenti connesse? ... G ha cammini euleriani *sì* ☐ *no* ☐, ha circuiti euleriani *sì* ☐ *no* ☐
Cancellando alcuni lati ma nessun vertice da G è possibile ottenere:
- un albero? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, e il minimo numero possibile di lati da cancellare a questo scopo è* ...
- una foresta? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, e il minimo numero possibile di lati da cancellare a questo scopo è* ...
- un grafo con cammini euleriani? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, e il minimo numero possibile di lati da cancellare a questo scopo è* ...
- un grafo con circuiti euleriani? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, e il minimo numero possibile di lati da cancellare a questo scopo è* ...

---

10 Si calcoli il numero degli elementi invertibili nell'anello $\mathbb{Z}_{192}$ (risposta: ....).
Posto $n = (35^{7816})^{64}(1920^{80000} + 1) + 17^{83693582} + 97^{83693582}$, si calcoli $n \bmod 192 = \dots\dots$
Per ognuna delle seguenti equazioni congruenziali si trovi l'insieme (risp. S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere:

$97x \equiv_{192} 1$. $\quad S_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\qquad 17x \equiv_{192} 3$. $\quad S_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$34x \equiv_{192} 3$. $\quad S_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\qquad 17x \equiv_{1920} 6$. $\quad S_4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

11 Si considerino in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^8 - x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2$ e $g = x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x + 2$.
Si calcoli il massimo comun divisore monico d tra f e g: $\quad d = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Utilizzando l'informazione che f non ha (in $\mathbb{Q}[x]$) divisori di grado 2, si stabilisca: f/d è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? *sì* ☐ *no* ☐; f/d è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$? *sì* ☐ *no* ☐
Si decomponga f come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$$f = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

A meno dell'ordine dei fattori, tale decomposizione è unica? *sì* ☐ *no* ☐.
