CdL e CdD in Informatica — a.a. 2002/2003
Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Prof. Rao) lunedì 7 luglio 2003

NOME E COGNOME	MATRICOLA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- Sia K un campo. $\forall\, a, b \in K\ \big(ab = 0 \Rightarrow 0 \in \{a, b\}\big)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Sia g un elemento di periodo 14 in un gruppo moltiplicativo G. L'unità di G è g^{28}. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Sia F una foresta con 84 vertici. F ha almeno 56 lati. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Sia p un numero primo maggiore di 7. Si ha che p divide 10!. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Sia $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus 11\mathbb{Z}$. Vale $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Sia a un elemento idempotente di un monoide. Si ha $a^{34} \neq a$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}\ \big([n]_{67} = [m]_{67} \iff n = m\big)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Esistono insiemi A, B, C tali che $A \subset B$ e $C \smallsetminus A = C \smallsetminus B$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $\binom{1000}{750}^2 = \binom{1000}{750}\binom{1000}{250}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $\left\{ {1000 \atop 750} \right\}^2 = \left\{ {1000 \atop 750} \right\}\left\{ {1000 \atop 250} \right\}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $\big((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Una permutazione π è prodotto di 5 trasposizioni, 3 cicli di lunghezza tre e 6 cicli di lunghezza quattro. π è di classe pari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $[6768]_{18972}$ è cancellabile in $\mathbb{Z}_{18972}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- L'operazione binaria $\star$ in $\mathbb{Z}$ definita da: '$\forall a, b \in \mathbb{Z},\quad a \star b = 2a - b$' è associativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐

---

2 Calcolare il resto di $n := 1190^3(7^{30} + 17^{30}) + 18^{611612} + 7^2 17^3$ modulo 119. $n \bmod 119 = \ldots\ldots$ Calcolare $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{119})| = \ldots\ldots\ldots\ldots$ Qual è il periodo di $u := [18]_{119}$ nel gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{119})$? .... E qual è l'inverso di u? $u^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ È vero che $u^{-1} = [n]_{119}$? ☐ *sì*, ☐ *no*, ☐ *non lo si può decidere.*

Determinare l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{Z}$ di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali. *[Trascrivere il procedimento effettuato sul retro di questo foglio.]*

$1720x \equiv 100 \pmod{2380}$ *insieme delle soluzioni:* ....

$420x \equiv 2100 \pmod{2380}$ *insieme delle soluzioni:* ....

$140x \equiv 701 \pmod{2380}$ *insieme delle soluzioni:* ....

---

3 Siano $a = (2,5)$, $b = (3,1)$, $c = (3,2)$, $d = (0,1)$, $e = (1,0)$, $f = (5,3)$, $g = (1,2)$, $h = (4,5)$, e sia $T = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sia ρ la relazione binaria definita in T da: $\forall (u,v), (x,y) \in T$,

$$(u,v)\ \rho\ (x,y) \iff \big((u \leq x \wedge v \leq y) \vee vy = 0\big).$$

Si completi la tabella:

	munito della relazione indotta da ρ, l'insieme											
	T		$T \smallsetminus \{e\}$		$T \smallsetminus \{f\}$		$T \smallsetminus \{a,f\}$		$T \smallsetminus \{a,e,f\}$		$T \smallsetminus \{e,f\}$	
	sì	no	sì	no	sì	no	sì	no	sì	no	sì	no
è un insieme ordinato												
è un reticolo												
è un reticolo distributivo												
è un reticolo complementato												
è un reticolo booleano												
ha minimo												
ha elementi massimali												

---

4 Sia $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n \leq 15\}$. Si consideri in $\mathcal{P}(S)$ la relazione binaria σ definita da

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(S) \qquad X \,\sigma\, Y \iff |X| = |Y|.$$

σ è una relazione di equivalenza? *sì* □ *no* □ *i dati non sono sufficienti per stabilirlo* □

Nel caso in cui lo sia, si calcoli $\left|\mathcal{P}(S)/\sigma\right| =$ . . . . e si risponda alle seguenti domande:

Posto $A = \{1, 3, 8, 11\}$, si dica quanti elementi ha la classe di equivalenza di A modulo σ: $\left|[A]_\sigma\right| =$ . . . .

Esistono in $\mathcal{P}(S)/\sigma$ classi di equivalenza di cardinalità 3? *sì* □ *no* □ Nel caso, quante sono? . . . . .

Esistono in $\mathcal{P}(S)/\sigma$ classi di equivalenza di cardinalità 1? *sì* □ *no* □ Nel caso, quante sono? . . . .

---

5 Si considerino le applicazioni $f : x \in \mathbb{N} \mapsto 3x - 8 \in \mathbb{Z}$ e $g : x \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}$.

Scrivere le applicazioni composte:

$fg : a \in \mathbb{N} \longmapsto$ $\qquad\qquad\qquad$ $\in$ . . . . .

$gf : b \in \mathbb{Z} \longmapsto$ $\qquad\qquad\qquad$ $\in$ . . . . .

Calcolare $fg(3) =$ . . . . e $gf(1) =$ . . . . .

	f			g			fg			gf		
	sì	no	impossibile stabilirlo	sì	no	impossibile stabilirlo	sì	no	impossibile stabilirlo	sì	no	impossibile stabilirlo
è iniettiva												
se no, perché:												
è suriettiva												
se no, perché:												
è biettiva												

---

6 [*Riportare i calcoli relativi a questo esercizio e le motivazioni alle risposte sul retro di questo foglio*]

Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 15$ e $g = x^3 + 2x^2 + x + 2$, con l'algoritmo euclideo si trovino il massimo comun divisore *monico* d di f e g e dei polinomi u, $v \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = uf + vg$. Si trovino poi l'insieme C delle radici razionali comuni a f e g e si calcolino i quozienti $g_1 = g/d$ e $f_1 = f/d$.

[Risposte: $d =$ . . . .

$u =$ . . . . $\qquad$ $v =$ . . . .

$C = \{c \in \mathbb{Q} \mid f(c) = 0 = g(c)\} =$ . . . .

$g_1 =$ . . . . $\qquad$ $f_1 =$ . . . .]

Infine si decompongano i polinomi d, g ed f nel prodotto di polinomi *monici irriducibili* in $\mathbb{Q}[x]$:

$d =$ . . . . $\qquad$ $g =$ . . . .

$f =$ . . . .

Siano f_5 e g_5 rispettivamente f e g riguardati come polinomi in $\mathbb{Z}_5[x]$, e sia d_5 il loro massimo comun divisore monico in $\mathbb{Z}_5[x]$. Si decompongano (nell'ordine) f_5, g_5 e d_5 nel prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$:

$f_5 =$ . . . . $\qquad$ $g_5 =$ . . . .

$d_5 =$ . . . .

Quali sono le radici comuni a f_5 e g_5 in $\mathbb{Z}_5$? $C_5 = \{c \in \mathbb{Z}_5 \mid f_5(c) = 0 = g_5(c)\} =$ . . . .
