grafico della relazione $\leq$ in {1,2,3}

	1	2	3
1	•	•	•
2		•	•
3			•

grafico della relazione $<$ in {1,2,3}

	1	2	3
1		•	•
2			•
3			

Osservazione: $\forall a \ \forall \sigma \in OS(a)$ σ è antisimmetrica.

DIM: $\forall x,y \in a$ $(x \sigma y \wedge y \sigma x) \Rightarrow x \sigma x$ ← FALSO: σ è antiriflessiva

↑ σ è transitiva

Dunque: $\forall x,y \in a$ $x\sigma y \wedge y \sigma x$ è falso e quindi

$$(x \sigma y \wedge y \sigma x) \Rightarrow x = y$$

$\square$

$$\forall a \ \forall \rho \in \mathrm{OL}(a) \ \forall \sigma \in \mathrm{OS}(a)$$

definiamo $\rho_{\neq}, \sigma_{=} \in \mathrm{Rel}(a)$ ponendo: $\forall\, x, y \in a$

$$x \ \rho_{\neq} \ y \iff (x \ \rho \ y \ \wedge \ x \neq y)$$

$$x \ \sigma_{=} \ y \iff (x \ \sigma \ y \ \vee \ x = y)$$

Allora $\rho_{\neq} \in \mathrm{OS}(a)$ e $\sigma_{=} \in \mathrm{OL}(a)$.

$\forall \sigma \in OS(a)$.

$\sigma_=$ è riflessiva: ovvio, $\forall x \in a$ $x \sigma_= x$

$\sigma_=$ è antisimm: $\forall x,y \in a$ $(x \sigma_= y \wedge y \sigma_= x \wedge x \neq y)$

$\Downarrow$

assurdo perchè σ è antisimmetrica $\Rightarrow$ $(x \sigma y \wedge y \sigma x \wedge x \neq y)$

$\sigma_=$ è transitiva: $\forall x, y, z \in a$

$(x \sigma_= y \wedge y \sigma_= z) \Rightarrow ((x \sigma y \vee x = y) \wedge (y \sigma z \vee y = z))$

nel caso $x = y \wedge y = z$ da questa segue $x \sigma_= z$;

nell'altro caso: $x \neq y \neq z$ da questa segue $x \sigma y \wedge y \sigma z$ quindi $x \sigma z$ perchè σ è transitiva. Quindi, in ogni caso $x \sigma_= z$.

Le applicazioni

$$\rho \in \mathrm{OL}(a) \longmapsto \rho_{\neq} \in \mathrm{OS}(a) \quad \text{e}$$

$$\sigma \in \mathrm{OS}(a) \longmapsto \sigma_{=} \in \mathrm{OL}(a)$$

sono biettive, una inversa dell'altra.

Schema dimostrazione:

Per ogni $\rho \in \mathrm{OL}(a)$, $\sigma \in \mathrm{OS}(a)$:
se $\rho^{\#}$ è il grafico di ρ, quello di $\rho_{\neq}$ è $\rho^{\#} \setminus \Delta_a$,
se $\sigma^{\#}$ è il grafico di σ, quello di $\sigma_{=}$ è $\sigma^{\#} \cup \Delta_a$.

Allora: il grafico di $(\rho_{\neq})_{=}$ è $(\rho^{\#} \setminus \Delta_a) \cup \Delta_a = \rho^{\#} \cup \Delta_a = \rho^{\#}$, quindi $(\rho_{\neq})_{=} = \rho$; similmente, il grafico di $(\sigma_{=})_{\neq}$ è $(\sigma^{\#} \cup \Delta_a) \setminus \Delta_a = \sigma^{\#} \setminus \Delta_a = \sigma^{\#}$, quindi $(\sigma_{=})_{\neq} = \sigma$.

.

Sia $(S,\cdot)$un semigruppo commutativo. La relazione di divisibilità in $(S,\cdot)$, indicata da $\mid$ o da $\mid_{(S,\cdot)}$, è definita dalla formula:

$$\forall a,b,\in S\ (a \mid b \iff \exists\, c \in S(b=ac))$$

$(S,\cdot)$ è un semigruppo $\Rightarrow$ $\mid_{(S,\cdot)}$ è transitiva.

dim: $\forall x,y,z \in S$
$(x|y \wedge y|z) \Rightarrow \exists c,d \in S \left(\begin{matrix} y = xc \\ \wedge \\ z = yd\end{matrix}\right)$; $z=(xc)d = x(cd)$
$\Downarrow$
$x|z$

In $(\mathbb{Z},\cdot)$:

$3 \mid 6$? sì $3 \mid 7$? no $-1 \mid 7$? sì $3 \mid 0$? sì

$7=(-1)(-7)$ $3\cdot 0 = 0$

In $(2\mathbb{Z},\cdot)$:

$2 \mid 6$? no (*) $2 \mid 8$? sì

$0|0$? sì

(*) $\neg(\exists c \in 2\mathbb{Z}\ (2c=6))$

In $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}),\cup)$:

$\{2\} \mid \{6\}$? no $\{2\} \mid \mathbb{N}$? $\mathbb{N}=\{2\}\cup\mathbb{N}$

$(S,\cdot)$ è un monoide $\Rightarrow$ $\mid_{(S,\cdot)}$ è riflessiva.

dim: se t è il neutro di $(S,\cdot)$
$\forall a \in S$ $a = at$, quindi $a|a$. $\square$

In $(\mathbb{Z},\cdot)$
$1|-1$ e $-1|1$
ma $1 \neq -1$, quindi $|_{(\mathbb{Z},\cdot)}$ non è antisimmetrica

$$\forall a,b \in S\ \big(a \sim b \iff ((a \mid b) \wedge (b \mid a))\big)$$

(se $a \sim b$ si dice che a e b sono associati in S)

(si scrive anche $\sim_{(S,\cdot)}$)

Se $(S,\cdot)$ è un monoide, $|_{(S,\cdot)}$ è d'ordine se e solo se è antisimmetrica, cioè se e solo se:
$\forall a,b \in S\ ((a|b \wedge b|a) \Rightarrow a=b)$
l'antecedente vuol dire: $a \sim_{(S,\cdot)} b$

N.B.
(l'implicazione $a=b \Rightarrow a \sim b$ è ovvia perché $|$ è rifl.)

Se $(S,\cdot)$ è un monoide, la relazione di divisibilità in $(S,\cdot)$ è d'ordine se e solo se la relazione "essere elementi associati" è l'uguaglianza, cioè se e solo se $\forall\, a,b \in S\,(a \sim b \iff a=b)$.

questo accade in $(\mathbb{N},\cdot)$ quindi la relazione di divisibilità in $(\mathbb{N},\cdot)$ è d'ordine.

Insieme ordinato: coppia ordinata (S, ρ) dove $\rho \in OL(S)$.

Tre esempi standard:

divisibilità in $(\mathbb{N}, \cdot)$

$(\mathbb{R}, \leq)$ $\quad (\mathcal{P}(S), \subseteq)$ $\quad (\mathbb{N}, |)$

Siano a e b elementi di un insieme S in cui è definita una relazione $\rho \in OL(S)$.
Diciamo che a e b sono CONFRONTABILI in (S, ρ) (oppure: rispetto a ρ) se e solo se
$a \rho b \vee b \rho a$ [negazione: $a \not\rho b \wedge b \not\rho a$]

La relazione ρ è TOTALMENTE ORDINATO se e solo se $\forall a, b \in S$ a e b sono confrontabili risp. ρ;
in questo caso diciamo che (S, ρ) è totalmente ordinato. [negazione: $\exists a, b \in S$ $(a \not\rho b \wedge b \not\rho a)$]

Esempio: $(\mathbb{R}, \leq)$ è tot. ordinato

$(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è tot. ord. se e solo se $|S| \leq 1$
(se S ha almeno due elementi distinti x e y, $\{x\}$ e $\{y\}$ non sono confrontabili tra loro)

$(\mathbb{N}, |)$ non è tot. ordinato: $2 \nmid 3 \wedge 3 \nmid 2$

Se $S = (\{0, 1\}, \cdot)$, $(S, |_{(S, \cdot)})$ è tot. ordinato.

Sia (S,ρ) un insieme ordinato (quindi $\rho \in OL(S)$)

$\forall\, T \subseteq S$

si può definire la relazione binaria ρ_T indotta da ρ su T, via: $\forall a,b \in T \; (a \,\rho_T\, b \Leftrightarrow a \,\rho\, b)$

È ovvio che anche ρ_T è d'ordine: $\rho_T \in OL(T)$

Allora (T,ρ_T) è un insieme ordinato; si dice che è un sottoinsieme ordinato di (S,ρ).

In genere si scrive ρ anche al posto ρ_T, quindi facciamo riferimento al <u>sottoinsieme ordinato</u> (T,ρ) per indicare (T,ρ_T).

ad esempio, $(\mathbb{Q},\leq)$, $(\mathbb{R}^+,\leq)$, $(\mathbb{Z},\leq)$, $(\mathbb{N},\leq)$ sono sottoinsiemi ordinati di $(\mathbb{R},\leq)$; se $T \subseteq S$, $(\mathcal{P}(T),\subseteq)$ lo è di $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$.

Se (S,ρ) e (T,σ) sono ins. ordinati ($\sigma \in OL(T)$) un'applicazione $f: S \to T$ è CRESCENTE da (S,ρ) a (T,σ) (o rispetto a ρ e σ) se e solo se

$\forall a,b \in S \quad a \,\rho\, b \Rightarrow f(a) \,\sigma\, f(b)$

si dice che f è un ISOMORFISMO da (S,ρ) a (T,σ) se e solo se è biettiva, crescente da (S,ρ) a (T,σ) e, inoltre, f^{-1} è crescente da (T,σ) a (S,ρ).

Questo equivale: f è biettiva e

$\forall a,b \in S \quad a \,\rho\, b \Leftrightarrow f(a) \,\sigma\, f(b)$

Esempio: l'applicazione identica $id_{\mathbb{N}^*}: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ è biettiva e crescente da $(\mathbb{N}^*, |)$ a $(\mathbb{N}^*, \leq)$

$(\forall a, b \in \mathbb{N}^* \quad a | b \Rightarrow a \leq b)$

ma non è crescente da $(\mathbb{N}^*, \leq)$ a $(\mathbb{N}^*, |)$

$(2 \leq 3$ ma $2 \nmid 3)$