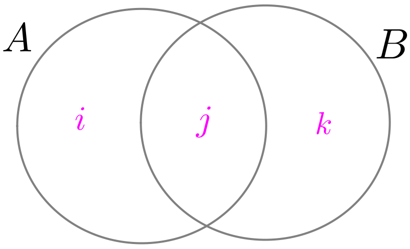
A e B sono insiemi finiti

1. Quanto vale $|A \times B|$? risposta: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

(per ogni $x \in A$ esistono in $A \times B$ esattamente $|B|$ elementi che abbiano x come prima coordinata.

2. Quanto vale $|A \cup B|$?



$i = |A \setminus B|$; $\quad j = |A \cap B|$; $\quad k = |B \setminus A|$

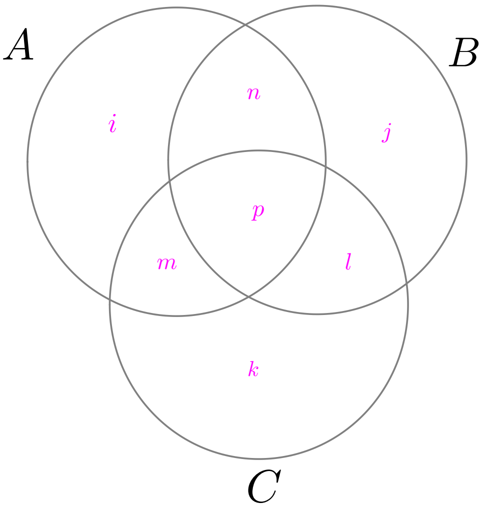
$$|A| = i + j$$
$$|B| = j + k$$
$$|A \cup B| = i + j + k = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

$|A| = 17$ $\quad |B| = 12$

$|A \cap B| = 3 \Rightarrow |A \cup B| = 26$

Per tre insiemi:



$i = |A \setminus (B \cup C)|$; $\quad j = |B \setminus (A \cup C)|$; $\quad k = |C \setminus (A \cup B)|$;
$l = |(B \cap C) \setminus A)|$; $\quad m = |(A \cap C) \setminus B)|$; $\quad n = |(A \cap B) \setminus C)|$
$p = |A \cap B \cap C|$;

$|A| = i + m + n + p$;
$|B| = j + l + n + p$;
$|C| = k + l + m + p$

$$|A \cup B \cup C| = i + j + k + l + m + n + p = |A| + |B| + |C| \cdots ?$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

principio di inclusione-esclusione

Sia $\mathcal{S}$ un insieme finito di insiemi finiti. Posto $n = |\mathcal{S}|$, si ha:

$$|\bigcup \mathcal{S}| = \sum_{i=1}^{n} \Big((-1)^{i+1} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{P}_i(\mathcal{S})} |\bigcap \mathcal{T}| \Big)$$

$$\mathcal{P}_i(S) = \{ X \subseteq S \mid |X| = i \}$$

3. Quanto vale $|\operatorname{Map}(A,B)|$?

Poniamo: $n = |A|$ e $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$a_1 \mapsto ?$ ← abbiamo $|B|$ scelte per l'immagine di a_1

$a_2 \mapsto ?$ ← " " " " " " a_2

$a_3 \mapsto ?$ ← " " " " a_3

$\vdots$

$a_n \mapsto ?$ ← " " " " " "

$$|\operatorname{Map}(A,B)| = \underbrace{|B|\cdot|B|\cdot|B|\cdot\ldots|B|}_{n \text{ fattori}} = |B|^{|A|}$$

Notazione: $B^A = \operatorname{Map}(A,B)$

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

N.B. $\operatorname{Map}(\emptyset,\emptyset) = \{id_\emptyset\}$

$0^0 = 1$

Sia dato un alfabeto C di k caratteri. Sia $n \in \mathbb{N}$. Quante parole (stringhe) di lunghezza n sull'alfabeto C esistono?

k^n corrispondono alle applicazioni $\{1,2,\ldots,n\} \to C$ ← cioè le n-ple in C

se f è una tale applicazione, ad essa corrisponde la stringa "$f(1)\,f(2)\cdots f(n)$"

Quante costanti?

Il numero delle applicazioni costanti $A \to B$ è $|B|$, se $A \neq \emptyset$, 1 se $A = \emptyset$.

Osservazione: $\forall A, B$
$\operatorname{Map}(A,B) = \emptyset \iff A \neq \emptyset = B$

3.1. $\ldots$ e $|\mathrm{InjMap}(A, B)|$?

$a_1 \mapsto ?$ ← abbiamo $|B|$ scelte per l'immagine di a_1

$a_2 \mapsto ?$ ← " $|B|-1$ " " a_2

$a_3 \mapsto ?$ ← " $|B|-2$ " " a_3

$\vdots$

$a_n \mapsto ?$

Due casi: 1) se $|A| \leq |B|$, procediamo in questo modo, sino ad avere $|B|-(n-1)$ possibili scelte per l'immagine di a_n. Allora $|\mathrm{InjMap}(A, B)| = |B|(|B|-1)(|B|-2)\cdots(|B|-|A|+1)$

2) se $|A| > |B|$, arrivati a $a_{|B|+1}$, scopriamo di aver utilizzato tutti gli elementi di B come possibili immagini di $a_{|B|+1}$, quindi non possiamo procedere ulteriormente. Allora $|\mathrm{InjMap}(A,B)| = 0$

NB: se A e B hanno lo stesso numero (finito) di elementi, ogni applicazione iniettiva $A \to B$ è biettiva.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{i=1}^{n} i$$

(fattoriale di n). $\quad 0! = 1$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n^{\underline{m}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$$

(fattoriale discendente).

$$m \leq n \Longrightarrow n^{\underline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Se A e B sono due insiemi finiti, si ha

$$|\mathrm{InjMap}(A,B)| = |B|^{\underline{|A|}} \begin{cases} = 0, & \text{se } |A| > |B| \\ \neq 0, & \text{se } |A| \leq |B| \end{cases}$$

In conclusione:

Teorema. Siano A e B insiemi finiti; assumiamo $a = |A|$ e $b = |B|$. Allora:

(1) esistono applicazioni iniettive $A \to B$ se e solo se $a \leq b$.
 In questo caso, il loro numero è $b!/(b-a)! = b^{\underline{a}}$.

(2) esistono applicazioni suriettive $A \to B$ se e solo se $a \geq b > 0$ oppure $a = b = 0$.

(3) esistono applicazioni biettive $A \to B$ se e solo se $a = b$.
 In questo caso, il loro numero è $a!$.

$0! = 1! = 1$

esempi:
$Sym(\emptyset) = \{id_\emptyset\}$
$\forall x \quad Sym(\{x\}) = id_{\{x\}}$
se $|A| = 2$
$|Sym(A)| = 2 = 2!$

In particolare, per ogni insieme finito A, $\quad |\mathrm{Sym}(A)| = |A|!$.

DIM (1) già vista. (2): Sia f un'applicazione suriettiva da A a B. Allora f ha una sezione $g : B \to A$; ma le sezioni sono iniettive, quindi, per (1), $b = |B| \leq |A| = a$. Inoltre, se $b = 0$, necessariamente $a = 0$, altrimenti $Map(A, B) = \emptyset$. Abbiamo provato:

esistono applicazioni suriettive $A \to B$ $\Longrightarrow$ $a \geq b > 0$ $\vee$ $a = b = 0$

Viceversa, se vale la condizione a destra (↑), allora:
$b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ esiste un'unica applicazione $A \to B$,
(cioè $B = \emptyset$) $\quad (A = \emptyset)$ cioè $id_\emptyset$, che è suriettiva.

$b \neq 0 \Rightarrow$ esiste un'applicazione iniettiva $f : B \to A$ (per (1)) e, essendo $B \neq \emptyset$, f ha una retrazione $g : B \to A$ che come tutte le retrazioni, è suriettiva.

A questo punto (2) è provato.

(3): Se esistono appl. biettive $A \to B$, allora $a \leq b$ per (1) e $a \geq b$ per (2), quindi $a = b$.
Viceversa, se $a = b$, allora esistono, per (1), applicazioni iniettive $A \to B$ e queste sono tutte biettive, per quanto alla pagina precedente.

Ovviamente $a^{\underline{a}} = \frac{a!}{(a-a)!} = \frac{a!}{1} = a!$ $\quad \square$

Teorema. Siano A e B insiemi finiti equipotenti. Allora, per ogni applicazione $f\colon A \to B$ sono equivalenti:

(1) f è iniettiva;
(2) f è suriettiva;
(3) f è biettiva.

DIM: Sappiamo, dai calcoli su $|\mathrm{InjMap}(A,B)|$, che vale (1) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) è ovvio.

(2) $\Rightarrow$ (1): Supponiamo f suriettiva. Allora f ha una sezione $g\colon B \to A$, come sappiamo g è iniettiva. Avendo dimostrato che (1) implica (3), g è anche biettiva. Ma allora f è una retrazione dell'applicazione biettiva g. Ma l'unica retrazione di una applicazione biettiva è la sua inversa, quindi $f = g^{-1}$. Allora f è biettiva. $\square$

(in alternativa: abbiamo $f \circ g = id_B$; componendo con g^{-1} ricaviamo $f = (f \circ g) \circ g^{-1} = id_B \circ g^{-1} = g^{-1}$)

Il risultato è falso se gli insiemi sono infiniti o non hanno lo stesso numero di elementi

$f\colon n \in \mathbb{N} \longmapsto n+1 \in \mathbb{N}$ è iniett., non suriettiva

$g\colon n \in \mathbb{N} \longmapsto \begin{cases} n-1, & \text{se } n > 0 \\ 8, & \text{se } n = 0 \end{cases} \in \mathbb{N}$ è suriettiva, non iniettiva (come qualsiasi retrazione di f)