esercizio 6:

$f: a \to b$ biettiva

$\vec{f}: \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(b)$

isomorfismo da $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$ a $(\mathcal{P}(b), \subseteq)$

esercizio 3

$\forall a, b \in \mathbb{N}$

$a \mid b \iff \exists c \in \mathbb{N}\ b = a + c \iff a \leq b$

$(\mathbb{N}, +)$

Siano fissati un insieme S e $\rho \in \mathrm{OL}(S)$.

Sia $\bar{\rho}$ la relazione duale a ρ

$\forall a \in S$

a è minimo in $(S, \rho) \iff \forall x \in S(a\ \rho\ x)$

a è minimale in $(S, \rho) \iff \neg(\exists x \in S(x\ \rho_{\neq}\ a)) \iff \forall x \in S(x\ \rho\ a \Rightarrow x = a)$

a è massimo in $(S, \rho) \iff a$ è minimo in $(S, \bar{\rho}) \iff \forall x \in S(x\ \rho\ a)$

a è massimale in $(S, \rho) \iff a$ è minimale in $(S, \bar{\rho})$
$\iff \neg(\exists x \in S(a\ \rho_{\neq}\ x)) \iff \forall x \in S(a\ \rho\ x \Rightarrow x = a)$

si dice anche "rispetto a ρ" invece che "in (S, ρ)"

NB: da non confondere con la nozione di (punto di) mininimo/massimo di una funzione tra numeri reali.

Se a è minimo in (S, ρ), allora a è l'unico elemento minimale in (S, ρ) (e quindi anche l'unico minimo).

Dimostrazione: Sia a minimo in (S, ρ). Allora,
(1) a è minimale in (S, ρ) : $\forall x \in S$ $a\rho x$ perché a è minimo
quindi, se $x \rho a$, allora $x = a$ per antisimmetria

(2) Se b è un elemento minimale in (S, ρ), allora certamente $b = a$.
Abbiamo: $a \rho b$ perché a è minimo.
$a \rho b \Rightarrow a = b$, perché b è minimale; dunque $a = b$. $\square$

Per dualità:
se a è massimo in (S, ρ), allora a è l'unico elemento massimale in (S, ρ).

Notazione: $\min(S, \rho)$ e $\max(S, \rho)$ indicano l'unico minimo e l'unico massimo di $(S\ \rho)$ (che, ovviamente, possono anche non esistere)

NB: Se (S, ρ) è totalmente ordinato, per ogni $a \in S$, in (S, ρ)
a è minimale se e solo se è minimo, massimale se e solo se è massimo.

Esempi

$(\mathbb{N}, \leq)$ ha minimo: 0; non ha massimali: $\forall n \in \mathbb{N}(\exists x \in \mathbb{N}(n < x))$

$(\mathbb{Z}, \leq)$ non ha minimali né massimali

$\forall n \in \mathbb{Z} \ (\exists x \in \mathbb{Z} \ (x < n) \leftarrow n$ non è minimale

$\wedge \ \exists x \in \mathbb{Z} \ (x > n)) \leftarrow n$ non è massimale

$(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ minimo: $\emptyset$; massimo: S

(quindi: $\emptyset$ è l'unico minimale; S l'unico massimale)

$(\mathbb{N}, |_{(\mathbb{N},\cdot)})$ minimo: 1 $\quad (\forall n \in \mathbb{N} \ (1 | n \wedge n | 0))$

massimo: 0 $\quad$ "$n \cdot 1$" $\quad$ "$n \cdot 0$"

$(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |_{(\mathbb{N},\cdot)})$ minimali: i numeri primi (infiniti!)

quindi non c'è minimo

massimo: 0

(per ogni S:) In $(S, =)$ ogni elemento è minimale e massimale

$(\forall a, b \in S \ (a$ 'uguale stretto' $b))$

cioè: $\rho_{\neq}$ se ρ è la relazione di uguaglianza

Altro esempio

$\rho \in \mathrm{OL}(\mathbb{Z})$, definita da: $\quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (a \ \rho \ b \iff a \leq b \wedge (a = 0 \iff b = 0))$.

In $(\mathbb{Z}, \rho)$, 0 è l'unico elemento minimale, l'unico elemento massimale, non è minimo, non è massimo, $(\mathbb{Z}, \rho)$ non ha minimo né massimo.

(Solo notizia; non in programma): Se (S, ρ) è un insieme ordinato FINITO, ed a è il suo unico elemento minimale, allora $a = \min(S, \rho)$.

Teorema. Sia (S, ρ) un insieme ordinato finito non vuoto. Allora (S, ρ) ha elementi minimali ed elementi massimali.

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che (S, ρ) non abbia elementi minimali.

Poiché $S \neq \emptyset$ $\exists\, x_0 \in S$. Fissiamo x_0.
x_0 non è minimale. Allora esiste (e fissiamo) $x_1 \in S$ tale che $x_1 \rho_{\neq} x_0$. x_1 non è minimale, esiste e fissiamo $x_2 \in S$ tale che $x_2 \rho_{\neq} x_1$. Allora (transitività $x_2 \rho_{\neq} x_0$). x_2 non è minimale quindi esiste $x_3 \in S$ tale che $x_3 \rho_{\neq} x_2$, quindi anche $x_3 \rho_{\neq} x_1$ e $x_3 \rho_{\neq} x_0$. Proseguendo in questo modo, definiamo ricorsivamente una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di S tale che $\forall i, j \in \mathbb{N}\ (i < j \Rightarrow x_i \rho_{\neq} x_j)$, quindi $\forall i, j \in \mathbb{N}\ (i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$. Allora $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ è una parte infinita di S, questo è assurdo. Dunque S ha elementi minimali. Per dualità abbiamo anche provato (riferendoci a $\breve{\rho}$) che (S, ρ) ha elementi massimali. $\square$

Intervalli e copertura

Siano S un insieme, $\leq \in \mathrm{OL}(S)$, $<$ la corrispondente relazione d'ordine stretto, $a, b \in S$. Come siete abituati a fare, definiamo gli intervalli (chiuso, aperto, semiaperti) :

$$[a,b] = \{x \in S \mid a \leq x \wedge x \leq b\}; \qquad]a,b[= \{x \in S \mid a < x \wedge x < b\};$$
$$[a,b[= \{x \in S \mid a \leq x \wedge x < b\}; \qquad]a,b] = \{x \in S \mid a < x \wedge x \leq b\}$$

(si scrive anche $[a,b]_{(S,\leq)}$ per $[a,b]$, $]a,b[_{(S,\leq)}$ per $]a,b]$ etc.)

Inoltre, diciamo che b copre a (in $(S,\leq)$) se e solo se $a < b$ e $]a,b[= \varnothing$.
In questo caso, scriviamo $a \lessdot b$.

Per ogni $a, b \in S$ sono equivalenti:
(1) $a \lessdot b$;
(2) $a < b \wedge \neg(\exists c \in S(a < c < b))$;
(3) a è un elemento massimale in $(\{x \in S \mid x < b\}, \leq)$;
(4) b è un elemento minimale in $(\{x \in S \mid a < x\}, \leq)$.

se $a<b$, allora $]a,b[$ in $(\mathbb{Q},\leq)$ è infinito

Esempi:

In $(\mathbb{Z},\leq)$ 2 è coperto da? solo 3 $\forall n \in \mathbb{Z}$, n è coperto da? solo da $n+1$

In $(\mathbb{Q},\leq)$ 2 è coperto da? nessun elemento $\forall a,b \in \mathbb{Q}\, (\neg(a \lessdot b))$

In $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq)$, $\varnothing$ è coperto da? tutti e soli i singoletti degli elementi di $\mathbb{N}$

Se S è finito, $\lessdot$ determina $\leq$, infatti:

Teorema. Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato finito, e siano $a, b \in S$. Allora $a \leq b$ se e solo se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed elementi $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ di S tali che
$x_0 = a$,
$x_n = b$ e
$\forall j \in \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}\ (x_j \lessdot x_{j+1})$.

DIMOSTRAZIONE. La condizione è sufficiente: se esistono $n \in \mathbb{N}$ e gli elementi richiesti, con le proprietà richieste allora:
$n = 0 \Rightarrow a = x_0 = b$. quindi $a \leq b$
$n > 0 \Rightarrow a = x_0 \lessdot x_1 \lessdot x_2 \lessdot x_3 \lessdot \cdots \lessdot x_n = b$
quindi $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e $a < b$.
In ogni caso, $a \leq b$.
Viceversa, sia $a \leq b$. Se $a = b$, allora otteniamo la condizione richiesta ponendo $n = 0$ e $x_0 = a = b$.
Se $a \neq b$, cioè $a < b$, allora poniamo $x_0 = a$ e consideriamo l'intervallo $X =]a,b[$. Siccome X è finito, o $X = \emptyset$ oppure $(X,\leq)$ ha un elemento

minimale x_1. Nel primo caso ($X=\emptyset$), si ha $a<\cdot b$ quindi basta porre $n=1$ e $x_1=b$ per soddisfare la condizione richiesta. Nel secondo caso ($X\neq\emptyset$), consideriamo l'intervallo $]x_1,b[$ (notare: $x_1\leq b$). Se $]x_1,b[=\emptyset$, allora $x_1<\cdot b$, poniamo allora $n=2$ e $x_2=b$, così $a=x_0<\cdot x_1<\cdot x_2=b$ e la condizione è soddisfatta. Se $]x_1,b[\neq\emptyset$, scegliamo in esso (che è finito) un elemento x_2 minimale rispetto a $\leq$; allora $a=x_0<\cdot x_1<\cdot x_2\leq b$ e consideriamo $]x_2,b[$ ... Procedendo in questo modo, costruiamo una sequenza di elementi $x_1,x_2,\ldots$ di S tali che

$$a=x_0<\cdot x_1<\cdot x_2<\cdot\cdots<\cdot x_i<\cdot x_{i+1}<\cdot\cdots\leq b$$

ottenuta ricorsivamente in questo modo: se è definito x_i, se $x_i=b$ ci fermiamo, altrimenti definiamo x_{i+1} come un elemento minimale in $]x_i,b[$. Poiché S è finito (e gli elementi x_i sono a due a due distinti) questa costruzione si deve necessariamente fermare, quindi troviamo un $i\in\mathbb{N}$ tale che $x_i=b$. Ponendo $n=i$, vediamo che a questo punto abbiamo costruito gli elementi $x_0,x_1,\ldots,x_n$ richiesti.

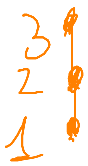
$\square$

diagrammi di Hasse

(S, ρ) ins. ordinato finito.

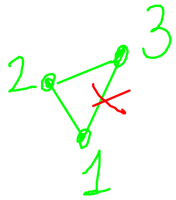
Rappresentiamo gli elementi di S come punti del piano, col vincolo che se $a, b \in S$ e $a < b$ il punto che rappresenta b sia disegnato più in alto di quello che rappresenta a.
Inoltre, tracciamo una linea da a e b se e solo se b copre a.
La figura così ottenuta è un diagramma di Hasse di $(S, \leq)$.

Esempi: $S = \{1, 2, 3\}$ $\leq$: ordine usuale:



oppure:

N.B.: non:



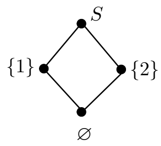
$(1 < 3$ ma non $1 \lessdot 3)$

$$(\mathcal{P}(S), \subseteq)$$

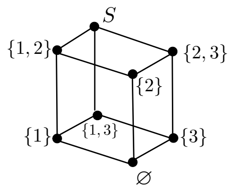
$S = \varnothing$

$|S| = 1$

$S = \{1, 2\}$



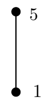
$S = \{1, 2, 3\}$



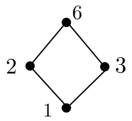
$[1, n]$ $(\mathbb{N}, |)$

$\mathrm{Div}(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\}$ (è l'intervallo $[1, n]$ in $(\mathbb{N}, |\,)$)

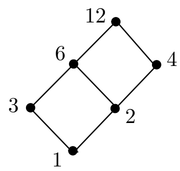
$n = 5$



$n = 6$



$n = 12$



$(\mathrm{Div}(5), |) \simeq (\mathcal{P}(\{5\}), \subseteq)$

sono isomorfi

$\mathcal{P}(\{1,2\}, \subseteq) \simeq (\mathrm{Div}(6), |)$

Un esempio di tipo generale

Siano (B, β) un insieme ordinato e $f \colon A \to B$ un'applicazione. Definiamo la relazione binaria α in A ponendo: $\forall x, y \in A$

$$x \;\alpha\; y \iff (x = y \vee f(x) \;\beta_{\neq}\; f(y)).$$

Allora $\alpha \in \mathrm{OL}(A)$. Inoltre:

$$a \text{ è minimale in } (A, \alpha) \iff f(a) \text{ è minimale in } (\mathrm{im}\, f, \beta) \quad \text{e}$$
$$a \text{ è massimale in } (A, \alpha) \iff f(a) \text{ è massimale in } (\mathrm{im}\, f, \beta).$$

Siano (S,ρ) un insieme ordinato e X una sua parte. Un minorante di X in (S,ρ) è un elemento di S che sia in relazione ρ con ogni elemento di X. Indichiamo con $X^{\downarrow_{(S,\rho)}}$ (o semplicemente con $X^{\downarrow}$ se (S,ρ) può essere sottinteso) l'insieme di questi minoranti, dunque

$$X^{\downarrow_{(S,\rho)}} = \{a \in S \mid \forall x \in X (a \mathrel{\rho} x)\}.$$

La nozione duale è quella di maggiorante. Un maggiorante di X in (S,ρ) è un minorante di X in $(S,\breve{\rho})$, l'insieme da essi formato è indicato con $X^{\uparrow_{(S,\rho)}}$ (o con $X^{\uparrow}$), dunque

$$X^{\uparrow_{(S,\rho)}} = X^{\downarrow_{(S,\breve{\rho})}} = \{a \in S \mid \forall x \in X (x \mathrel{\rho} a)\}.$$