Appunti di Algebra Commutativa

Giovanni Cutolo

Premessa

Queste note sono pensate come strumento di supporto per gli studenti del mio corso di Algebra Commutativa per il corso di laurea magistrale in matematica dell'università Federico II di Napoli.

Il corso ha natura introduttiva e sia la scelta degli argomenti trattati, che in qualche misura variano di anno in anno, che lo stile della trattazione sono ovviamente idiosincratici e riflettono gusti personali. Le note non hanno dunque lo scopo di fornire un riferimento di carattere generale per la disciplina e non sostituiscono in questo senso la necessaria consultazione dei numerosi testi di riferimento disponibili.

Ho cercato di raccogliere in questi appunti i contenuti che sono stati argomenti del corso almeno una volta negli anni recenti, anche se non necessariamente discussi a lezione con lo stesso dettaglio che in queste note; ma non è vero né che non manchi (almeno per ora) nessuno di questi argomenti né che proprio tutti tra quelli qui presentati abbiano (già) trovato la via dell'aula. Va da sé che queste note continueranno ad essere riviste, corrette, integrate, se non altro per assecondare l'evoluzione del corso nei prossimi anni accademici.

Sono parte integrante di questi appunti le osservazioni, gli esempi e gli esercizi, differenziati tipograficamente dal resto del testo ma, volutamente, non tra loro. Spesso essi hanno una qualche rilevanza per la teoria o stanno a suggerire possibili approfondimenti (che vanno, spesso, oltre le finalità del corso in quanto tale, ma mi auguro possano essere utili per migliori motivi).

Infine, doverosa avvertenza per lo studente (o la studentessa) che legge: come già detto, non tutto ciò che appare in questi appunti è stato trattato a lezione; ciò che non è stato discusso in aula non fa parte del programma di esame, per la definizione del quale fanno testo il programma ufficiale e, in maggior dettaglio, il registro delle lezioni, entrambi disponibili, per ciascun anno accademico, in rete.

Indice

Notazioni e terminologia

Applicazioni (funzioni) La principale avvertenza da fare è che, come di abitudine in algebra, in queste note la composizione (prodotto operativo) tra applicazioni è indicata nel verso naturale "da sinistra verso destra" anziché viceversa, come capita in altri contesti. Dunque, se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ sono applicazioni, l'applicazione composta ottenuta eseguendo prima f e poi g si indica con fg, non con gf oppure $g \circ f$. L'immagine di un elemento $a \in A$ mediante f sarà di regola indicata con la notazione esponenziale e non con quella sinistra, vale a dire: con a^f piuttosto che con $f(a)$. Dunque, per le applicazioni f e g indicate sopra, per ogni $a \in A$ avremo $a^{fg} = (a^f)^g$.

Sempre con riferimento ad una applicazione $f\colon A \to B$, indichiamo con $\vec{f}\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ e $\overleftarrow{f}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ le applicazioni immagine e antiimmagine definite da f.

Anelli, ideali, (pre)moduli

0_R :	zero dell'anello (o del premodulo) R
1_R :	unità dell'anello (o del monoide moltiplicativo) R
0 :	indica spesso l'ideale nullo $\{0_R\}$ di un anello R o il sottopremodulo nullo $\{0_M\}$ di un premodulo M
$\mathcal{U}(R)$:	gruppo degli invertibili dell'anello unitario (o del monoide moltiplicativo) R
$H \lhd R$:	H è un ideale di R
$H \lhd\cdot R$:	H è un ideale massimale di R
$\operatorname{Spec}(R)$:	spettro (= insieme degli ideali primi) di R
$Q(R)$:	campo dei quozienti del dominio di integrità R
$S^{-1}R$:	anello di frazioni di R (definito dalla sua parte $S \neq \varnothing$)
$\sqrt{H}$, $\sqrt[R]{H}$:	radicale di H (in R)
$\operatorname{Var}(H)$, $\operatorname{Var}_R(H)$:	varietà di H (in R)
$N \leq_R M$, $N \leq M$:	N è un sotto(pre)modulo di M
$N <_R M$, $N < M$:	N è un sotto(pre)modulo proprio di M
$N \lessdot_R M$, $N \lessdot M$:	N è un sotto(pre)modulo massimale di M
R_R :	(l'anello commutativo) R riguardato come premodulo su sé stesso
$\operatorname{Ann}_R(X)$:	annullatore di X in R
$(N : X)_R$:	è il trasportatore (o conduttore) $\{r \in R \mid \forall x \in X(xr \in N)\}$
$A \rtimes R$:	R-algebra accresciuta definita da A
$M \,{}_0\!\bowtie R$:	idealizzazione dell'R-(pre)modulo M

La terminologia utilizzata nella letteratura matematica su anelli, moduli e algebre non è affatto uniforme. Riassumiamo alcune scelte qui adottate, che vengono comunque discusse anche nel testo.

- Gli anelli, qui, *non sono necessariamente unitari*. Fare attenzione alla distinzione tra sottoanelli e sottoanelli unitari e tra omomorfismi di anelli e di anelli unitari, discussa nella sezione 1.1.
- Un anello *nullo* è un anello con un solo elemento, che è quindi lo zero e allo stesso tempo l'unità dell'anello.

- Un *divisore dello zero* in un anello R è un elemento $a \in R$ per il quale esista $b \in R$ tale che $ab = 0_R \neq b$. Dunque, se (e solo se) R non è nullo, 0_R ne è un divisore dello zero e, in ogni caso, i divisori dello zero di un anello sono tutti e soli i suoi elementi non cancellabili.
- Un *dominio di integrità* è un anello R, unitario o meno, in cui 0_R sia l'unico divisore dello zero. Un *campo* è un anello commutativo unitario in cui 0_R sia l'unico elemento non invertibile.
- Gli anelli nulli sono qui considerati unitari e, in conseguenza delle definizioni precedenti, non sono domini di integrità né sono campi.

Altro

$\mathbb{N}$:	l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (N.B. $0 \in \mathbb{N}$)
$\mathbb{N}^+$:	l'insieme $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ dei numeri interi positivi
$\mathbb{P}$:	l'insieme degli interi positivi primi
$\mathbb{Z}$:	l'anello dei numeri interi
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:	i campi dei numeri razionali, reali, complessi
$\mathcal{P}(S)$:	l'anello delle parti dell'insieme S ...
$\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$:	... il suo ideale costituito dalle parti finite di S
$\pi(n)$:	l'insieme degli interi positivi primi divisori dell'intero n
π' :	indica $\mathbb{P} \smallsetminus \pi$, se $\pi \subseteq \mathbb{P}$
$\overline{\mathbb{Q}}$:	la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$ nel campo complesso
$\overline{\mathbb{Z}}$:	la chiusura intera di $\mathbb{Z}$ nel campo complesso (ovvero in $\overline{\mathbb{Q}}$)
Z_K :	la chiusura intera di $\mathbb{Z}$ nel campo di numeri K, ovvero $K \cap \overline{\mathbb{Z}}$

Nota ortografica

Per la grafia del pronome sé in queste note si segue (salvo errori di battitura) l'autorevole lezione di Luca Serianni ed altri linguisti, che consigliano l'accentazione senza eccezioni, quindi anche in costrutti come 'sé stesso'.

1 Anelli, Moduli, Algebre

In questo capitolo introdurremo (o rivisiteremo) le strutture algebriche che hanno un ruolo predominante nell'algebra commutativa, che sono quelle richiamate nel titolo. Nel farlo fisseremo alcune notazioni e un po' di terminologia.

1.1 Anelli ed Anelli unitari

Sono comunemente in uso in matematica diverse definizioni di anello, non tutte equivalenti tra loro. Quella che adottiamo in queste note è la stessa che chi legge ha probabilmente incontrato nei primi corsi di algebra. Chiamiamo quindi anello una struttura algebrica $(R, +, \cdot, -, 0_R)$, dove $+$ e $\cdot$ sono operazioni binarie (dette rispettivamente addizione e moltiplicazione dell'anello), $-$ è un'operazione unaria e 0_R un'operazione nullaria (cioè la selezione di una costante), tali che $(R, +, -, 0_R)$ sia un gruppo abeliano, $\cdot$ sia associativa e distributiva (cioè distributiva sia da sinistra che da destra) rispetto a $+$. Rendiamo esplicito il fatto che un'operazione unaria in R è semplicemente un'applicazione $R \to R$; in questo caso l'applicazione che ad ogni elemento di R associa il suo opposto, cioè il simmetrico rispetto all'addizione. In accordo con la definizione di gruppo che stiamo dando per nota, la costante 0_R indica l'elemento neutro di R rispetto a $+$ e si chiama *zero* dell'anello R (con un abuso di notazione denotiamo con lo stesso simbolo, 0_R, sia lo zero dell'anello R che l'operazione nullaria che lo seleziona).

Utilizzeremo spesso, ma non sempre, questo modo di indicare stutture algebriche con una notazione che dia conto dell'intera segnatura della struttura, esplicitando quindi non solo le operazioni binarie ma anche quelle di altra arietà (nei casi che incontreremo, le operazioni unarie o nullarie). Questo tipo di notazione è quella usuale in un ambito dell'algebra chiamato algebra universale e, tra gli altri vantaggi, giustifica alcune scelte terminologiche che sembrerebbero altrimenti arbitrarie.

Con pochissime eccezioni—essenzialmente una—gli anelli considerati in queste note saranno sempre commutativi (cioè con moltiplicazione commutativa), e spesso anche unitari. Mentre la nozione di anello commutativo non richiede particolari commenti, va spesa qualche parola a proposito degli anelli unitari.

Un anello unitario può essere semplicemente definito come un anello che abbia elemento neutro rispetto alla moltiplicazione. In realtà conviene considerare quella degli anelli unitari come un tipo di struttura differente, già nella segnatura, da quella degli anelli. Diciamo quindi che un anello unitario è una struttura algebrica $(R, +, \cdot, -, 0_R, 1_R)$, dove $(R, +, \cdot, -, 0_R)$ è un anello e 1_R è l'operazione nullaria che seleziona l'elemento neutro rispetto a $\cdot$, chiamato *unità* di R ed anch'esso denotato da 1_R. Assumere questo punto di vista comporta alcune conseguenze; vediamole.

In accordo con definizioni date in algebra universale (o in teoria dei modelli), un omomorfismo tra due strutture algebriche dello stesso tipo è un'applicazione tra i sostegni delle due strutture che conservi *tutte* le operazioni che definiscono il tipo di struttura. Come è noto dai primi corsi di algebra, un'applicazione tra gruppi che conservi l'operazione binaria conserva necessariamente anche l'elemento neutro ed i simmetrici ed è quindi un omomorfismo nel senso che abbiamo qui appena specificato. Allo stesso modo, quindi, un'applicazione tra due anelli che conservi addizione e moltiplicazione è in senso proprio un omomorfismo perché conserva anche l'operazione nullaria (cioè lo zero) e l'operazione unaria (cioè gli opposti) ed è così un'omomorfismo di anelli.

Se però R e S sono anelli, entrambi dotati di unità, rispettivamente 1_R e 1_S, ed $f\colon R \to S$ è un omomorfismo di anelli, non è detto che f mandi 1_R in 1_S; in altri termini: non è detto che f conservi l'unità. Solo nel caso in cui lo faccia diciamo che f è un *omomorfismo di anelli unitari*, in accordo con la terminologia dell'algebra universale.

Ad esempio, sia X un insieme e Y una sua parte propria. Possiamo considerare l'anello (unitario) delle parti di X, ovvero $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap, \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}, \varnothing, X)$[1] e l'anello delle parti di Y, cioè $(\mathcal{P}(Y), \triangle, \cap, \mathrm{id}_{\mathcal{P}(Y)}, \varnothing, Y)$. Evidentemente l'applicazione immersione $\iota\colon \mathcal{P}(Y) \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$ tra questi anelli conserva addizione e moltiplicazione ma non l'unità; quindi è un omomorfismo di anelli (tra due anelli unitari), ma non un omomorfismo di anelli unitari.

Discorso analogo a quello fatto per gli omomorfismi vale per le sottostrutture. Una parte non vuota di una struttura algebrica ne costituisce una sottostruttura se e solo se è chiusa rispetto a tutte le operazioni della struttura. Nel caso degli anelli otteniamo così la consueta nozione di sottoanello, dato da una parte non vuota chiusa rispetto all'operazione di addizione, a quella di opposto e, di conseguenza, alla selezione dello zero (quindi un sottogruppo rispetto all'addizione), e chiusa anche rispetto all'operazione di moltiplicazione. Nel caso degli anelli unitari richiediamo in aggiunta la chiusura rispetto alla selezione dell'unità. Quindi in *sottoanello unitario* di un anello unitario R è un sottoanello di R a cui appartenga l'unità di R. Abbiamo così che se R è un anello unitario e S un suo sottoanello, sono possibili i seguenti casi:

- S non è un anello unitario;
- S è un anello unitario, ma la sua unità non è quella di R. La terminologia utilizzata in questo caso è davvero infelice e può essere fuorviante: S non è un sottoanello unitario di R, ma ne è un sottoanello che, come anello, è unitario;
- S è un anello unitario, e $1_S = 1_R$. In questo caso (e solo in questo) S è un sottoanello unitario di R.

Esempi per queste tre tipologie: $R = \mathbb{Z}$ e $S = 2\mathbb{Z}$ (l'anello dei numeri interi pari) per la prima, $R = \mathcal{P}(X)$ e $S = \mathcal{P}(Y)$, dove, come sopra, $Y \subset X$ per la seconda, $R = \mathbb{Q}$ e $S = \mathbb{Z}$ (o $S = \mathbb{Q}$) per la terza. Osserviamo anche che S è un sottoanello unitario di R precisamente quando l'immersione $S \hookrightarrow R$ è un omomorfismo di anelli unitari.

Notiamo infine che una condizione in apparenza molto più debole garantisce che un omomorfismo di anelli tra anelli unitari sia un omomorfismo di anelli unitari:

Lemma 1.1. *Siano R ed A anelli unitari, e sia $\varphi\colon R \to A$ un omomorfismo di anelli. Allora φ è un omomorfismo di anelli unitari se e solo se l'immagine di φ contiene almeno un elemento cancellabile in A. In particolare, se R è un sottoanello di A, allora R ne è un sottoanello unitario se e solo se almeno un elemento di R è cancellabile in A.*

Dimostrazione. Se φ è un omomorfismo di anelli unitari, allora $\operatorname{im}\varphi$ ha come elemento 1_A, ovviamente cancellabile in A. Viceversa, se esiste $r \in R$ tale che r^φ sia cancellabile in A, allora da $(1_R)^\varphi r^\varphi = (1_R r)^\varphi = r^\varphi = 1_A r^\varphi$ deduciamo $(1_R)^\varphi = 1_A$. Questo prova la prima parte dell'enunciato; la seconda si ottiene applicando la prima all'immersione di R in A. □

[1] $\triangle$ indica l'operazione di differenza simmetrica, che è l'addizione di questo anello, mentre la moltiplicazione è l'operazione di intersezione; l'opposto di ogni elemento di $\mathcal{P}(X)$ è l'elemento stesso, quindi $\mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}$, l'applicazione identica di $\mathcal{P}(X)$, è l'operazione unaria di selezione dell'opposto e ovviamente $\varnothing$ e X sono lo zero e l'unità dell'anello.

Osservazioni.

1.A.1. Come accennato, esistono nella letteratura matematica definizioni di anello diverse dalla nostra. Quella più generale tra quelle di uso frequente differisce dalla nostra solo nel non richiedere che l'operazione di moltiplicazione sia associativa. Chi adotta questa terminologia chiama anelli associativi quelli che noi abbiamo chiamato anelli. Sono esempi importanti di questi 'anelli non associativi' gli anelli di Lie, un tipo di struttura il cui studio ha numerose applicazioni sia in algebra che in altri settori della matematica.

Al contrario, moltissimi autori adottano una definizione di anello più restrittiva della nostra e richiedono nella definizione di anello l'esistenza di un elemento neutro per la moltiplicazione. In altri termini, questi autori chiamano anelli quelli che per noi sono gli anelli unitari. Occorre dunque verificare sempre, quando si consultano testi di algebra (o altre fonti), quale sia la definizione di anello lì utilizzata.

1.A.2. Abbiamo insistito sui vantaggi nell'indicare la segnatura completa delle strutture algebriche che vengono introdotte, ma, naturalmente, è del tutto lecito riferirsi ad esse esplicitando solo alcune delle loro operazioni, che determinino univocamente le rimanenti. Ad esempio, si usano spesso scritture come "l'anello $(R, +, \cdot)$", in cui sono specificate solo le due operazioni binarie; questo non dà luogo ad ambiguità perché sia l'operazione unaria di opposto che quella nullaria di selezione dello zero sono univocamente determinate dall'operazione di addizione. Allo stesso modo, e per l'analogo motivo, potremmo scrivere "l'anello unitario $(R, +, \cdot)$", sottintendendo l'unità dell'anello.

Il caso estremo è quello in cui le operazioni vengono omesse del tutto e si scrive, ad esempio, "l'anello R" piuttosto che "l'anello $(R, +, \cdot)$"; lo si può fare solo se il contesto chiarisce, senza ambiguità, quali siano le operazioni $+$ e $\cdot$.

1.A.3. È appena il caso di notare che talvolta lo stesso simbolo $(-)$ usato per l'operazione unaria di opposto in un anello viene anche usato per l'operazione binaria di differenza (generalmente non associativa e di non particolare interesse). Questo è implicito in scritture come $a - b$, comunemente usata come abbreviazione di $a + (-b)$.

Fissiamo un po' di terminologia (che non è del tutto universale). In queste note considereremo, tra gli anelli unitari, gli *anelli nulli*, quelli cioè con un solo elemento, che è, quindi, allo stesso tempo lo zero e l'unità dell'anello. Dovrebbe essere chiaro che gli anelli nulli sono tutti isomorfi tra loro e sono tutti e soli gli anelli unitari in cui lo zero è un elemento invertibile. A proposito dello zero, stabiliamo anche che, in queste note, se R è un anello non nullo lo zero di R è considerato un divisore dello zero in R; dunque, in ogni anello, i divisori dello zero sono tutti e soli gli elementi non cancellabili (rispetto alla moltiplicazione). Inoltre, poiché lo troviamo vantaggioso, chiamiamo domini di integrità gli anelli commutativi in cui lo zero sia l'unico divisore dello zero; in questo modo stabiliamo che gli anelli nulli *non* sono domini di integrità.

1.1.1 L'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano

Iniziamo da qualcosa di molto elementare. Siano X un insieme e $*$ un'operazione binaria definita in un insieme S. Allora si definisce un'operazione binaria $*^X$ nell'insieme S^X delle applicazioni da X a S ponendo, per ogni $f, g \in S^X$,

$$f *^X g \colon x \in X \longmapsto x^f * x^g \in S.$$

L'operazione $*^X$ viene abitualmente chiamata operazione puntuale definita da $*$ in S^X. È facilissimo verificare che se $*$ è associativa, o commutativa, $*^X$ ha la stessa proprietà e che se $t \in S$ è elemento neutro per $*$ l'applicazione costante t (in S^X) è neutra rispetto a $*^X$; inoltre, se $(S, *)$ è un gruppo anche $(S^X, *^X)$ lo è: il simmetrico di un'applicazione $f \in S^X$ sarà l'applicazione che

ad ogni $x \in X$ associa il simmetrico di x^f rispetto a $*$:

$$f^{-1}\colon x \in X \longmapsto \left(x^f\right)^{-1} \in S,$$

usando $^{-1}$ per indicare simmetrici. Abitualmente si indica l'operazione puntuale $*^X$ con lo stesso simbolo usato per indicare l'operazione $*$.

Sia ora $(A, +, -, 0_A)$ un gruppo abeliano. Nell'insieme A^A delle applicazioni da A ad A sono definite due applicazioni associative: l'addizione puntuale (cioè l'operazione puntuale definita dall'addizione $+$ del gruppo), che indichiamo ancora con $+$, e il prodotto operativo (o composizione) tra applicazioni. L'insieme $\mathrm{End}(A, +)$ degli endomorfismi del gruppo A è chiuso rispetto ad entrambe le operazioni, e le operazioni indotte lo strutturano come anello unitario:

Proposizione 1.2. *Con le notazioni appena fissate,* $\mathrm{End}(A, +)$*, munito dell'operazione di addizione puntuale e quella di composizione tra applicazioni, è un anello unitario, il cui zero è l'endomorfismo nullo (l'applicazione costante* 0_A*) e la cui unità è l'applicazione identica* id_A *di* A*.*

La dimostrazione di queste affermazioni (inclusa quella che precede la proposizione) è lasciata per esercizio. Va notato che se il gruppo $(A, +)$ non è abeliano non è più vero che $\mathrm{End}(A, +)$ è chiusa rispetto all'addizione puntuale; ad esempio $\mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A$ non è più un endomorfismo di A. A questo proposito, si veda l'esercizio 1.B.2.

Esempi, osservazioni, esercizi.

1.B.1. Le operazioni puntuali non sono ovviamente nulla di particolarmente nuovo: quando in analisi, ad esempio, si sommano o moltiplicano tra loro funzioni reali, si stanno utilizzando operazioni puntuali definite dalle operazioni di addizione o di moltiplicazione tra numeri reali.

1.B.2. Sia $(A, +)$ un gruppo, non necessariamente abeliano, e siano α e β suoi endomorfismi. Verificare che l'applicazione somma puntuale $\alpha + \beta$ è un endomorfismo di A se e solo se le immagini $\operatorname{im}\alpha$ e $\operatorname{im}\beta$ di α e β si centralizzano (cioè: $a^\alpha + b^\beta = b^\beta + a^\alpha$ per ogni $a, b \in A$). Di conseguenza: $\mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A$ è un endomorfismo di A se e solo se A è abeliano.

1.B.3. L'anello degli endomorfismi di un gruppo ciclico infinito (rispettivamente, ciclico di ordine m) è isomorfo all'anello $\mathbb{Z}$ degli interi (rispettivamente, all'anello $\mathbb{Z}_m$ degli interi modulo m). Questo non è difficile da provare: se $(A, +)$ è ciclico infinito, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'applicazione $\varepsilon_n\colon a \in A \mapsto na \in A$ è un endomorfismo di A e si può verificare (chi legge è incoraggiato a farlo) che l'applicazione $n \in \mathbb{Z} \mapsto \varepsilon_n \in \mathrm{End}(A, +)$ è un isomorfismo di anelli (unitari); similmente si ragiona nel caso $|A| = m$. Ed analogo è anche il caso del gruppo additivo razionale $(\mathbb{Q}, +)$: l'applicazione che ad ogni numero razionale r associa l'endomorfismo di $(\mathbb{Q}, +)$ definito da $q \mapsto qr$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ è un isomorfismo dal campo dei numeri razionali a $\mathrm{End}(\mathbb{Q}, +)$. Per chi ha familiarità con questa terminologia: l'anello degli endomorfismi di un gruppo localmente ciclico è sempre commutativo.

Nonostante questi esempi, in generale l'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano non è un anello commutativo. Ad esempio, l'anello degli endomorfismi del gruppo di Klein V_4 (il gruppo non ciclico di ordine 4) è isomorfo all'anello delle matrici 2×2 sul campo $\mathbb{Z}_2$, che ovviamente non è commutativo.

1.B.4. Alcuni degli esempi forniti al punto precedente sono gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è un campo. In effetti un classico esercizio consiste nel provare che, se A è un gruppo abeliano, l'anello degli endomorfismi di A è un corpo se e solo se A è ciclico di ordine primo oppure $A \simeq (\mathbb{Q}, +)$; in questi casi $\operatorname{End} A$ è un campo primo, cioè un campo privo di sottocampi propri, ovvero o di ordine primo o isomorfo al campo razionale.

1.2 Moduli e premoduli

La nozione di modulo su un anello è l'ovvia estensione agli anelli unitari di quella di spazio vettoriale su un corpo ed ha un ruolo centrale in diversi ambiti della matematica, a cominciare dall'algebra (commutativa e non). Oltre a questa, definiamo qui una nozione più generale, quella di premodulo, riferita ad anelli non necessariamente unitari.

Sia $(R, +, \cdot)$ un anello commutativo.[2] Chiamiamo *premodulo* su R, o R-premodulo, una coppia ordinata $((M, \dot{+}), \zeta)$, dove $(M, \dot{+})$ è un gruppo abeliano e ζ è un omomorfismo di anelli da R a $\mathrm{End}(M, \dot{+})$. Se, inoltre, R è unitario e ζ è un omomorfismo di anelli unitari $((M, \dot{+}), \zeta)$ è, per definizione, un *modulo* su R, o un R-modulo.

In questi contesti faremo riferimento a ζ come all'*azione di premodulo*, (o di modulo), di R su M. Spesso si dice semplicemente che M è un (pre)modulo su R,[3] sottintendendo il riferimento a ζ.

Un'azione di (pre)modulo ζ, come appena introdotta, permette di definire un'operazione esterna di R su M, cioè un'applicazione $M \times R \to M$ in questo modo:

$$\bullet\colon (a, r) \in M \times R \longmapsto a^{r^\zeta} \in M.$$

Come di consueto con le operazioni, si preferisce usare la notazione infissa per indicare l'immagine di una coppia e scrivere quindi $a \bullet r$ per a^{r^ζ}. L'operazione esterna $\bullet$ verifica queste proprietà:

$$\begin{aligned} &\forall a, b \in M\ \forall r, s \in R \\ &\qquad (\mathcal{M}_1): \quad (a \dot{+} b) \bullet r = a \bullet r \dot{+} b \bullet r \\ &\qquad (\mathcal{M}_2): \quad a \bullet (r + s) = a \bullet r \dot{+} a \bullet s \\ &\qquad (\mathcal{M}_3): \quad a \bullet (rs) = (a \bullet r) \bullet s \end{aligned}$$

e, se R è unitario e ζ è un'azione di modulo,

$$(\mathcal{M}_4): \quad a \bullet 1_R = a.$$

Infatti, $(\mathcal{M}_1)$ equivale a $(a \dot{+} b)^{r^\zeta} = a^{r^\zeta} \dot{+} b^{r^\zeta}$, quindi il fatto che essa valga per ogni scelta di a e b equivale a dire che r^ζ sia un endomorfismo di $(M, \dot{+})$; $(\mathcal{M}_2)$ equivale a $a^{(r+s)^\zeta} = a^{r^\zeta} \dot{+} a^{s^\zeta} = a^{r^\zeta + s^\zeta}$, quindi il fatto che essa valga per ogni scelta di $a \in M$ equivale a $(r + s)^\zeta = r^\zeta + s^\zeta$, la cui validità per ogni $r, s \in R$ esprime precisamente il fatto che ζ è un omomorfismo additivo. Allo stesso modo $(\mathcal{M}_3)$ esprime il fatto che $(rs)^\zeta = r^\zeta s^\zeta$ per ogni $r, s \in R$, cioè: ζ è un omomorfismo moltiplicativo (dunque, $(\mathcal{M}_2)$ e $(\mathcal{M}_3)$, considerate insieme, equivalgono alla richiesta che ζ sia un omomorfismo di anelli). Infine $(\mathcal{M}_4)$ equivale a $a^{(1_R)^\zeta} = a$ per ogni $a \in M$, ovvero $(1_R)^\zeta = \mathrm{id}_M$, dunque $(\mathcal{M}_4)$, in aggiunta a $(\mathcal{M}_2)$ e $(\mathcal{M}_3)$, equivale all'essere ζ un omomorfismo di anelli *unitari*.

Queste osservazioni mostrano non solo che ogni azione di premodulo ζ determina un'operazione esterna $\bullet = \bullet_\zeta$ che verifica le $(\mathcal{M}_{1,2,3})$ (e anche la $(\mathcal{M}_4)$ se ζ è un'azione di modulo) ma anche che, viceversa, se $\bullet\colon M \times R \to M$ è un'operazione esterna che verifica le $(\mathcal{M}_{1,2,3})$, per ogni $r \in R$ l'applicazione $r_\bullet\colon a \in M \mapsto a \bullet r \in M$ è un endomorfismo di $(M, \dot{+})$ e l'applicazione $\zeta_\bullet\colon r \in R \mapsto r_\bullet \in \mathrm{End}(M, \dot{+})$ è un omomorfismo di anelli, cioè un'azione di premodulo, che è un'azione di modulo se $\bullet$ verifica anche $(\mathcal{M}_4)$. È inoltre piuttosto evidente che i passaggi appena descritti da un'azione ad un'operazione esterna e viceversa sono l'uno inverso dell'altro (vale a dire: $\zeta_{\bullet_\zeta} = \zeta$ e $\bullet_{\zeta_\bullet} = \bullet$ per ogni scelta di ζ e di $\bullet$). Abbiamo così provato:

[2] l'unica ragione per la quale assumiamo l'ipotesi di commutatività è che l'argomento di questo corso è limitato alle strutture commutative. Le nozioni di modulo e premodulo che diamo qui si definiscono, senza alcuna modifica, anche per anelli non commutativi.

[3] d'ora in avanti useremo spesso espressioni come '(pre)modulo', 'sotto(pre)modulo' o simili per definire concetti o enunciare proprietà che siano riferiti simultaneamente e in modo parallelo a moduli e a premoduli. Ovviamente, scrivendo di un '(pre)modulo M sull'anello commutativo R' conveniamo anche che se M è inteso come modulo l'anello R sia implicitamente assunto anche unitario.

Proposizione 1.3. *Siano R un anello commutativo e M un gruppo abeliano. Allora l'applicazione che ad ogni azione di premodulo ζ di R su M associa $\bullet\colon (a,r) \in M \times R \longmapsto a^{r^\zeta} \in M$ è una biezione dall'insieme di tutte le azioni di premodulo di R su M all'insieme delle operazioni esterne $M \times R \to M$ per le quali sono verificate le condizioni in $(\mathcal{M}_{1,2,3})$.*

Inoltre, se R è anche unitario, la stessa applicazione induce una biezione dall'insieme di tutte le azioni di modulo di R su M all'insieme delle operazioni esterne $M \times R \to M$ per le quali sono verificate le condizioni in $(\mathcal{M}_{1,2,3,4})$.

Tutto ciò significa che abbiamo a disposizione due modi equivalenti di definire un (pre)modulo su un anello commutativo unitario: specificando l'azione di (pre)modulo, in accordo con la definizione data all'inizio di questa sezione, oppure specificando un'operazione esterna che verifichi le $(\mathcal{M}_{1,2,3})$ (nel caso dei premoduli) o le $(\mathcal{M}_{1,2,3,4})$ (nel caso dei moduli).

Abbiamo usato i simboli $\dotplus$ e $\bullet$ per indicare le operazioni interna ed esterna del (pre)modulo M per ragioni di chiarezza espositiva, cioè per evitare di confondere queste operazioni con quelle dell'anello R nell'espressione, ad esempio, delle $(\mathcal{M}_{1,2,3,4})$. Di regola, d'ora in avanti, non faremo più distinzioni notazionali del genere e useremo (con ovvio abuso) $+$ e $\cdot$ per indicare anche le operazioni, interna ed esterna, dei (pre)moduli.

Prendiamo nota di alcune regole di calcolo che valgono in ogni premodulo, quindi in ogni modulo.

Lemma 1.4. *Sia M un premodulo sull'anello commutativo R. Allora, per ogni $a, b \in M$ e $r \in R$ si ha:*
(i) $a0_R = 0_M r = 0_M$;
(ii) $-(ar) = (-a)r = a(-r)$;
(iii) $(a-b)r = ar - br$.
Se R è unitario e M è un R-modulo, $-a = a(-1_R)$ per ogni $a \in M$.

Dimostrazione. La verifica è elementare. Se ζ è l'azione di R su M, allora 0_R^ζ è l'endomorfismo nullo di M e, per ogni $r \in R$, r^ζ, essendo un endomorfismo di M, manda 0_M in 0_M, Questo giustifica (i). In modo simile si può procedere per (ii) e (iii). L'osservazione finale segue da (ii). □

1.2.1 Alcuni esempi fondamentali

Spazi vettoriali Se R è un campo, le condizioni $(\mathcal{M}_{1\text{–}4})$ rendono evidente che i moduli su R non sono altro che gli spazi vettoriali su R. Quindi, come accennato all'inizio di questa sezione, la nozione di modulo generalizza quella di spazio vettoriale.

Gruppi abeliani D'altra parte, la nozione di modulo generalizza anche quella di gruppo abeliano. Infatti, se $(A,+)$ è un gruppo abeliano, si verifica subito che l'operazione esterna $(a,n) \in A \times \mathbb{Z} \mapsto na \in A$ verifica le $(\mathcal{M}_{1\text{–}4})$; qui na è il consueto multiplo di a per l'intero n, come viene definito nei corsi elementari di algebra. Dunque, $(A,+)$ si può riguardare come $\mathbb{Z}$-modulo. L'azione di questo modulo è l'omomorfismo $n \in \mathbb{Z} \mapsto \varepsilon_n \in \mathrm{End}(A)$, dove $\varepsilon_n\colon a \in A \mapsto na \in A$. Ora, è molto facile verificare che questo è l'unico omomorfismo di anello unitari da $\mathbb{Z}$ a $\mathrm{End}(A)$;[4] possiamo dunque concludere che *ogni gruppo abeliano si può riguardare come modulo sull'anello degli interi in uno ed un solo modo.* In effetti, in un senso che si può rendere preciso, la teoria dei gruppi abeliani si può identificare con la teoria dei moduli su $\mathbb{Z}$.

Aggiungiamo anche che, qualunque sia l'anello commutativo R, l'applicazione costante $\zeta_0\colon R \to \mathrm{End}\, A$ che ad ogni $r \in R$ associa l'endomorfismo nullo di A è un omomorfismo di anelli, che

[4] per ogni anello unitario R, esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\mathbb{Z} \to R$, quello definito da $n \mapsto n1_R$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$; questo è un facile esercizio. In termini categoriali, questo fatto si esprime dicendo che l'anello degli interi è un oggetto iniziale nella categoria degli anelli unitari.

struttura così A come R-premodulo. Ad eccezione del caso in cui A sia il gruppo identico, questo non è un R-modulo, perché ζ_0 non è un omomorfismo di anelli unitari se $|A| > 1$. In questo premodulo l'operazione esterna è la costante zero.

R_R Un altro esempio importante: ogni anello commutativo $(R, +, \cdot)$ si può riguardare come premodulo su sé stesso utilizzando la sua moltiplicazione interna $\cdot$ come operazione esterna e l'operazione $+$ di addizione di R anche come operazione interna di addizione del premodulo. Questo premodulo viene spesso indicato come R_R. Dunque, $(R_R, +) = (R, +)$ e l'azione di premodulo che definisce R_R è l'omomorfismo che ad ogni $r \in R$ associa l'endomorfismo $a \mapsto ar$ di $(R, +)$. Se R è, in aggiunta, unitario, R_R è un modulo su R.

1.2.2 Omomorfismi, sotto(pre)moduli

Sia R un anello commutativo e siano A e B premoduli su R. Un omomorfismo (di R-premoduli, o R-omomorfismo, o applicazione R-lineare) da A a B è un'applicazione $\varphi\colon A \to B$ che sia un omomorfismo di gruppi e verifichi $(ar)^\varphi = a^\varphi r$ per ogni $a \in A$ ed $r \in R$. Nel caso in cui R sia anche unitario e A e B siano moduli su R, un tale φ si chiama anche, come è ovvio che sia, un omomorfismo di R-moduli. Notiamo che, in entrambi casi, la condizione richiesta su φ è che esso 'conservi' l'operazione interna ed anche, per ogni $r \in R$, l'operazione unaria di moltiplicazione per r (si veda a questo proposito l'osservazione 1.C.2). Se $\alpha\colon R \to \operatorname{End} A$ e $\beta\colon R \to \operatorname{End} B$ sono le azioni che descrivono come R-moduli o R-premoduli A e B, la seconda condizione si può riscrivere anche come: $(\forall a \in A\ \forall r \in R)(a^{r^\alpha\varphi} = a^{\varphi r^\beta})$, ovvero $(\forall r \in R)(r^\alpha\varphi = \varphi r^\beta)$. Dunque, un omomorfismo di gruppi $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di R-(pre)moduli se e solo se, per ogni $r \in R$ è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle r^\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r^\beta} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B. \end{array}$$

I prefissi mono-, epi-, iso-, endo-, auto- riferiti a (omo)morfismi di moduli o premoduli hanno il significato consueto.

Definiti gli omomorfismi, passiamo a definire le sottostrutture. Sia M un R-premodulo. Un *sottopremodulo* (o R-sottopremodulo) di M è un sottogruppo N di M (rispetto, ovviamente, all'operazione interna di M) che sia chiusa rispetto alla moltiplicazione per elementi di R. Se (R è unitario e) M è un R-modulo, i suoi sottopremoduli si chiamano anche *sottomoduli*. Dunque, una parte non vuota N di M ne costituisce un sotto(pre)modulo se e solo se, per ogni $a, b \in N$ e $r \in R$ si ha $a - b \in N$ e $ar \in N$. Per indicare che N è un R-sotto(pre)modulo di M useremo spesso la notazione $N \leq_R M$, o talvolta più semplicemente $N \leq M$, se il riferimento a R può essere omesso senza rischi di ambiguità.[5] È appena il caso di notare che i sottogruppi banali $\{0_M\}$, usualmente scritto come 0, e M sono sotto(pre)moduli di M e si chiamano in questo contesto sotto(pre)moduli banali, e che utilizziamo simboli come $< M$ e $<_R M$ per indicare sotto(pre)moduli propri (cioè diversi da M).

Nel caso dei moduli (ma non in quello dei premoduli; si veda l'esempio 1.C.3), la verifica della proprietà di essere un sottomodulo può essere resa più diretta da questa semplice osservazione:

Lemma 1.5. *Sia M un modulo su un anello commutativo unitario R e sia $\varnothing \neq N \subseteq M$. Allora $N \leq_R M$ se e solo se, per ogni $a, b \in N$ e $r \in R$ si ha $a + b \in N$ e $ar \in N$.*

[5] Quanto alla possibile confusione con la nozione di sottogruppo, in genere scriveremo $H \leq_{\mathbb{Z}} M$ per indicare che H è un sottogruppo del gruppo additivo di M. La ragione dietro questa notazione è il fatto che, come già visto, M ha una ed una sola struttura di $\mathbb{Z}$-modulo e (vedi esempio 1.C.4) gli $\mathbb{Z}$-sottomoduli di M sono tutti e soli i suoi sottogruppi.

Dimostrazione. Se la condizione data è soddisfatta, per ogni $a \in N$ si ha $-a = a(-1_R) \in N$, dunque N è un sottogruppo e quindi anche un sottomodulo di M. □

Infine, notiamo che, come chi legge non avrà difficoltà a verificare, se R è un anello commutativo e $f\colon A \to B$ un omomorfismo di R-(pre)moduli, *l'immagine mediante f di ogni sotto(pre)modulo di A è un sotto(pre)modulo di B e l'antiimmagine mediante f di ogni sotto(pre)modulo di B è un sotto(pre)modulo di A.*

Osservazioni ed esempi.

1.C.1. Si avverte chi legge che il termine 'premodulo' qui introdotto non è affatto di uso comune. Nella letteratura matematica corrente viene quasi sempre usato il termine 'modulo' nell'accezione utilizzata in queste note; i pochi autori che introducono quelli che qui abbiamo chiamato premoduli chiamano questi moduli e chiamano invece 'moduli unitari' quelli che noi abbiamo chiamato moduli.

Vedremo più avanti che ogni premodulo su un anello commutativo si può anche riguardare come modulo su un (altro) anello commutativo unitario, quindi in qualche senso la nozione di premodulo si potrebbe ridurre a quella di modulo.

1.C.2. Dal punto di vista dell'algebra universale, le definizioni di sotto(pre)modulo e di omomorfismo di (pre)moduli trovano piena giustificazione nel fatto che, se $\zeta\colon R \to \mathrm{End}(M,+)$ è un'azione di (pre)modulo, si riguarda l'R-(pre)modulo M come una struttura algebrica la cui segnatura comprenda i simboli $+$, $-$ e 0_M per le operazioni (binaria, unaria, nullaria) che qualificano M come gruppo e, per ogni $r \in R$, l'endomorfismo r^ζ visto come operazione unaria. Dunque, in accordo con le definizioni generali, i sotto(pre)moduli di M sono costituiti dalle parti non vuote che siano chiuse rispetto a tutte queste operazioni e gli omomorfismi di R-(pre)moduli non sono altro che le applicazioni tra sostegni di R-(pre)moduli che conservino tutte le operazioni elencate.

Il fatto che valga il lemma 1.5 dipende da una ridondanza in questa descrizione nel caso dei moduli: l'operazione unaria $(-1_R)^\zeta$ coincide con l'operazione $-$ di selezione dell'opposto.

1.C.3. Come già visto, se R è un anello commutativo e A è un gruppo abeliano, si può riguardare A come R-premodulo con prodotto esterno costante zero: $ar = 0_A$ per ogni $a \in A$ e $r \in R$. In questo premodulo i sottopremoduli sono precisamente i sottogruppi di A.

Questo esempio mostra, tra l'altro, perché l'analogo del lemma 1.5 non vale per i premoduli. Se A ha un sottomonoide B (quindi B è una parte chiusa rispetto all'operazione binaria di A e $0_A \in B$) che non sia un sottogruppo (ad esempio: $A = (\mathbb{Z},+)$ e $B = \mathbb{N}$), allora B è chiuso rispetto alla moltiplicazione per elementi di R ed all'operazione in A, ma non è un sottopremodulo.

1.C.4. Se A è un gruppo abeliano, dunque uno $\mathbb{Z}$-modulo, ogni sottogruppo di A è chiuso rispetto alla moltiplicazione per arbitrari interi, quindi gli $\mathbb{Z}$-sottomoduli di A sono tutti e soli i suoi sottogruppi. Similmente, è facilissimo verificare che un'applicazione tra gruppi abeliani è un omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli se e solo se è un omomorfismo di gruppi.

1.C.5. Allo stesso modo, se R è un campo le nozioni di R-omomorfismo e di R- sottomodulo coincidono con quelle di applicazione R-lineare e di sottospazio vettoriale incontrate nei corsi di geometria.

1.C.6. Se R è un anello commutativo, gli R-sotto(pre)moduli di R_R sono tutti e soli gli ideali di R.

È bene prendere nota del fatto che, per un'applicazione $\varphi\colon R \to R$ le proprietà di essere un endomorfismo (di R-premoduli) di R_R, quella di essere un endomorfismo di anelli, o di anelli unitari di R sono diverse tra loro. Perché φ sia un endomorfismo, in ciascuno di questi sensi, è richiesto che φ sia un endomorfismo del gruppo additivo di R, cioè che conservi l'addizione,

ma perché φ sia un endomorfismo di R-moduli serve che valga $(rs)^\varphi = r^\varphi s$ per ogni $r, s \in R$; perché φ sia un endomorfismo di anelli questa condizione va rimpiazzata con $(rs)^\varphi = r^\varphi s^\varphi$ per ogni $r, s \in R$, con l'aggiunta di $(1_R)^\varphi = 1_R$ se si vuole che φ sia un endomorfismo di anelli unitari. Ad esempio, per ogni $a \in R$ l'applicazione $\lambda_a \colon r \in R \mapsto ar \in R$ è un endomorfismo di R_R, ma in generale non un endomorfismo dell'anello R (lo è se e solo se induce l'identità su R^2a, ad esempio quando $a^2 = a$), ed è un endomorfismo di anelli unitari se e solo se $a = 1_R$. Invece, per ogni primo p, se R è un dominio di integrità unitario di caratteristica p che non sia un campo di ordine p, l'applicazione $r \in R \mapsto r^p \in R$ è un endomorfismo di anelli unitari, ma non è un endomorfismo di R_R. Verificarlo.

1.2.3 Prodotti e somme tra parti; sotto(pre)moduli generati

È ovvio che l'intersezione di un insieme non vuoto di sotto(pre)moduli di un (pre)modulo è ancora un sotto(pre)modulo. Da questo segue che se M è un (pre)modulo su un anello commutativo R e $X \subseteq M$, allora $\bigcap\{N \leq_R M \mid X \subseteq N\}$ è il minimo (rispetto all'inclusione) sotto(pre)modulo di M contenente X, vale a dire il *sotto(pre)modulo di M generato da X*. Per descriverlo in modo più esplicito, introduciamo la nozione di *prodotto tra una parte del (pre)modulo M ed una dell'anello R*.

Siano dunque M un (pre)modulo sull'anello commutativo R, $X \subseteq M$ e $S \subseteq R$. Il prodotto XS è, per definizione, il sottomonoide di M generato dall'insieme dei suoi elementi della forma xs al variare di $x \in X$ e $s \in S$. In modo più esplicito:

$$XS = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}(x_i \in X \wedge s_i \in S) \right\}.$$

Si noti che tra gli elementi di XS c'è anche 0_M, ottenuto come somma con zero addendi. Gli elementi di XS si possono descrivere come le *combinazioni lineari* di elementi di X a coefficienti in S. Come di consueto, nel caso in cui $X = \{x\}$ sia un singleton può capitare di scrivere xR piuttosto che $\{x\}R$. Si verifica subito che in questo caso il prodotto assume una forma più semplice: $xR = \{xr \mid r \in R\}$.

Lemma 1.6. *Sia M un modulo sull'anello commutativo unitario R, e sia $X \subseteq M$. Allora il sottomodulo di M generato da X è XR.*

Dimostrazione. È evidente che ogni sottomodulo di M contenente X contiene anche XR. Inoltre $X \subseteq XR$ (per ogni $x \in X$ si ha $x = x1_R \in XR$). Infine, XR è, per sua definizione, chiuso rispetto all'addizione in M ed è, evidentemente, anche chiuso rispetto alla moltiplicazione per elementi di R. Grazie al lemma 1.5 concludiamo dunque che $XR \leq_R M$. L'enunciato è ora ovvio. □

Nel caso dei sottopremoduli il corrispondente enunciato è lievemente più complicato; si veda l'esercizio 1.D.3 o, più avanti, la proposizione 1.34.

Un caso importante di prodotto tra parti è quello in cui il premodulo a cui si applica la definizione è un anello commutativo R visto come premodulo su sé stesso, vale a dire R_R. Abbiamo in questo caso una operazione binaria di prodotto tra parti di un anello, che vedremo avere grandissima utilità.

Altra operazione tra parti di un (pre)modulo è quella di addizione. Se n è un intero positivo e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono parti del premodulo M, la loro somma è l'insieme di tutti gli elementi di M che si possano scrivere come somma di n elementi, presi uno in ciascuna delle parti X_i:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}(x_i \in X_i) \right\}.$$

Nel caso di famiglie infinite la definizione si estende in questo modo: se $(X_i)_{i\in I}$ è una arbitraria famiglia di parti di M, la somma $\sum_{i\in I} X_i$ di questa famiglia è l'insieme delle somme $\sum_{i\in I} x_i$ dove, per ogni $i \in I$, si ha $x_i \in X_i$ e l'insieme $\{i \in I \mid x_i \neq 0_M\}$ è finito (quest'ultima condizione serve a garantire che la somma sia ben definita). Si noti che $\sum_{i\in I} X_i$ è vuota se $\{i \in I \mid 0_M \notin X_i\}$ è infinito.

Lemma 1.7. *Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia non vuota di sotto(pre)moduli del (pre)modulo M sull'anello commutativo R. Allora il sotto(pre)modulo di M generato da questa famiglia*[6] *è $\sum_{i\in I} A_i$.*

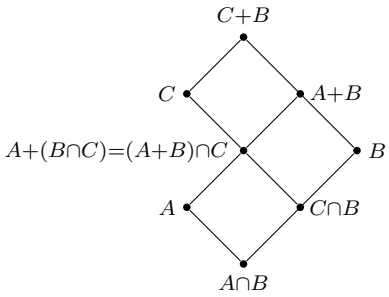
Dimostrazione. Poiché 0_M appartiene a ciascuno degli A_i, è chiaro che $S := \sum_{i\in I} A_i$ contiene $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$. Inoltre, come è evidente, $SR \subseteq S$. Da ciò segue facilmente l'asserto. □

In particolare, il sotto(pre)modulo generato da due sotto(pre)moduli A e B di un (pre)modulo è la loro somma $A + B$.

Legge di Dedekind Questo semplice risultato si rivela spesso utile. È noto come *legge modulare di Dedekind*; il suo contenuto è illustrato dal diagramma di Hasse sulla destra.

Lemma 1.8. *Siano A, B e C sottopremoduli di uno stesso premodulo. Se $A \subseteq C$, allora $A + (B \cap C) = (A + B) \cap C$.*

Dimostrazione. Avendosi $A, B \leq A + B$, e $A, B \cap C \leq C$, si ha ovviamente $A + (B \cap C) \leq (A + B) \cap C$. Inversamente, sia $c \in (A + B) \cap C$, allora $c = a + b$ per opportuni $a \in A$ e $b \in B$. Poiché $A \subseteq C$, abbiamo anche $a \in C$ e quindi $b = c - a \in C$, dunque $c = a + b \in A + (B \cap C)$. □



Corollario 1.9. *Siano A, B e C sottopremoduli di uno stesso premodulo e supponiamo $A \subseteq C$. Se $A \cap B = C \cap B$ e $A + B = C + B$, allora $A = C$.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi e dal lemma 1.8 segue $A = A+(A\cap B) = A+(B\cap C) = (A+B)\cap C = (C + B) \cap C = C$. □

Esercizi.

1.D.1. Se M è un modulo su un anello commutativo unitario R, allora $MR = M$, perché $M = M1_R \subseteq MR \subseteq M$.

1.D.2. Siano R un anello commutativo, M un R-(pre)modulo, $X, Y \subseteq M$ e $S, T \subseteq R$. Provare:

i) $(XS)T = X(ST)$

ii) $(X + Y)S \subseteq XS + YS$ e $X(S + T) \subseteq XS + ST$;

iii) se $0_M \in X \cap Y$, allora $(X+Y)S = XS+YS$; se $0_R \in S \cap T$, allora $X(S+T) = XS+ST$.

Mostrare con un esempio che in (ii) possono non valere le uguaglianze.

1.D.3. Sia M un premodulo sull'anello commutativo R, e sia $X \subseteq M$. Provare:

i) XR è un sottopremodulo di M;

ii) il sottopremodulo di M generato da X è $XR + \langle X\rangle$, dove $\langle X\rangle$ è il sottogruppo generato da X in $(M, +)$.

Si possono comparare questi enunciati, ed anche il lemma 1.6, ad una situazione probabilmente già incontrata nella teoria elementare degli anelli: se x è un elemento di un anello commutativo unitario R, l'ideale generato da x (cioè il sottomodulo di R_R generato da x, ovvero da $\{x\}$) è xR; ma se R non è unitario l'ideale generato da x è $xR + \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

[6] cioè: il sotto(pre)modulo generato da $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$.

1.D.4. Siano M ed N (pre)moduli di uno stesso anello commutativo R, e siano α e β R-omomorfismi da M a N. Mostrare che se M è generato da una sua parte X e α e β hanno la stessa restrizione a X, allora $\alpha = \beta$. (Suggerimento: $\alpha - \beta \colon a \in M \to a^\alpha - b^\beta \in N$ è un R-omomorfismo ed il suo nucleo contiene X. Ovviamente anche altre dimostrazioni sono possibili). Esprimere questo risultato in termini di iniettività di una opportuna 'applicazione restrizione'.

1.D.5. Vale per le altre strutture algebriche, ad esempio per gli anelli (ma anche per gli anelli unitari, per i gruppi non abeliani) un risultato simile a quello dell'esercizio precedente. Dimostrare quanto segue: siano R ed S anelli, e siano α e β omomorfismi di anelli da R a S. Mostrare che se R è generato (come anello) da una sua parte X e α e β hanno la stessa restrizione a X, allora $\alpha = \beta$. La dimostrazione suggerita per l'esercizio precedente va modificata, perché $\alpha - \beta$ non è, in generale, un omomorfismo di anelli. Conviene invece osservare che $\{r \in R \mid r^\alpha = r^\beta\}$ è comunque un sottoanello di R...

1.2.4 Congruenze e quozienti, teoremi di omomorfismo e di corrispondenza

In accordo con le definizioni generali, una congruenza in un (pre)modulo M su un anello commutativo R è una relazione di equivalenza $\sim$ in M che sia compatibile con le operazioni di M: quella di gruppo e le moltiplicazioni per elementi di R (si veda l'osservazione 1.C.2); la richiesta è dunque che $\sim$ sia una congruenza nel gruppo additivo $(M, +)$ di M e, per ogni $a, b \in M$ e $r \in R$, valga $a \sim b \Rightarrow ar \sim br$. Rimarchiamo il fatto che se M è un modulo le congruenze in M come modulo sono precisamente le congruenze in M visto come premodulo e quindi lo stesso vale per i quozienti di M.

Analogamente a quanto accade per i gruppi abeliani, le congruenze nei (pre)moduli sono descritte dai sotto(pre)moduli. Infatti, se $\sim$ è una congruenza nell'R-premodulo M, allora $\sim$ è una congruenza in $(M, +)$ e quindi esiste un sottogruppo H di $(M, +)$ tale che $a \sim b \iff a - b \in H$ per ogni $a, b \in M$ (naturalmente $H = [0_M]_\sim$) e si ha:

Proposizione 1.10. *Con le notazioni appena fissate, $\sim$ è una congruenza nel (pre)modulo M se e solo se $H \leq_R M$.*

Dimostrazione. Sia $\sim$ una congruenza in M. Allora, per ogni $h \in H$ e $r \in R$ abbiamo $h \sim 0_M$ e quindi $hr \sim 0_M r = 0_M$, che vuol dire: $hr \in H$. Dunque $H \leq_R M$. Viceversa, se $H \leq_R M$, per ogni $a, b \in H$ e $r \in R$, abbiamo

$$a \sim b \iff a - b \in H \Longrightarrow ar - br = (a - b)r \in H \iff ar \sim br,$$

dunque $\sim$ è una congruenza, come richiesto. □

Sempre con le stesse notazioni, indicheremo come M/H il (pre)modulo quoziente $M/\sim$. I suoi elementi sono i laterali $a + H = \{a + h \mid h \in H\}$ $(= H + a)$, al variare di a in M; le regole di calcolo in M/H sono: $(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$ e $(a + H)r = ar + H$ per ogni $a, b \in M$ e $r \in R$. L'*epimorfismo canonico* da M a M/H è l'epimorfismo $a \in M \mapsto a + H \in M/H$.

Valgono per i moduli e i premoduli, come per altre strutture algebriche, i teoremi di corrispondenza e di omomorfismo. Le dimostrazioni sono omesse; si ottengono riproducendo quelle già note, ad esempio, per i gruppi (o facendo riferimento a risultati più generali).

Teorema 1.11. *Siano R un anello commutativo e $\varphi \colon A \to B$ un omomorfismo di R-(pre)moduli. Allora:*

(i) $\ker \varphi = \{a \in A \mid a^\varphi = 0_B\} \leq_R A$ *e* $\operatorname{im} \varphi = \{a^\varphi \mid a \in A\} \leq_R B$;

(ii) *l'applicazione* $a + \ker\varphi \in A/\ker\varphi \mapsto a^\varphi \in \operatorname{im}\varphi$ *è ben definita ed è un* R*-isomorfismo.*

Teorema 1.12. *Sia* M *un (pre)modulo sull'anello commutativo* R*, e sia* $N \leq_R M$*. Indicati rispettivamente con* $[M/N]$ *e* $\mathcal{L}(M/N)$ *l'insieme dei sotto(pre)moduli di* M *contenenti* N *e l'insieme dei sotto(pre)moduli del quoziente* M/N*, l'applicazione* $H \in [M/N] \mapsto H/N \in \mathcal{L}(M/N)$ *è biettiva.*

Teorema 1.13. *Sia* M *un (pre)modulo su un anello commutativo* R *e siano* $A, B \leq_R M$*. Allora:*
(i) *l'applicazione* $a + (A \cap B) \in A/(A \cap B) \mapsto a + B \in (A + B)/B$ *è un* R*-isomorfismo;*
(ii) *se* $A \leq B$ *l'applicazione* $x + B \in M/B \mapsto (x + A) + (B/A) \in (M/A)/(B/A)$ *è un* R*-isomorfismo.*

1.2.5 Annullatori; moduli fedeli

Sia M un (pre)modulo sull'anello commutativo R e sia $\zeta\colon R \to \operatorname{End}(M, +)$ l'azione che lo definisce. Il nucleo $\ker\zeta$ di ζ si chiama *annullatore* di M e si denota anche con $\operatorname{Ann}_R(M)$. Si ha ovviamente

$$\operatorname{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid \forall a \in M(ar = 0_M)\},$$

il che suggerisce di estendere la definizione a parti arbitarie di M: per ogni $X \subseteq M$,

$$\operatorname{Ann}_R(X) = \{r \in R \mid \forall a \in X(ar = 0_M)\}.$$

In realtà anche questa seconda definizione si può ricondurre alla prima. Se infatti X è una parte di M, è facile verificare che l'annullatore di X coincide con l'annullatore del sotto(pre)modulo X^* di M generato da X (si veda l'esercizio 1.E.1), cioè col nucleo dell'azione di (pre)modulo di R su X^*. Una conseguenza è che *per ogni* $X \subseteq M$*,* $\operatorname{Ann}_R(X)$ *è un ideale di* R*.*

Come in situazioni analoghe, nel caso in cui $X = \{x\}$ sia un singleton, si scrive spesso $\operatorname{Ann}_R(x)$ per $\operatorname{Ann}_R(X)$.

Un R-(pre)modulo si dice *fedele* se e solo se il suo annullatore è l'ideale nullo $0 = \{0_R\}$ di R, cioè se e solo se l'azione che lo definisce è un monomorfismo di anelli. Sono esempi di moduli fedeli tutti gli spazi vettoriali non nulli e, per ogni anello commutativo unitario R, il modulo R_R.

Va notato, e dovrebbe risultare ovvio, che (pre)moduli isomorfi hanno lo stesso annullatore. Tornerà utile anche questo lemma:

Lemma 1.14. *Sia* R *un anello commutativo e sia* $H \lhd R$*. Sia poi* $\bar{R}$ *l'*R*-premodulo quoziente* R_R/H*. Allora* $H \subseteq \operatorname{Ann}_R(\bar{R})$*. Se* R *è unitario e quindi* $\bar{R}$ *è un* R*-modulo, si ha* $H = \operatorname{Ann}_R(\bar{R})$*.*

Dimostrazione. Ogni elemento $\bar{r}$ di $\bar{R}$ ha la forma $r + H$ per un opportuno $r \in R$. Per ogni $h \in H$ si ha $rh \in H$ e quindi $\bar{r}h = rh + H = H = 0_{\bar{R}}$. Dunque, $H \subseteq \operatorname{Ann}_R(\bar{R})$. Se R è unitario e $a \in \operatorname{Ann}_R(\bar{R})$, allora $(1_R + H)a = H$, ovvero $a + H = H$ e quindi $a \in H$. Dunque, in questo caso, $\operatorname{Ann}_R(\bar{R}) = H$. □

È in uso una notazione alternativa per gli annullatori in quozienti. Se R è un anello commutativo, M un R-premodulo, $N \leq_R M$ e $X \subseteq M$, si indica con $(N : X)$, o $(N : X)_R$, l'insieme degli $r \in R$ tali che $Xr \subseteq N$, cioè $\operatorname{Ann}_R(\bar{X})$ dove $\bar{X} = \{x + N \mid x \in X\} \subseteq M/N$ è l'immagine di X mediante l'epimorfismo canonico $M \twoheadrightarrow M/N$ (scriveremo anche $X + N/N$ o $(X + N)/N$ per $\bar{X}$). Naturalmente $(N : X)_R \lhd R$ e $\operatorname{Ann}_R(X) = (0 : X)_R$. Come per altri annullatori, se $x \in M$ si scrive anche $(N : x)$ per $(N : \{x\})$. Le proprietà elencate nel prossimo lemma sono ovvie, la verifica è lasciata per esercizio:

Lemma 1.15. *Siano* R *un anello commutativo ed* M *un* R*-(pre)modulo. Allora:*
(i) *per ogni* $X, Y \subseteq M$*, se* $X \subseteq Y$ *allora* $\operatorname{Ann}_R(X) \supseteq \operatorname{Ann}_R(Y)$*;*

(ii) *per ogni famiglia* $(X_i)_{i\in I}$ *di parti di* M *si ha* $\mathrm{Ann}_R(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}_R(X_i)$;
(iii) *per ogni famiglia* $(N_i)_{i\in I}$ *di sotto(pre)moduli di* M *ed ogni* $X \subseteq M$*, si ha* $(\bigcap_{i\in I} N_i : X)_R = \bigcap_{i\in I}(N_i : X)_R$.

Esercizi ed esempi.
1.E.1. Provare in dettaglio il fatto che l'annullatore di una qualsiasi parte di un (pre)modulo coincide con l'annullatore del sotto(pre)modulo generato. Può essere utile fare riferimento all'esercizio 1.D.3.
1.E.2. Sia A un gruppo abeliano, che qui consideriamo come $\mathbb{Z}$-modulo. Se a è un elemento periodico di A, di periodo n, allora $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(a) = n\mathbb{Z}$; mentre $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(a)$ è l'ideale nullo di $\mathbb{Z}$ se a è aperiodico. Inoltre, per chi conosce la terminologia: se A ha esponente finito n, allora $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(A) = n\mathbb{Z}$, altrimenti A è uno $\mathbb{Z}$-modulo fedele.
1.E.3. Provare che un anello commutativo unitario R è un campo se e solo se ogni R-modulo non nullo è fedele.

Infine, estendiamo la notazione $(N : X)_R$ sopra definita anche al caso in cui, oltre X, anche N sia un arbitrario sottoinsieme dell'R-(pre)modulo M. Poniamo, anche in questo caso, $(N : X)_R = \{r \in R \mid \forall x \in X(xr \in N)\}$; in questa situazione $(N : X)_R$ non è più interpretabile come annullatore (non è definito il quoziente M/N, quindi neanche $(X + N)/N$) e, importante tenerlo presente, non è più necessariamente un ideale di R.

1.2.6 Cambio degli scalari

Sia, ancora una volta, M un (pre)modulo sull'anello commutativo R. Estendendo la terminologia in uso per gli spazi vettoriali, talvolta ci si riferisce ad R come all'anello degli scalari di M. Spesso si può riguardare M anche come (pre)modulo su un anello diverso da R; è a questa situazione che si riferisce il titolo.

Sia $\zeta\colon R \to \mathrm{End}(M, +)$ l'azione di (pre)modulo che definisce M. Se S è un anello commutativo e $\lambda\colon S \to R$ è un omomorfismo di anelli, allora $\lambda\zeta\colon S \to \mathrm{End}(M, +)$ è un'azione di premodulo, che definisce dunque una struttura di S-premodulo su M. Inoltre, se M è non solo un premodulo ma un modulo (vale a dire: ζ è un omomorfismo di anelli unitari), S è un anello unitario e anche λ un omomorfismo di anelli unitari (ovvero: $(1_S)^\lambda = 1_R$), allora $\lambda\zeta$ è un'azione di modulo che definisce M come S-modulo. Si dice che l'S-(pre)modulo così ottenuto è quello definito dall'R-(pre)modulo M via λ.

In circostanze in cui vengano considerate simultaneamente diverse strutture di (pre)modulo su diversi anelli ma sullo stesso gruppo abeliano $(M, +)$, si usa differenziare i (pre)moduli indicando l'anello degli scalari a pedice.[7] Ad esempio, nella situazione descritta sopra potremmo scrivere M_R per indicare il (pre)modulo M originario (quello definito da ζ) e M_S per quello definito da $\lambda\zeta$.

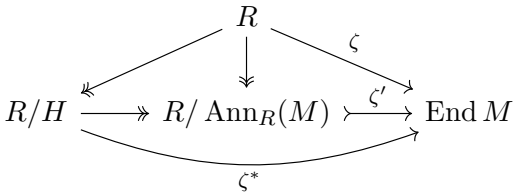
In termini espliciti, il prodotto esterno nel modulo M_S qui descritto è, come si verifica facilmente, quello dato da $as = as^\lambda$ per ogni $a \in M$ e $s \in S$, dove il prodotto a secondo membro è calcolato in M_R.

Un caso piuttosto frequente di cambio degli scalari via un omomorfismo λ, come appena discusso, è quello in cui S sia un sottoanello di R e λ sia l'immersione di S in R. In questo caso, per ogni $a \in M$ e $s \in S$, il prodotto as considerato in M_S coincide col prodotto omologo considerato in M_R; per dirla in modo più sintetico l'operazione esterna $M \times S \to M$ di M_S è

[7] Va da sé che anche questo artificio non risolve le ambiguità se appaiono nel discorso più azioni di (pre)modulo con lo stesso dominio.

semplicemente la restrizione a $M \times S$ dell'operazione esterna $M \times R \to M$ di M_R. Naturalmente l'immersione di S in R è un omomorfismo di anelli unitari se e solo se S è un sottoanello unitario di R; in questo caso certamente M_S sarà un S-modulo se M_R è un R-modulo.

Un altro utilissimo caso di cambio degli scalari si ottiene coinvolgendo l'annullatore del modulo considerato. Assumiamo che H sia un ideale di R contenuto in $\operatorname{Ann}_R(M)$. Allora ζ, per il primo teorema di omomorfismo (per anelli), induce un omomorfismo (iniettivo) di anelli $\zeta' \colon R/\operatorname{Ann}_R(M) \to \operatorname{End} M$ e questo si può comporre con l'epimorfismo naturale $r + H \in R/H \mapsto r + \operatorname{Ann}_R(M) \in R/\operatorname{Ann}_R(M)$ per ottenere un omomorfismo $\zeta^* \colon R/H \to \operatorname{End} M$; questo diagramma è così commutativo (gli omomorfismi non specificati sono epimorfismi canonici):



Abbiamo così che M si può riguardare come premodulo su R/H con azione ζ^*. Inoltre, se R è unitario, $(1_{R/H})^{\zeta^*} = (1_R)^{\zeta}$, dunque ζ^* è un omomorfismo di anelli unitari se (e solo se) ζ lo è. Quindi, se ζ è un'azione di modulo su M, allora ζ^* definisce una struttura di R/H-modulo su M. In entrambi i casi chiameremo ζ^* l'azione indotta da ζ modulo H (o mod H, per evitare confusione).

L'operazione esterna del (pre)modulo $M_{R/H}$ così ottenuto è descritta in modo estremamente semplice da quella del (pre)modulo M_R da cui eravamo partiti: per ogni $r \in R$ e $a \in M$, si ha $a(r + H) = ar$. Una proprietà molto utile (ed altrettanto facile da verificare; si veda l'esercizio 1.F.1) è questa:

Lemma 1.16. *Nelle notazioni del paragrafo precedente, i sotto(pre)moduli di $M_{R/H}$ sono tutti e soli i sotto(pre)moduli di M_R.*

È chiaro che, continuando con le stesse notazioni, $\operatorname{Ann}_{R/H}(M_{R/H}) = \operatorname{Ann}_R(M_R)/H$. Scegliendo dunque, come è certamente lecito, per H proprio l'ideale $\operatorname{Ann}_R(M)$, il (pre)modulo $M_{R/H}$ ottenuto è un (pre)modulo fedele. Una conclusione è che *per ogni (pre)modulo M esiste un (pre)modulo fedele ottenuto da M per cambio degli scalari che ha esattamente gli stessi sotto(pre)moduli di M* (si veda anche, a questo proposito l'osservazione 1.F.2).

Esempi, osservazioni, esercizi.

1.F.1. Supponiamo che ζ e η siano due azioni di (pre)modulo sullo stesso gruppo abeliano M, che definiscano così due strutture di (pre)modulo su di esso, chiamiamole M_ζ e M_η. Assumiamo $\operatorname{im}\zeta = \operatorname{im}\eta$. Allora, se N è una parte di M, si ha che N è un sotto(pre)modulo di M_ζ se e solo se è un sotto(pre)modulo di M_η; dimostrarlo.

Detto in termini più informali: che un sottogruppo sia o meno un sotto(pre)modulo dipende esclusivamente dall'immagine dell'azione di (pre)modulo. Come applicazione questo risultato, si verifichi il lemma 1.16.

1.F.2. Se $\zeta \colon R \to \operatorname{End} M$ è un'azione di (pre)modulo, che definisce il modulo M_R, posto $S = \operatorname{im}\zeta$ è evidente che S è un anello commutativo (unitario se ζ è unitario) e l'immersione di S in $\operatorname{End} M$ è un'azione di S-(pre)modulo *fedele* su M. In un certo senso questa costruzione inverte la prima delle costruzioni di cambio degli scalari qui presentate; infatti, come si verifica facilmente, M_R è il (pre)modulo definito dall'S-(pre)modulo M_S via la ridotta di ζ a S (cioè l'applicazione $r \in R \mapsto r^\zeta \in S$). L'esercizio precedente mostra anche che M_R e M_S hanno gli stessi sotto(pre)moduli; questo fornisce un'altra giustificazione di un'affermazione fatta nel testo.

1.F.3. Se $\lambda\colon S \to R$ è un omomorfismo di anelli (commutativi) e M_R è un R-(pre)modulo con azione $\zeta\colon R \to \operatorname{End} M$, e se M_S è il (pre)modulo definito da M_R via λ, allora ogni sotto(pre)modulo di M_R è un sotto(pre)modulo di M_S, ma in generale non vale il viceversa. Ad esempio, consideriamo in caso in cui $R = \mathbb{Q}$, $M_R = \mathbb{Q}_\mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Z}$ e $\lambda\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è l'immersione. Allora M_R è uno spazio vettoriale di dimensione 1, quindi un modulo semplice ed ha solo due sottomoduli (quelli banali), invece M_S ha come sottomoduli tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Q}, +)$, che sono in numero infinito.

1.F.4. Sia, di nuovo, $\lambda\colon S \to R$ un omomorfismo di anelli (commutativi). Allora R si può riguardare come S-(pre)modulo per cambio di scalari via λ a partire da R_R (cioè da R visto come (pre)modulo su sé stesso). In questo caso il prodotto esterno risulta descritto da $rs = rs^\lambda$ per ogni $r \in R$ e $s \in S$; l'operazione sottintesa al secondo membro è la moltiplicazione interna di R.

Incontreremo di nuovo questa descrizione nella sezione 1.3: λ verrà chiamato in quel contesto omomorfismo di struttura di una prealgebra.

1.F.5. Un esempio importante di cambio degli scalari: siano p un numero primo (positivo) e $(A, +)$ un p-gruppo abeliano elementare (cioè un gruppo abeliano tale che $pa = 0_A$ per ogni $a \in A$). Allora possiamo riguardare A come $\mathbb{Z}$-modulo e abbiamo $\operatorname{Ann}_\mathbb{Z}(A) = p\mathbb{Z}$ se $|A| > 1$; $\operatorname{Ann}_\mathbb{Z}(A) = \mathbb{Z}$ se $|A| = 1$. Possiamo allora effettuare un cambio di scalari e riguardare A come modulo sul campo $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cioè come $\mathbb{Z}_p$-spazio vettoriale.

1.F.6. Se M_R è un modulo su un anello commutativo unitario R e S è un sottoanello non unitario di R, l'S-premodulo definito da M_R via l'immersione di S in R non è sempre un modulo; ma in certi casi lo è. Vediamo un esempio: se X è un insieme, $R = \mathcal{P}(X)$ è l'anello delle parti di X, $Y \subset X$ e $S = \mathcal{P}(Y)$, allora S è un ideale proprio di R, vale a dire $S <_R R_R$, quindi S è un R-modulo. Come anello, S è unitario, ma S non è un sottoanello unitario di R. Ora, l'S-premodulo definito da S visto come R-modulo, non è altro che S_S, quindi è un S-modulo.

1.2.7 Premoduli finitamente generati

Una nozione molto importante è quella di (pre)modulo *finitamente generato*, cioè generato da una sua parte finita. Enunciamo qui per il caso dei (pre)moduli un lemma molto elementare che di fatto vale per ogni genere di struttura algebrica.

Lemma 1.17. *Sia M un (pre)modulo su un anello commutativo R, e sia $\mathcal{C}$ una catena non vuota di sotto(pre)moduli di M. Allora*

(i) *$V := \bigcup \mathcal{C}$ è un sotto(pre)modulo di M;*
(ii) *se V è finitamente generato, $V = \max \mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Per ogni $a \in V$, fissiamo un $C_a \in \mathcal{C}$ tale che $a \in C_a$. Se X è un sottoinsieme finito non vuoto di V, poiché $\mathcal{C}$ è una catena $C(X) := \bigcup\{C_a \mid a \in X\} \in \mathcal{C}$, quindi $C(X) \leq_R M$. Da ciò segue subito che V è un sotto(pre)modulo di M, infatti $V \neq \varnothing$ e per ogni $a, b \in V$ e $r \in R$ si ha $a - b, ar \in C(\{a, b\}) \subseteq V$. Se poi V è generato da un insieme finito X, da $X \subseteq C(X) \subseteq V$ segue $V = C(X) \in \mathcal{C}$. □

Come conseguenza del lemma precedente, verifichiamo una delle proprietà più importanti dei premoduli finitamente generati, quella di avere, se non nulli, sottopremoduli massimali. Per definizione, un sotto(pre)modulo massimale di un (pre)modulo M è un elemento massimale

nell'insieme dei sotto(pre)moduli *propri* di M (ordinato per inclusione);[8] in questo caso scriviamo $H \lessdot_R M$. Ad esempio, i sottopremoduli massimali di R_R sono gli ideali massimali di R—la nozione di ideale massimale dovrebbe essere già nota dai corsi elementari di algebra.

Corollario 1.18. *Sia M un (pre)modulo finitamente generato e non nullo su un anello commutativo R. Allora M ha almeno un sotto(pre)modulo massimale.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ una catena non vuota di sotto(pre)moduli propri, e sia V la sua unione. Abbiamo $V \leq_R M$, per il lemma 1.17. Se fosse $V = M$, allora V sarebbe finitamente generato e quindi, per lo stesso lemma, $M = V$ apparterrebbe a $\mathcal{C}$, una contraddizione. Quindi $V <_R M$. Abbiamo mostrato che l'unione di ogni catena di sotto(pre)moduli propri di M è essa stessa un sotto(pre)modulo proprio. Pertanto l'insieme dei sotto(pre)moduli propri di M, ordinato per inclusione, è induttivo e quindi, per il lemma di Zorn, ha un elemento massimale, cioè un sotto(pre)modulo massimale di M. □

Corollario 1.19. *Sia M un (pre)modulo finitamente generato su un anello commutativo R, e sia $N <_R M$. Allora M ha almeno un sotto(pre)modulo massimale contenente N.*

Dimostrazione. Per il corollario precedente, M/N ha un sotto(pre)modulo massimale $\bar{L}$ (si sta qui usando il semplice esercizio 1.G.1). Segue dal teorema di corrispondenza (teorema 1.12) che $\bar{L} = L/N$ per un $L \leq_R M$ tale che $N \subseteq L$ e $L \lessdot_R M$. □

Per questi due corollari è fondamentale l'ipotesi che il (pre)modulo M sia finitamente generato. Ad esempio, il gruppo additivo dei numeri razionali non ha sottogruppi massimali.

Chiudiamo con una curiosa conseguenza del lemma 1.17, che sarà utile più avanti.

Corollario 1.20. *Sia M un (pre)modulo; allora l'insieme dei sotto(pre)moduli di M non finitamente generati, ordinato per inclusione, è induttivo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ una catena non vuota costituita da sotto(pre)moduli non finitamente generati di M e sia $V = \bigcup \mathcal{C}$. Se V fosse finitamente generato si avrebbe $V \in \mathcal{C}$, per il lemma 1.17 e contro la scelta di $\mathcal{C}$; quindi V non è finitamente generato. Ciò prova l'asserto. □

Esercizi.

1.G.1. Verificare che ogni quoziente di un (pre)modulo finitamente generato è finitamente generato.

1.G.2. In un insieme ordinato $(S, \leq)$ un elemento x si dice compatto se e solo se, scelta comunque una parte X di S tale che $x \leq \sup X$, esiste un sottoinsieme finito F di X tale che $x \leq \sup F$. Verificare che nell'insieme dei sottopremoduli di un premodulo, ordinato per inclusione, i compatti sono precisamente i sottopremoduli finitamente generati.

1.G.3. Così come il lemma 1.17, anche il corollario 1.18 si estende a tantissimi altri tipi di strutture algebriche (ad esempio: ogni gruppo non identico che sia finitamente generato ha sottogruppi massimali). Nel caso che abbiamo considerato, quello dei (pre)moduli, il corollario 1.18 è una delle diverse forme di un risultato di grande rilevanza in algebra commutativa, noto come lemma di Nakayama, sul quale torneremo più avanti.

[8] nella terminologia a cui si fa cenno nella sottosezione 2.2.1, i sotto(pre)moduli massimali di M sono i coatomi nel reticolo dei sotto(pre)moduli di M.

1.G.4. Una caso particolare del corollario 1.18, almeno per anelli commutativi, è il teorema dell'ideale massimale di Krull, noto dai corsi di Algebra. Infatti se R è un anello commutativo unitario non nullo, il modulo R_R è finitamente generato (è generato da $\{1_R\}$) e quindi ha sottomoduli (ideali) massimali.

Il corollario 1.18 ed il teorema dell'ideale massimale di Krull dipendono dall'assioma di scelta, esplicitamente usato nella dimostrazione. In effetti è stato dimostrato (nel 1979, da Wilfrid Hodges) che nella teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, il teorema di Krull implica l'assioma di scelta; più precisamente, l'assioma di scelta equivale all'affermazione che ogni anello fattoriale abbia ideali massimali.

1.G.5. I due corollari 1.18 e 1.19 sono ovviamente equivalenti a priori (da 1.19 si deduce 1.18 ponendo $N = 0$) e sono stati enunciati entrambi solo per chiarezza. Un ulteriore versione dello stesso risultato si ottiene sostituendo, nel corollario 1.19 l'ipotesi che M sia finitamente generato con l'ipotesi che M sia generato da $N \cup X$ per un sua opportuna parte finita X; verificarlo.

Come esercizio, si può modificare la dimostrazione del corollario 1.18 per ottenere direttamente da essa il corollario 1.19.

1.2.8 Moduli ciclici e premoduli semplici

Per definizione, un (pre)modulo M è *ciclico* se e solo se è generato da un singleton, cioè se e solo se esiste $a \in M$ tale che M sia il sotto(pre)modulo di sé stesso generato da a. Se M è un modulo, questo significa (come segue dal lemma 1.6 e dalle considerazioni che lo precedono) che $M = aR = \{ar \mid r \in R\}$.

Dunque, gli $\mathbb{Z}$-moduli ciclici sono niente altro che i gruppi ciclici, se R è un campo gli R-spazi vettoriali ciclici sono quelli di dimensione 0 o 1, per ogni anello commutativo unitario R il modulo R_R è ciclico (generato da 1_R). È anche chiaro che tutti i quozienti di (pre)moduli ciclici sono a loro volta ciclici.

I moduli ciclici sono molto facili da caratterizzare, in modo strettamente analogo a quanto accade per i gruppi ciclici (si veda anche la proposizione 4.20). Per ottenere una versione più generale di questo risultato ci è utile premettere un'osservazione elementare. Ovviamente il caso che principalmente ci interessa è quello in cui il semigruppo dell'enunciato è il semigruppo moltiplicativo di un anello commutativo. In questo caso la conclusione del lemma è che l'anello in questione è unitario se consiste dei multipli di un suo elemento.

Lemma 1.21. *Sia $(S, \cdot)$ un semigruppo commutativo e sia $a \in S$. Allora $S = aS$ se e solo se S è un monoide e $a \in \mathcal{U}(S)$.*

Dimostrazione. Sia $S = aS$. Allora $a \in aS$, dunque esiste $e \in S$ tale che $a = ae$. Inoltre, per ogni $s \in S$ esiste $t \in S$ tale che $s = at$, quindi $s = at = (ae)t = (at)e = se$. Dunque, e è l'unità in S, quindi S è un monoide. Essendo $e = 1_S \in aS$, segue anche che a è invertibile. Così è provata una implicazione; l'altra è ovvia. □

Proposizione 1.22. *Siano R un anello commutativo ed M un R-premodulo. Sono equivalenti:*
(i) *esiste $a \in M$ tale che $M = aR$;*
(ii) *esiste $H \lhd R$ tale che $M \simeq_R R_R/H$ ed R/H sia un anello unitario.*
Se vale (ii), allora $H = \mathrm{Ann}_R(M)$.

In particolare, se R è unitario ed M è un R-modulo, allora M è ciclico se e solo se esiste $H \lhd R$ tale che $M \simeq_R R_R/H$, ed in questo caso $H = \mathrm{Ann}_R(M)$.

Dimostrazione. Valga la (i). Allora l'applicazione $\varphi\colon r \in R \mapsto ar \in M$ è suriettiva. È molto semplice verificare che φ è un R-omomorfismo, quindi, posto $H = \ker\varphi$, abbiamo $M = \operatorname{im}\varphi \simeq R_R/H$. Da questo isomorfismo segue anche che esiste $b \in R/H$ tale che $R_R/H = bR$, e da ciò segue che nell'anello R/H ogni elemento è multiplo di b. Il lemma 1.21 mostra allora che R/H è unitario, dunque vale (ii); inoltre, evidentemente, $H = \ker\varphi = \operatorname{Ann}_R(a) = \operatorname{Ann}_R(M)$, il che giustifica l'affermazione che la segue. Viceversa, se vale (ii) e $\theta\colon R_R/H \to M$ è un R-isomorfismo, posto $a = (1_{R/H})^\theta$ si ha allora $M = aR$, quindi vale (i).

Nel caso in cui (R sia unitario e) M sia un R-modulo, allora (i) significa precisamente che M è ciclico, mentre la condizione che R/H sia, in (ii), unitario è automaticamente verificata, il che rende ovvia la conclusione. □

Corollario 1.23. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora, a meno di isomorfismi, R_R è l'unico R-modulo ciclico fedele.*

La descrizione dei premoduli ciclici non è altrettanto immediata; a questo proposito si veda il corollario 1.35.

Un (pre)modulo M si dice poi *semplice* (o *irriducibile*) se e solo se non è nullo (cioè è diverso dal suo *sotto(pre)modulo nullo* 0) e non ha sotto(pre)moduli non banali. È ovvio che ogni (pre)modulo semplice M è ciclico: per ogni $a \in M \smallsetminus 0$, se N è il sotto(pre)modulo di M generato da a si ha $0 < N \leq M$, quindi, essendo M semplice, $M = N$.

Introduciamo una notazione: $H \lhd\cdot R$ significa che H è un ideale massimale (cioè massimale tra gli ideali propri) dell'anello R, vale a dire: $H \lessdot R_R$.

Proposizione 1.24. *Sia R un anello commutativo e sia M un R-(pre)modulo. Allora M è semplice se e solo se vale una delle due:*
(i) *$MR = 0$ e M ha ordine primo;*
(ii) *$MR \neq 0$ ed esiste $H \lhd\cdot R$ tale che $M \simeq_R R_R/H$.*
Se si verifica (ii), allora $H = \operatorname{Ann}_R(M)$ e R/H è un campo. Se M è un modulo il caso (i) non si può verificare.

Dimostrazione. Sia $H \lhd R$; allora i sotto(pre)moduli di R_R/H sono tutti e soli i quozienti I/H al variare di I tra gli ideali di R contenenti H. Dunque, R_R/H è un R-(pre)modulo semplice se e solo se $H \lhd\cdot R$.

Se vale la (i), allora M non ha sottogruppi non banali, quindi è certamente semplice anche come R-(pre)modulo. Se vale la (ii), allora M è semplice per l'osservazione al paragrafo precedente.

Viceversa, supponiamo M semplice. Sia $N = \{a \in M \mid aR = 0\}$. Si verifica facilmente che $N \leq_R M$, dunque o $N = M$ oppure $N = 0$. Nel primo caso $MR = 0$. Se questo accade, ogni sottogruppo di M è un R-sotto(pre)modulo, quindi il fatto che M sia semplice si traduce nel fatto che M non ha sottogruppi non banali, dunque $|M|$ è primo e vale la (i). Nel secondo caso, scelto comunque $a \in M \smallsetminus 0$, poiché $aR \leq_R M$ (vedi esercizio 1.D.3) ed M è semplice, si ha $aR = M$. Allora la proposizione 1.22 fornisce $M \simeq_R R_R/H$ per qualche $H \lhd R$. Per quanto osservato all'inizio di questa dimostrazione, $H \lhd\cdot R$; vale dunque (ii). Inoltre la stessa proposizione mostra che H è necessariamente $\operatorname{Ann}_R(M)$. Da $N = 0$ segue poi che, per ogni $b \in R/H \smallsetminus \{0_{R/H}\}$, si ha $R_R/H = bR$, ovvero $R/H = b(R/H)$, dunque il lemma 1.21 mostra che R/H è un campo.

Infine, se (R è unitario e) M è un modulo si ha $MR = M \neq 0$ (osservazione 1.D.1), quindi non è possibile che si verifichi la (i). □

Esercizi.
1.H.1. Descrivere gli R-moduli semplici nel caso in cui R sia un campo e nel caso in cui $R = \mathbb{Z}$. Se R è un anello commutativo unitario, quando è che R_R è semplice?
1.H.2. Dimostrare che se R è un anello a prodotto costante nullo (cioè $RR = 0$) ed M è un R-premodulo semplice, allora $MR = 0$.
1.H.3. Provare questa variante del lemma 1.21: se a ed e sono elementi di un semigruppo commutativo S tali che $ae = a$, se a è cancellabile in S allora S è un monoide ed e ne è l'elemento neutro. Suggerimento: per ogni $x \in S$ si ha $aex = ax$.

1.3 Algebre e prealgebre

Ancora più che per altre strutture qui descritte, esistono in letteratura molte, e molto diverse, versioni della nozione di algebra su un anello. Informalmente, una (pre)algebra (commutativa associativa; d'ora in avanti questo sarà sottinteso) su un anello commutativo R è un anello commutativo $(A, +, \cdot)$ che sia anche munito di una struttura di R-(pre)modulo, tale che l'addizione $+$ dell'anello A funga anche da operazione interna di addizione del (pre)modulo e la moltiplicazione esterna di (pre)modulo $\bullet\colon A \times R \to A$ sia in un certo senso compatibile con la moltiplicazione interna di A. Per precisare meglio la definizione, in forma sintetica, conviene discutere brevemente gli endomorfismi di un anello commutativo visto come modulo su sé stesso.

End A_A Sia A un anello commutativo. Come è facile verificare (si veda, più generalmente, l'esercizio 1.I.1), l'insieme $\operatorname{End} A_A$ degli endomorfismi di A_A visto come premodulo su sé stesso, costituisce un sottoanello unitario dell'anello degli endomorfismi $\operatorname{End}(A, +)$ del gruppo additivo di A.

Per ogni $a \in A$, indichiamo con τ_a la traslazione moltiplicativa definita da a in A, cioè l'applicazione $x \in A \mapsto xa \in A$. Abbiamo già osservato, presentando l'esempio di questo tipo di (pre)moduli, che l'applicazione $a \in A \mapsto \tau_a \in \operatorname{End}(A, +)$ è l'azione di (pre)modulo che definisce A_A, ma è anche immediato verificare che $\tau_a \in \operatorname{End} A_A$ per ogni $a \in A$. Abbiamo così un omomorfismo di anelli

$$\tau\colon a \in A \longmapsto \tau_a \in \operatorname{End} A_A;$$

vediamo che questo risulta un isomorfismo se (ed ovviamente solo se) A è unitario:

Proposizione 1.25. *Sia A un anello commutativo unitario. Allora l'omomorfismo τ appena descritto è un isomorfismo di anelli. Il suo inverso è $\tau^{-1}\colon \varepsilon \in \operatorname{End} A_A \mapsto (1_A)^\varepsilon \in A$.*

Dimostrazione. Sia σ l'applicazione $\varepsilon \in \operatorname{End} A_A \mapsto (1_A)^\varepsilon \in A$ che appare nell'enunciato. Per ogni $\varepsilon \in \operatorname{End} A_A$ si ha $\varepsilon^{\sigma\tau} = (1_A^\varepsilon)^\tau\colon x \in A \mapsto x1_A^\varepsilon \in A$. Ovviamente, per ogni $x \in A$ e $\varepsilon \in \operatorname{End} A_A$ otteniamo $x1_A^\varepsilon = 1_A^\varepsilon x = (1_A x)^\varepsilon = x^\varepsilon$, quindi $\varepsilon^{\sigma\tau} = \varepsilon$. Pertanto $\sigma\tau = \mathrm{id}_{\operatorname{End} A_A}$.

Viceversa, per ogni $a \in A$, abbiamo $a^{\tau\sigma} = (1_A)^{a^\tau} = 1_A a = a$; da ciò $\tau\sigma = \mathrm{id}_A$ e così σ è inverso di τ. □

Fatta questa premessa, definiamo, per arbitrari anelli commutativi R e A, come *azione di R-prealgebra* su A un qualsiasi omomorfismo di anelli $\zeta\colon R \to \operatorname{End} A_A$. Se ($R$ è unitario e) ζ è un omomorfismo di anelli unitari, allora diciamo che ζ è un'azione di R-algebra. Chiamiamo poi R-prealgebra (risp. R-algebra) una coppia (A, ζ) dove ζ è un'azione di R-prealgebra (risp. R-algebra) sull'anello commutativo A. Ovviamente esistono R-algebre solo nel caso in cui R sia unitario. Spesso, se il contesto lo permette, capita di riferirsi ad R-(pre)algebre (A, ζ) menzionando solo l'anello A e omettendo il riferimento esplicito all'azione ζ, che viene sottintesa. È di uso

frequente, per quanto a rischio di confusione, l'espressione "A è una (pre)algebra su R" per indicare che A è una R-(pre)algebra, facendo quindi riferimento ad un'azione di (pre)algebra su A (e non su R). Si dice, infine, che una (pre)algebra (A, ζ) è unitaria quando l'anello A è unitario.

Se (A, ζ) è una R-prealgebra (risp. una R-algebra) e $\iota\colon \operatorname{End} A_A \hookrightarrow \operatorname{End}(A, +)$ è l'immersione (chiariamo che $(A, +)$ è il gruppo additivo dell'anello A), allora $\zeta\iota\colon R \to \operatorname{End}(A, +)$ è un'azione di premodulo (risp. di modulo) che munisce dunque A di una struttura di R-premodulo (risp. di R-modulo). L'operazione esterna $\bullet\colon A \times R \to A$ di questa struttura di (pre)modulo verifica la condizione di linearità:

$$\forall a, b \in A \quad \forall r \in R \quad \big((ab) \bullet r = (a \bullet r) b \big)^{9} \tag{$\mathcal{A}$}$$

dovuta al fatto che $r^{\zeta}\colon a \in A \mapsto a \bullet r \in A$ è, per ogni $r \in R$, un endomomorfismo dell'A-premodulo A_A. Dal momento che A è commutativo, questa condizione può essere riscritta, in modo equivalente, nella forma

$$\forall a, b \in A \quad \forall r \in R \quad \big((ab) \bullet r = a(b \bullet r) \big). \tag{$\mathcal{A}'$}$$

Vale anche il viceversa: se R ed A sono anelli commutativi ed il gruppo additivo di A ha una struttura di premodulo (rispettivamente di modulo), con operazione esterna $\bullet\colon A \times R \to A$ che verifica ($\mathcal{A}$) (o equivalentemente ($\mathcal{A}'$)), allora, per ogni $r \in R$, l'applicazione $\bar{r}\colon a \in A \mapsto a \bullet r \in A$ è un endomomorfismo di A_A e $r \in R \mapsto \bar{r} \in \operatorname{End} A_A$ è un'azione di prealgebra (rispettivamente di algebra), che a sua volta definisce $\bullet$ come operazione esterna. Vediamo così che la biezione stabilita nella proposizione 1.3 a proposito dei (pre)moduli ne induce una analoga tra operazioni esterne e azioni per le (pre)algebre e permette così di descrivere in modo equivalente le (pre)algebre oltre che in termini di azioni in termini dell'operazione esterna. In modo esplicito, abbiamo:

Proposizione 1.26. *Siano R ed A anelli commutativi. Allora l'applicazione che ad ogni azione di R-prealgebra ζ su A associa $\bullet\colon (a, r) \in A \times R \longmapsto a^{r^{\zeta}} \in A$ è una biezione dall'insieme di tutte le azioni di R-prealgebra su A all'insieme delle operazioni esterne $A \times R \to A$ per le quali siano verificate le condizioni in $(\mathcal{M}_{1,2,3})$ della sezione 1.2 e la ($\mathcal{A}$).*

Inoltre, se R è anche unitario, la stessa applicazione induce una biezione dall'insieme di tutte le azioni di R-algebra ζ su A all'insieme delle operazioni esterne $A \times R \to A$ per le quali siano verificate le condizioni in $(\mathcal{M}_{1,2,3,4})$ e la ($\mathcal{A}$).[10]

Un'osservazione del tutto ovvia, ma da tener presente, è che se (A, ζ) è una R-prealgebra, $\ker \zeta$ non è altro che l'annullatore in R di A riguardato come R-premodulo.

Siano ancora R ed A anelli commutativi, e sia $\xi\colon R \to A$ un omomorfismo di anelli. Componendo ξ con l'omomorfismo $\tau\colon a \in A \mapsto \tau_a \in \operatorname{End} A_A$ introdotto nel paragrafo precedente la proposizione 1.25, otteniamo un'azione di prealgebra $\xi\tau\colon R \to \operatorname{End} A_A$ che struttura A come R-prealgebra. Si dice che ξ è un *omomorfismo di struttura* di questa prealgebra. Come è chiaro, nel caso in cui ξ sia un omomorfismo di anelli unitari, questa prealgebra è un'algebra, ovviamente unitaria. Per ogni $r \in R$ si ha $r^{\xi\tau}\colon a \in A \mapsto a r^{\xi} \in A$, quindi l'operazione esterna $\bullet$ della prealgebra $(A, \xi\tau)$ è descritta da:

$$\forall a \in A \quad \forall r \in R \quad (a \bullet r = a r^{\xi}).$$

Non tutte le prealgebre hanno un omomorfismo di struttura, ed alcune ne hanno più di uno (cfr. esempio 1.I.6 e esercizio 1.I.7), ma le prealgebre unitarie ne hanno sempre esattamente uno. Si ha infatti:

[9] per maggior chiarezza: qui è sottinteso il simbolo $\cdot$ della moltiplicazione interna di A. Anche il simbolo $\bullet$ viene spesso omesso, lo utilizzeremo esplicitamente solo quando ragioni di chiarezza espositiva consigliano di farlo.

[10] è appena il caso di specificare che le condizioni in $(\mathcal{M})$ vanno, ai fini di questo enunciato, lette con riferimento ad A in luogo di M e che la condizione ($\mathcal{A}$) può essere rimpiazzata da ($\mathcal{A}'$).

Proposizione 1.27. *Siano R ed A anelli commutativi. Assumiamo A unitario e sia $\tau\colon A \to \operatorname{End} A_A$ l'isomorfismo che appare nella proposizione 1.25. Allora l'assegnazione $\xi \mapsto \xi\tau$ definisce un'applicazione biettiva dall'insieme degli omomorfismi di anelli (rispettivamente di anelli unitari) da R ad A a quello delle azioni di R-prealgebra (rispettivamente R-algebra) su A.*

Di conseguenza, per ogni omomorfismo $\zeta\colon R \to \operatorname{End} A_A$ di anelli (rispettivamente di anelli unitari), la R-prealgebra (rispettivamente R-algebra) (A, ζ) ha $\zeta\tau^{-1}$ come (unico) omomorfismo di struttura. Questo è l'applicazione $r \in R \mapsto 1_A \bullet r \in A$, dove $\bullet$ è l'operazione esterna di (A, ζ).

Dimostrazione. La proposizione è ovvia: essendo τ biettiva, anche l'applicazione $\xi \mapsto \xi\tau$ nell'enunciato è biettiva, con inversa descritta dall'assegnazione $\zeta \mapsto \zeta\tau^{-1}$. Infine, se $\bullet$ è l'operazione esterna della R-prealgebra (A, ζ) e $\xi = \zeta\tau^{-1}$, per ogni $r \in R$ abbiamo $1_A \bullet r = (1_A)^{r^\zeta} = (1_A)^{r^{\xi\tau}} = 1_A r^\xi = r^\xi$. □

La proposizione precedente mostra che se l'anello commutativo A è unitario è del tutto equivalente descrivere le strutture di (pre)algebra su A specificando l'azione di (pre)algebra o l'omomorfismo di struttura (in ulteriore alternativa all'operazione esterna, suggerita dalla proposizione 1.26). Osserviamo anche che, sempre nel caso delle prealgebre unitarie, l'omomorfismo di struttura ha lo stesso nucleo dell'azione di algebra (ottenendosi l'uno dall'altra per composizione con un isomorfismo) e l'operazione esterna (di premodulo) è completamente determinata dalla moltiplicazione interna (di anello) e dai prodotti (esterni) dell'unità di A per gli scalari in R. Questo segue dalla proposizione 1.25 ma si può anche verificare direttamente osservando che se A è una prealgebra unitaria sull'anello commutativo R, per ogni $a \in A$ e $r \in R$ si ha $a \bullet r = (a1_A) \bullet r = a(1_A \bullet r)$.

Vediamo alcuni esempi di algebre e prealgebre.

— Così come ogni gruppo abeliano si può riguardare (equivalentemente) come modulo su $\mathbb{Z}$, ogni anello commutativo $(R, +, \cdot)$ si può riguardare come $\mathbb{Z}$-algebra, utilizzando l'unica possibile struttura di $\mathbb{Z}$-modulo su $(R, +)$. Quest'algebra non ha omomorfismi di struttura se R non è unitario (esercizio 1.I.7).

— Se R è un anello commutativo, R stesso e più in generale ogni quoziente R/H di R è una R-prealgebra con omomorfismo di struttura id_R o l'epimorfismo canonico $R \twoheadrightarrow R/H$ nel secondo caso; la struttura di premodulo considerata è qui quella di R_R/H. Se, inoltre, R è unitario, tutte queste prealgebre sono R-algebre unitarie.

— Se R è un sottoanello di un anello commutativo A, allora A è una R-prealgebra con l'immersione $R \hookrightarrow A$ come omomorfismo di struttura; l'operazione esterna è la restrizione ad $A \times R$ della moltiplicazione interna di A. Nel caso in cui A sia unitario ed R ne sia un sottoanello unitario, A risulta una R-algebra.

— L'anello delle parti di un insieme S è un'algebra unitaria sul campo $\mathbb{Z}_2$; l'omomorfismo di struttura è l'unico omomorfismo $\mathbb{Z}_2 \to \mathcal{P}(S)$ di anelli unitari; l'azione di modulo è, necessariamente, quelle che alla classe $[0]_2$ associa l'endomorfismo nullo di $(\mathcal{P}(S), \triangle)$ e alla classe $[1]_2$ associa l'automorfismo identico (dunque, per ogni $X \in \mathcal{P}(S)$, $X[0]_2 = \varnothing$ e $X[1]_2 = X$).

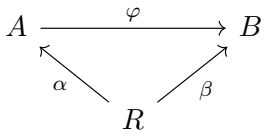
— Ogni (pre)modulo M si può riguardare come (pre)algebra sul suo anello R degli scalari definendo su M, come operazione interna di moltiplicazione, l'applicazione $M \times M \to M$ costante 0_M; dunque $ab = 0_M$ per ogni $a, b \in M$. La verifica del fatto che in questo modo M diventi effettivamente una R-prealgebra (non unitaria, a meno che $M = 0$) è un semplicissimo esercizio. Quasi mai (cfr. esempio 1.I.6) questa prealgebra ha un omomorfismo di struttura.

Vengono definite nel modo ovvio le nozioni di sotto(pre)algebra e di omomorfismo di (pre)algebre. Così come una (pre)algebra è un anello che è allo stesso tempo un (pre)modulo, una sotto(pre)algebra (o una sotto(pre)algebra unitaria) sarà un sottoanello (o un sottoanello unitario)

che è allo stesso tempo un sotto(pre)modulo; un omomorfismo di (pre)algebre o di (pre)algebre unitarie (su un fissato anello) sarà un omomorfismo di anelli, o di anelli unitari, che è allo stesso tempo un omomorfismo di (pre)moduli. Come per il caso dei moduli, le sottoalgebre di un'algebra sono precisamente le sue sottoprealgebre e gli omomorfismi di algebre tra due algebre sono precisamente gli omomorfismi di prealgebre tra esse.

Nel caso degli omomorfismi di prealgebre unitarie la nozione si può rappresentare in termini di diagrammi commutativi. Infatti:

Proposizione 1.28. *Sia R un anello commutativo. Se A e B sono R-prealgebre unitarie con omomorfismi di struttura $\alpha\colon R \to A$ e $\beta\colon R \to B$, gli omomorfismi di R-prealgebre unitarie $A \to B$ sono tutti e soli gli omomorfismi di anelli unitari $\varphi\colon A \to B$ tali che $\alpha\varphi = \beta$.*



Dimostrazione. φ è un omomorfismo di prealgebre unitarie se e solo se è un omomorfismo di anelli unitari ed allo stesso tempo di premoduli. Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli unitari. φ è anche un omomorfismo di premoduli se e solo se, per ogni $a \in A$ e $r \in R$, si ha $(ar)^\varphi = a^\varphi r$. Ora, $(ar)^\varphi = (ar^\alpha)^\varphi = a^\varphi r^{\alpha\varphi}$ e $a^\varphi r = a^\varphi r^\beta$, quindi la condizione si trasforma in $a^\varphi r^{\alpha\varphi} = a^\varphi r^\beta$ per ogni $a \in A$ e $r \in R$. Questa è certamente verificata se $\alpha\varphi = \beta$. Viceversa, se essa vale, applicandola per $a = 1_A$ otteniamo $\alpha\varphi = \beta$. L'asserto è così provato. □

Anche le congruenze ed i quozienti di una R-(pre)algebra A sono definiti come le congruenze ed i quozienti di A come anello che lo sono anche di A visto come R-premodulo. I quozienti della R-(pre)algebra A sono dunque descrivibili come gli anelli quoziente A/H ottenuti rispetto ad un ideale H di A che sia anche un suo sottopremodulo.

Il caso unitario presenta una semplificazione: infatti in una prealgebra unitaria tutti gli ideali sono sottoprealgebre, ovviamente non unitarie se proprie; questo non è sempre vero per algebre non unitarie (esercizio 1.I.8).

Proposizione 1.29. *Sia A una prealgebra unitaria sull'anello commutativo R, dotata di omomorfismo di struttura. Allora ogni ideale di A ne è una R-sottoprealgebra.*

Dimostrazione. Sia $a \in H \lhd A$. Se ξ è un omomorfismo di struttura di A, per ogni $r \in R$ si ha $a \cdot r = ar^\xi \in HA \subseteq H$. Da ciò segue che H è una R-sottoprealgebra di A. □

Esercizi.

1.I.1. Verificare quanto segue.

i) Se R è un anello (non necessariamente commutativo) e $X \subseteq R$, allora $C_R(X) = \{r \in R \mid \forall x \in X(rx = xr)\}$ è un sottoanello (unitario se R è unitario) di R.

ii) Se M è un premodulo su un anello commutativo R, con azione di premodulo $\zeta\colon R \to E := \operatorname{End}(M, +)$, allora $\operatorname{End}_R M = C_E(\operatorname{im}\zeta)$, quindi $\operatorname{End}_R M$ è un sottoanello unitario di E. Dal momento che R è commutativo, e quindi lo è anche $\operatorname{im}\zeta$, abbiamo così $\operatorname{im}\zeta \subseteq \operatorname{End}_R M$. Qui l'inclusione è certamente propria se $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ non è unitario; la proposizione 1.25 mostra che vale l'uguaglianza se R è unitario e $M = R_R$.

1.I.2. Siano R un anello commutativo e A un R-premodulo, con azione di premodulo $\zeta\colon R \to \operatorname{End}(A, +)$ e operazione esterna $\cdot$. La condizione $\forall a, b \in A\big(\forall r \in R((ab) \cdot r = (a \cdot r)b)\big)$, che appare nel testo come $(\mathcal{A})$ esprime il fatto che $\operatorname{im}\zeta$ sia contenuto in $\operatorname{End} A_A$ ed è quindi precisamente quella che assicura che A possa essere riguardato come R-prealgebra (a meno

della riduzione del codominio di ζ), ma può essere anche interpretata come la condizione che, per ogni $b \in A$, la traslazione $\tau_b \colon a \in A \mapsto ab \in A$ sia un endomorfismo di A visto come R-premodulo.

1.I.3. Supponiamo che due anelli commutativi unitari A e B abbiano in comune un sottoanello unitario R. Allora A e B sono R-algebre unitarie, come visto tra gli esempi nel testo, con le immersioni $R \hookrightarrow A$ e $R \hookrightarrow B$ come omomorfismi di struttura. Come segue subito dalla proposizione 1.28, gli omomorfismi di R-algebre unitarie da A a B sono precisamente gli omomorfismi anelli da A a B che mandano in sé ogni elemento di R.

1.I.4. Sia K un sottocampo del campo F. Allora F è una K-algebra con l'immersione come omomorfismo di struttura. Chi conosce un po' di teoria di Galois può concludere, dall'osservazione precedente, che il gruppo di Galois dell'estensione F/K non è altro che il gruppo degli automorfismi di F riguardato come K-algebra.

1.I.5. Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 1.28, mostrare quanto segue: se A e B sono algebre unitarie su un anello commutativo unitario R e $\varphi \colon A \to B$ è un omomorfismo di R-algebre, allora $(\operatorname{im}\varphi)(1_B - 1_A^\varphi) = 0$. Questa osservazione generalizza il lemma 1.1.

1.I.6. Nel caso non unitario è possibile che una prealgebra non abbia un omomorfismo di struttura ed è anche possibile che ne abbia più di uno. Ad esempio, consideriamo un anello commutativo R ed un arbitrario R-premodulo M, riguardato, come suggerito da uno degli esempi nel testo, come R-prealgebra con prodotto interno costante 0_M. Se ξ è un omomorfismo di struttura per questa prealgebra, allora $a \bullet r = a \cdot r^\xi = 0_M$ per ogni $a \in M$ e $r \in R$ (qui $\bullet$ e $\cdot$ sono le operazioni esterna e di moltiplicazione interna in M). Questo mostra che, purché il premodulo M sia scelto in modo che $MR \neq 0$, questa prealgebra non ha omomorfismi di struttura. Se, invece, $MR = 0$, allora ogni omomorfismo di anelli $R \to M$ è un omomorfismo di struttura per la R-prealgebra M. Se R è un anello commutativo tale che $R^2 \neq R$ (questa condizione è necessaria, perché?), allora è possibile costruire M in modo che esista più di un omomorfismo di anelli $R \to M$, quindi M abbia più di un omomorfismo di struttura (ad esempio, basta porre $M = R_R/R^2$ per avere almeno due omomorfismi: quello nullo e l'epimorfismo canonico).

1.I.7. Provare che se R è un anello commutativo non unitario, riguardato come $\mathbb{Z}$-algebra (nell'unico modo possibile) R non ha omomorfismi di struttura.

1.I.8. Costruire un esempio di algebra (necessariamente non unitaria) con un ideale che non ne sia una sottoalgebra. Suggerimento: partire da un opportuno modulo e trasformarlo in un'algebra definendone la moltiplicazione interna come costante zero.

1.3.1 Immersione in un'algebra unitaria: accrescimento

L'importante costruzione che stiamo per effettuare permette di immergere ogni anello (commutativo, per i nostri fini, ma in realtà la stessa costruzione funziona anche per anelli non commutativi) in un anello unitario e più in generale, ogni algebra in un'algebra unitaria sullo stesso anello.

Siano R un anello commutativo unitario ed A una R-algebra, con operazione esterna $\bullet$. Nel prodotto cartesiano $A_1 := A \times R$ definiamo due operazioni (che, come le operazioni binarie in R e in A indichiamo, al solito, con $+$ e $\cdot$, omettendo spesso il secondo simbolo), ponendo, per ogni $a, b \in A$ e $r, s \in R$:

$$(a, r) + (b, s) = (a + b, r + s);$$
$$(a, r) \cdot (b, s) = (ab + a \bullet s + b \bullet r, rs).$$

Verifichiamo che A_1, munito di queste due operazioni, costituisce un anello unitario: è chiaro che $(A_1, +)$ non è altro che la somma diretta esterna dei gruppi additivi di A e di R, quindi è un

gruppo abeliano; è inoltre chiaro che $\cdot$ è commutativa. Se $a, b, c \in A$ e $r, s, t \in R$, allora

$$\begin{aligned}\big((a,r)\cdot(b,s)\big)\cdot(c,t) &= \big((ab + a\bullet s + b\bullet r)c + (ab + a\bullet s + b\bullet r)\bullet t + c\bullet(rs), rst\big)\\ &= (abc + ac\bullet s + bc\bullet r + ab\bullet t + a\bullet(st) + b\bullet(rt) + c\bullet(rs), rst)\\ &= (a,r)\cdot\big((b,s)\cdot(c,t)\big),\end{aligned}$$

inoltre

$$\begin{aligned}\big((a,r)+(b,s)\big)\cdot(c,t) &= \big((a+b)c + (a+b)\bullet t + c\bullet(r+s), (r+s)t\big)\\ &= (a,r)\cdot(c,t) + (b,s)\cdot(c,t),\end{aligned}$$

e

$$(a,r)\cdot(0_A, 1_R) = (a0_A + a\bullet 1_R + r\bullet 0_A, r) = (a,r),$$

quindi $(A_1, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario con zero $(0_A, 0_R)$ e unità $(0_A, 1_R)$. Ora, l'applicazione

$$\rho\colon r \in R \mapsto (0_A, r) \in A_1$$

è chiaramente un omomorfismo di anelli unitari, quindi definisce A_1 come R-algebra (unitaria); l'operazione esterna è così descritta: per ogni $a \in A$ e $r, s \in R$ si ha

$$(a,r)s = (a,r)s^\rho = (a,r)\cdot(0_A, s) = (a\bullet s, rs).$$

È ora di immediata verifica il fatto che

$$\mu\colon a \in A \mapsto (a, 0_R) \in A_1$$

è un monomorfismo di anelli ma anche di R-moduli, quindi di R-algebre. Inoltre, l'applicazione

$$\varepsilon\colon (a,r) \in A_1 \mapsto r \in R$$

è un omomorfismo (suriettivo) di R-algebre. Il suo nucleo è $\operatorname{im}\mu = \{(a, 0_R) \mid a \in A\}$, che è così un ideale di A_1.

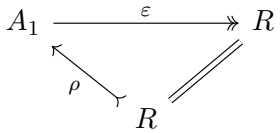
Abbiamo così provato la parte principale di:

Teorema 1.30. *Siano R un anello commutativo unitario e A una R-algebra. Esiste allora una R-algebra unitaria A_1 tale che:*

(i) *$A \lhd A_1$; in particolare A è una R-sottoalgebra di A_1;*
(ii) *l'omomorfismo di struttura ρ di A_1 è iniettivo, vale a dire: A_1 è fedele come R-modulo;*
(iii) *posto $R_1 = \operatorname{im}\rho$, il gruppo additivo di A_1 è somma diretta del gruppo additivo di A e di quello di R_1;*
(iv) *A_1/A è isomorfo (come R-algebra) a R.*

Dimostrazione. L'enunciato si ottiene dalla discussione precedente, utilizzando μ per identificare ogni elemento a di A con $a^\mu = (a, 0_R) \in A_1$. □

Tornando alla discussione che precede l'enunciato, osserviamo anche l'uguaglianza $\rho\varepsilon = \mathrm{id}_R$, ovvero il diagramma commutativo



che esprime il fatto che ε è un omomorfismo di R-algebre. Notiamo anche l'isomorfismo di R-algebre $r \in R \mapsto r^\rho + A \in A_1/A$, che verrà richiamato nel teorema 1.37.

Chiameremo l'algebra A_1 appena costruita (o la sua copia isomorfa ottenuta effettuando l'identificazione via μ, come nel teorema 1.30) l'*algebra accresciuta*[11] definita da A e la indicheremo anche col simbolo $A \rtimes R$, preso a prestito dalla teoria dei gruppi. Osserviamo che $R_1 = 1_{R_1} R = \{0_A\} \times R$ è isomorfo a R come R-algebra, quindi, una volta effettuata l'identificazione, ogni elemento di A_1 si scrive in unico modo nella forma $a + 1_{R_1} r$, dove $a \in A$ e $r \in R$.

Un importante caso particolare si ha per gli anelli, che, come sappiamo, sono tutte e sole le algebre su $\mathbb{Z}$; dunque ogni anello commutativo A è un ideale di un anello commutativo unitario $A \rtimes \mathbb{Z}$, che chiameremo l'*anello accresciuto* definito da A.[12] Ponendo $R = \mathbb{Z}$ nell'enunciato del teorema 1.30 si ottiene infatti:

Corollario 1.31. *Sia A un anello commutativo, Allora esiste un anello commutativo unitario A_1 tale che $A \lhd A_1$ e $A_1/A \simeq \mathbb{Z}$.*

Ripetendo quanto visto nel caso generale, notiamo che ogni elemento dell'anello accresciuto $A_1 = A \rtimes \mathbb{Z}$ definito da A si scrive, in unico modo, come $a + n1_{A_1}$ dove $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, vale a dire: il gruppo additivo di A_1 è la somma diretta del gruppo additivo di A e di quello del sottoanello minimo $1_{A_1}\mathbb{Z}$ di A_1 che, ricordiamo, è il sottoanello generato dall'unità di A_1, cioè il più piccolo sottoanello unitario di A_1. Questo sottoanello è isomorfo a $\mathbb{Z}$, quindi A_1 ha caratteristica 0.

Un'estensione del corollario 1.31, che fornisce una nozione alternativa di anello accresciuto che ha il vantaggio di conservare la caratteristica dell'anello è fornita nell'esercizio 1.J.4.

1.3.2 Riduzione di premoduli a moduli

Ciò che stiamo qui per verificare è che ogni premodulo su un anello commutativo R può essere, in modo a molti fini equivalente, riguardato come modulo sull'anello accresciuto definito da R. Questo permette di studiare questioni che riguardano premoduli traducendole in questioni che riguardano moduli. Come conseguenza (o grazie a verifiche svolte in parallelo) analogo discorso vale per prealgebre ed algebre.

Proposizione 1.32. *Siano R un anello commutativo, $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$ l'anello accresciuto definito da R e S un anello unitario (non necessariamente commutativo). Allora, detti rispettivamente $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_1$ gli insiemi degli omomorfismi di anelli da R a S e di anelli unitari da R_1 a S, l'applicazione $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ che ad ogni $\alpha \in \mathcal{H}_1$ associa la restrizione di α a R è biettiva.*

Dimostrazione. Basta mostrare che ogni $\varphi \in \mathcal{H}$ ha uno ed un solo prolungamento φ_1 a R_1 che sia un omomorfismo di anelli unitari. Dovendosi avere $r^{\varphi_1} = r^{\varphi}$ per ogni $r \in R$ e $(1_{R_1})^{\varphi} = 1_S$, un tale φ_1 deve essere necessariamente l'applicazione:

$$r + n1_{R_1} \in R_1 \mapsto r^{\varphi} + n1_S \in S.$$

Ora, si verifica senza difficoltà che questa applicazione è un omomorfismo di anelli unitari; in questo modo l'asserto è provato. □

Applicando questo risultato al caso in cui S sia l'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano M o di un anello commutativo A (riguardato come modulo su sé stesso) si ha:

Corollario 1.33. *Siano R un anello commutativo e $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$ l'anello accresciuto definito da R.*

(i) *Se M un gruppo abeliano, $\mathcal{H}$ è l'insieme delle azioni di premodulo $R \to \operatorname{End} M$ e $\mathcal{H}_1$ è l'insieme delle azioni di modulo $R_1 \to \operatorname{End} M$, l'applicazione da $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}$ che ad ogni $\zeta \in \mathcal{H}_1$ associa la restrizione di ζ a R è biettiva.*

[11] traduzione dell'inglese *augmented*. Chi volesse approfondire può leggere l'osservazione 1.J.2.
[12] lo stesso enunciato vale anche per anelli non commutativi.

(ii) *Se A un anello commutativo, $\mathcal{H}$ è l'insieme delle azioni di prealgebra $R \to \operatorname{End} A_A$ e $\mathcal{H}_1$ è l'insieme delle azioni di algebra $R_1 \to \operatorname{End} A_A$, l'applicazione da $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}$ che ad ogni $\zeta \in \mathcal{H}_1$ associa la restrizione di ζ a R è biettiva.*

Abbiamo così che ogni premodulo (risp. prealgebra) su un anello commutativo R si può equivalentemente riguardare come modulo (risp. algebra) sull'anello accresciuto R_1 definito da R. Per quanto la proposizione 1.32 renda la descrizione già chiara, mostriamo esplicitamente in che modo le operazioni esterne relative alle azioni di R ed R_1 si ottengono l'una dall'altra. Se M è un R-premodulo (o una R-prealgebra) l'operazione esterna $\bullet\colon M \times R \to M$ è la restrizione di quella, da $M \times R_1$ a M, di M visto come R_1-modulo (o R_1-algebra). Viceversa, il prodotto esterno di un elemento a di M per un elemento $r + n1_R$ di R_1, dove $r \in R$ e $n \in \mathbb{Z}$ (ricordiamo che ogni elemento di R_1 ha una ed una sola espressione in questa forma) è $a \bullet r + na$, come mostra la dimostrazione della proposizione 1.32. In altri termini, se indichiamo con lo stesso simbolo $\bullet$ entrambe le operazioni esterne che stiamo discutendo, abbiamo $a \bullet (r + n1_{R_1}) = a \bullet r + na$ per ogni $a \in M$, $r \in R$ e $n \in \mathbb{Z}$. Con dimostrazione ovvia deduciamo:

Proposizione 1.34. *Con le notazioni appena stabilite, se M ed N sono R-premoduli (risp. R-prealgebre), una volta che questi siano riguardati anche come R_1-moduli (risp. R_1-algebre) come indicato dal corollario 1.33,*

(i) *un'applicazione $M \to N$ è un omomorfismo di R_1-moduli (risp. di R_1-algebre) se e solo se è un omomorfismo di R-premoduli (risp. di R-prealgebre);*

(ii) *una parte di M ne costituisce un R_1-sottomodulo (risp. una R_1-sottoalgebra) se e solo se ne costituisce un R-sottopremodulo (risp. una R-sottoprealgebra). Dunque, per ogni parte X di M, l'R-sottopremodulo generato (risp. R-sottoprealgebra generata) da X coincide con XR_1 (risp. con la R-sottoalgebra generata da X).*

In relazione a moduli e premoduli, la parte (i) è una riformulazione dell'esercizio 1.D.3 (ii). Questi risultati giustificano l'affermazione fatta all'inizio della sottosezione: lo studio dei premoduli o delle prealgebre su un anello commutativo può essere spesso ridotto a quello dei moduli o delle algebre sul corrispondente anello accresciuto. A titolo di esempio:

Corollario 1.35. *Sia R un anello commutativo. A meno di isomorfismi i premoduli ciclici sono tutti e soli i quozienti R_1/H, dove $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$ è l'anello accresciuto definito da R (visto come R-modulo) e $H \lhd R_1$.*

Dimostrazione. Sia M un R-premodulo ciclico. Allora, per la (ii) della proposizione 1.34, M è ciclico anche come R_1-modulo, quindi $M \simeq_{R_1} R_1/H$ per un opportuno $H \lhd R_1$, come segue dalla proposizione 1.22, dunque $M \simeq_R R_1/H$ per la proposizione 1.34 (i). Anche il viceversa segue dalla proposizione 1.34. □

Questo corollario e la proposizione 1.22 saranno generalizzati nella proposizione 4.20.

Possiamo anche estendere alle prealgebre, in forma indebolita, il teorema 1.30. Abbiamo infatti:

Corollario 1.36. *Siano R un anello commutativo e A una R-prealgebra. Esiste allora una R-prealgebra unitaria A_1^* della quale A è sottoprealgebra ed ideale, e tale che A_1^*/A sia isomorfa, come R_1-algebra, all'anello accresciuto R_1 definito da R.*

Dimostrazione. A si può riguardare come algebra su R_1, quindi, per il teorema 1.30, se ne può costruire la R_1-algebra accresciuta $A_1^* = A \rtimes R_1$, che è a sua volta una R-prealgebra ed ha le proprietà richieste. □

La prealgebra A_1^* qui costruita ha in effetti tutte le proprietà dell'algebra accresciuta $A \rtimes R$ ottenuta, come nel teorema 1.30, nel caso in cui A sia un'algebra, con l'eccezione del fatto che

A_1^*/A non è isomorfa a R ma ad R_1. Notiamo anche che A_1^* ha una R-sottoprealgebra (ed ideale) $B = A + 1_{A_1^*}R$ contenente A e con l'ulteriore proprietà che B/A sia isomorfo (come R-prealgebra) a R ma non è, in generale, unitario. Si farà uso di questa sottoprealgebra per dimostrare il teorema 1.37. Più a titolo di curiosità che altro, l'esercizio 1.J.6 descrive una condizione necessaria e sufficiente affinché B sia unitario.

1.3.3 Idealizzazione di un (pre)modulo

Tra i primi esempi di premoduli abbiamo indicato gli ideali di un anello commutativo R: come osservato questi sono precisamente i sottopremoduli di R_R. In questo senso la nozione di premodulo generalizza quella di ideale. Un'applicazione del teorema 1.30 permette in qualche modo di invertire questa considerazione: ogni premodulo M su un anello commutativo R è un ideale di un anello S che può essere scelto in modo che, a meno di un cambio di scalari, l'azione di premodulo di S su M sia identificabile con quella di R.

Teorema 1.37. *Siano R un anello commutativo e M un R-premodulo. Allora esiste un anello commutativo S tale che:*
(i) *$M \lhd S$;*
(ii) *in S si abbia $M^2 = 0$, vale a dire: $M \subseteq \operatorname{Ann}_S(M)$;*
(iii) *$R \simeq S/M$;*
Inoltre, visto M come S/M-premodulo per cambio degli scalari utilizzando la (ii), è possibile scegliere l'isomorfismo in (iii) in modo che l'azione di R-premodulo su M definita via questo isomorfismo coincida con quella originale.

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto il caso in cui R è unitario e M è un R-modulo. Come visto in un esempio precedente, M si può riguardare come R-algebra con moltiplicazione interna definita da $ab = 0_M$ per ogni $a, b \in M$. Sia S l'R-algebra accresciuta definita da quest'algebra, allora (a meno di identificazioni) $M \lhd S$ e $R \simeq S/M$. Inoltre, la definizione della moltiplicazione interna di M comporta $MM = 0$, ovvero $M \subseteq \operatorname{Ann}_S(M)$. Infine, con le notazioni utilizzate per la dimostrazione del teorema 1.30, l'isomorfismo $r \in R \to r^\rho + M \in S/M$ ha la proprietà richiesta dall'ultima parte dell'enunciato.

Passiamo al caso generale. Sia R_1 l'anello accresciuto definito da R e riguardiamo M come R_1-modulo, nel senso indicato nel corollario 1.33. Applichiamo la costruzione del caso precedente a questo R_1-modulo, ottenendo un anello S_1 tale che $M \lhd S_1 = M + R_1$. Allora $S := M + R$ è un sottoanello di S_1 che verifica tutte le richieste dell'enunciato. □

L'anello S (che in effetti è una R-prealgebra e, se R è unitario, una R-algebra) che appare in questo teorema viene chiamato *idealizzazione* di M e viene spesso indicato col simbolo $M \,{}_0\!\bowtie R$.

Conviene riguardare in dettaglio ed in modo esplicito la definizione dell'anello $M \,{}_0\!\bowtie R$. Per chiarezza, facciamo riferimento alla costruzione iniziale dell'algebra A_1 nella discussione che ha portato al teorema 1.30 e nelle notazioni usate lì rinunciamo all'identificazione degli elementi di A con le loro immagini mediante μ. Allora, sia nel caso in cui M sia un R-modulo, sia nel caso in cui non lo sia, $S = M \,{}_0\!\bowtie R$ ha per sostegno il prodotto cartesiano $M \times R$ e le sue operazioni interne di addizione e moltiplicazione risultano definite da

$$(a, r) + (b, s) = (a + b, r + s) \qquad \text{e} \qquad (a, r)(b, s) = (a \bullet s + b \bullet r, rs)$$

per ogni $a, b \in M$ e $r, s \in R$, dal momento che $ab = 0_M$. Resta invariato il fatto che $\rho\colon r \in R \mapsto (0_M, r) \in S$ e $\mu\colon a \in M \mapsto (a, 0_R) \in S$ sono monomorfismi (di R-prealgebre il primo, di R-premoduli il secondo). A meno dell'identificazione di M con $\operatorname{im}\mu$ l'isomorfismo in teorema 1.37 (iii) è descritto da $r \mapsto r^\rho + \operatorname{im}\mu$. Infine, $\operatorname{im}\mu$ è un S-(pre)modulo in quanto ideale di S ed è annullato da sé stesso, quindi è un $(S/\operatorname{im}\mu)$-(pre)modulo (considerando l'azione indotta

mod $\operatorname{im}\mu$) e un R-(pre)modulo (via l'isomorfismo ora descritto). L'operazione esterna di questo R-(pre)modulo è descritta da $a^\mu r = a^\mu r^\rho = (a, 0_R)(0_M, r) = (a \bullet r)^\mu$ per ogni $a \in M$ e $r \in R$, a conferma dell'ultima frase nell'enunciato del teorema 1.37.

Osservazioni ed esercizi.

1.J.1. Può essere utile fermarsi a riflettere sulla nozione, in genere non formalizzata, di identificazione. Capita spesso, nello studio di una struttura matematica A, di costruire una struttura B che soddisfi alcune proprietà predeterminate ed abbia una sottostruttura A' isomorfa ad A, e concludere da ciò che A è una sottostruttura di una struttura con le proprietà richieste per B, cosa che, in senso stretto, non si è fatto. In questi casi si dice che si 'identifica' A con A' e si procede come se l'isomorfismo tra A e A' fosse l'uguaglianza. È quello che abbiamo fatto nel teorema 1.30. Perché tutto ciò è lecito?

In generale, se S è il sostegno di un certo tipo di struttura matematica, algebrica o di altro tipo, e $f\colon S \to T$ è un'applicazione biettiva, si può usare f per definire su T una struttura isomorfa a quella data su S in modo che f risulti un isomorfismo. Ad esempio, se in S è data un'operazione (oppure una relazione) binaria $*$, si definisce un'operazione (oppure una relazione) binaria $\star$ in T ponendo $a \star b = (a^{f^{-1}} * b^{f^{-1}})^f$ (oppure $a \star b \iff a^{f^{-1}} * b^{f^{-1}}$) per ogni $a, b \in T$; in questo modo f risulta essere un isomorfismo da $(S, *)$ a $(T, \star)$. Analogamente si procede per operazioni o relazioni di altra arietà. Si usa dire che in questo modo si è usata f per trasferire a T la struttura definita su S.

Tornando alla questione originaria, supponiamo di aver costruito, a partire dalla struttura A una struttura B con una sottostruttura A' ed un isomorfismo $\alpha\colon A \to A'$. Se, per semplicità, supponiamo che i sostegni di A e B siano disgiunti, poniamo $B' = A \cup (B \smallsetminus A')$ e definiamo la biezione $f\colon B \to B'$ ponendo $a^f = a^{\alpha^{-1}}$ per ogni $a \in A'$ e $b^f = b$ per ogni $b \in B \smallsetminus A'$. Usiamo f per trasferire a B' la struttura definita su B; si verifica subito che A è una sottostruttura di B' che coincide con la struttura A originale, e ovviamente B' è isomorfo a B. Se, invece i sostegni di A e B non sono disgiunti, basta trasferire preliminarmente la struttura di B su un insieme B_1 disgiunto da A e ripetere la costruzione di B' utilizzando B_1 al posto di B.

Abbiamo così giustificato la liceità delle identificazioni.

1.J.2. Sia R un anello commutativo unitario. Nella terminologia corrente, una R-algebra accresciuta (traduciamo così l'espressione inglese *augmented algebra*) è una coppia ordinata (A, ε), dove A è una R-algebra unitaria e $\varepsilon\colon A \to R$ è un omomorfismo di R-algebre unitarie. Forniamo qui qualche indicazione sul fatto che questa nozione è sostanzialmente equivalente a quella di algebra accresciuta che abbiamo dato nel testo con riferimento alla costruzione che ha portato al teorema 1.30.

Se $A_1 = A \rtimes R$ è l'algebra unitaria costruita come nel teorema 1.30 a partire da un'arbitraria R-algebra A e $\varepsilon\colon A_1 \to R$ è definito da $(a, r)^\varepsilon = r$ per ogni $a \in A$ e $r \in R$, allora (A_1, ε) è un'algebra accresciuta. Ovviamente, a meno dell'identificazione degli elementi $a \in A$ con $(a, 0_A) \in A_1$, si ha $A = \ker\varepsilon$.

Viceversa, se (A, ε) è una R-algebra accresciuta, nel senso appena definito qui, si può provare che A è isomorfa, come R-algebra, all'algebra $K_1 = K \rtimes R$ costruita a partire da $K := \ker\varepsilon$. Infatti, se $\xi\colon R \to A$ è l'omomorfismo di struttura, si ha $\xi\varepsilon = \mathrm{id}_R$ per la proposizione 1.28; da ciò segue che ξ è iniettiva, quindi $R' := \operatorname{im}\varepsilon$ è isomorfo (come R-algebra) a R, ma anche che $A = K + R'$ e $K \cap R' = 0$. Se ne ricava che l'applicazione $(k, r) \in K_1 \mapsto k + r^\xi \in A$ è un isomorfismo di R-algebre.

1.J.3. Siano R un anello commutativo unitario e $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di R-algebre. Allora, se $A_1 = A \rtimes R$ e $B_1 = B \rtimes R$ sono le algebre accresciute definite da A e B l'applicazione $\varphi_1\colon (a, r) \in A_1 \mapsto (a^\varphi, r) \in B_1$ è un omomorfismo di R-algebre unitarie.

Chi conosce questa terminologia può verificare che le assegnazioni $A \mapsto A_1$ e $\varphi \mapsto \varphi_1$ definiscono un funtore dalla categoria delle R-algebre a quella delle R-algebre unitarie.

1.J.4. Sia A un anello commutativo di caratteristica c. Allora A è, in modo univocamente determinato, una $\mathbb{Z}_c$-algebra (esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\mathbb{Z}_c \to \mathrm{End}(A,+)$). Si può quindi considerare la $\mathbb{Z}_c$-algebra accresciuta $B := A \rtimes \mathbb{Z}_c$; allora B è un anello commutativo unitario in cui A si immerge come ideale e tale che $B/A \simeq \mathbb{Z}_c$. Verificare che se $A_1 = A \rtimes \mathbb{Z}$ è l'anello accresciuto definito da A, allora $B \simeq A_1/cA_1$. Osservare, in particolare, che se $c = 0$, $B \simeq A_1$, quindi questa costruzione fornisce una versione generalizzata del corollario 1.31.

1.J.5. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_2$ visto come algebra su sé stesso. Descrivere in dettaglio, scrivendo le tavole di Cayley delle due operazioni binarie di anello, l'algebra accresciuta $A_1 = A \rtimes \mathbb{Z}_2$ definita da A.

Confrontare l'anello A_1 con l'idealizzazione $C_2 \,{}_0\!\ltimes \mathbb{Z}_2$ dove C_2 è un gruppo ciclico di cardinalità 2, visto come $\mathbb{Z}_2$-modulo nell'unico modo possibile.

1.J.6. Sia A una prealgebra su un anello commutativo R, sia $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$ l'anello accresciuto definito da questo e sia infine $A_1^* = A \rtimes R_1$ la R_1-algebra accresciuta (unitaria), in cui A si immerge come sottoalgebra e ideale, quindi anche come R-sottoprealgebra. Sia B l'ideale (e R-sottoprealgebra) $A + 1_{R_1} R$ di A_1^*. Dopo aver osservato che B/A è isomorfa ad R, verificare che B è una prealgebra unitaria se e solo se R è unitario e A ha un elemento idempotente (la nozione è definita nella sottosezione 4.2.1) a tale che per ogni $x \in A$ si abbia $x1_R = x - xa$. Notare che questa condizione comporta $aR = 0$.

Verificare anche che la situazione in cui B risulta unitario si verifica, ad esempio, quando $R = \mathbb{Z}$ e A è la $\mathbb{Z}$-prealgebra (non unitaria) con gruppo additivo la somma diretta $(n\mathbb{Z},+) \oplus (\mathbb{Z},+)$, dove n è un intero maggiore di 1, e operazione esterna $\bullet$ definita da $(nu, v) \bullet t = (nut, 0)$ per ogni $u, v, t \in \mathbb{Z}$. Che questa prealgebra sia ben definita si verifica facilmente realizzandola come sottoprealgebra della prealgebra che ha l'omomorfismo di anelli $t \in \mathbb{Z} \mapsto (t, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come omomorfismo di struttura (per l'anello prodotto diretto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si veda la sezione 4.2).

2 Divisibilità in monoidi commutativi

Le proprietà di divisibilità di elementi e di ideali hanno grande importanza nello studio degli anelli commutativi. Per questo motivo dedichiamo un capitolo ad una rivisitazione ed approfondimento della teoria elementare della divisibilità e della fattorizzazione nei monoidi commutativi.

2.1 Richiami

Ricordiamo un po' di terminologia, notazioni e risultati elementari, le cui dimostrazioni saranno omesse. Fissiamo un monoide commutativo $(M, \cdot, 1_M)$. Se $a, b \in M$, si dice che a divide b (in M) se e solo se esiste $c \in M$ tale che $b = ac$; in simboli: $a|_M b$ o, più brevemente, $a|b$. Inoltre, a e b sono *associati* in M (e scriviamo $a \sim_M b$) se e solo se $a|_M b$ e $b|_M a$. Per ogni $a \in M$, con $\mathrm{Div}_M(a)$ intendiamo l'insieme $\{x \in M \mid x|a\}$ dei divisori di a in M, mentre l'insieme $\{ax \mid x \in M\}$ dei multipli di a in M è indicato con aM. Con queste notazioni:

Lemma 2.1. *Per ogni $a, b \in M$ sono equivalenti:*
(i) $a \sim_M b$; (ii) $\mathrm{Div}_M(a) = \mathrm{Div}_M(b)$; (iii) $aM = bM$.
Inoltre, se a è cancellabile in M, queste condizioni sono equivalenti a $(\exists u \in \mathcal{U}(M))(b = au)$.[1]

La relazione $\sim_M$ è di equivalenza in M, come si verifica direttamente dalla definizione o dalle caratterizzazioni nel lemma precedente. Inoltre essa è compatibile con la moltiplicazione in M (se $a, b, c \in M$ e $a \sim_M b$ allora $ac \sim_M bc$), dando così luogo al monoide quoziente $M/\sim_M$, che indichiamo con $\widetilde{M}$. Per brevità, scriveremo spesso $\tilde{a}$ per la classe $[a]_{\sim_M}$ degli elementi associati ad un elemento a di M.

Per ogni $a \in M$, tra i divisori di a ci sono i cosiddetti divisori banali: gli elementi invertibili di M e quelli associati ad a. Se $a \notin \mathcal{U}(M)$ e $\mathrm{Div}_M(a) = \mathcal{U}(M) \cup [a]_{\sim_M}$ (vale a dire: i soli divisori di a in M sono quelli banali), allora si dice che a è *irriducibile* in M. Si dice invece che a è *primo* se e solo se $a \notin \mathcal{U}(M)$ e ogni volta che a divide un prodotto in M allora a divide almeno uno dei fattori: $(\forall\, b, c \in M)(a|bc \Rightarrow (a|b \vee a|c))$.[2] È facile provare che *ogni elemento primo e cancellabile di M è irriducibile*; il viceversa è in generale falso anche nell'ipotesi che M sia un monoide *cancellativo*, cioè un monoide in cui ogni elemento è cancellabile (si veda l'esempio presentato nell'esercizio 2.A.3). È altrettanto facile verificare che ciascuna delle proprietà di essere invertibile, irriducibile, primo è invariante per il passaggio ad associati, nel senso che se $a, b \in M$ e $a \sim_M b$, allora a verifica la proprietà in questione se e solo se b verifica la stessa proprietà. Meglio ancora: a verifica la proprietà nel monoide M se e solo se $\tilde{a}$ verifica la stessa proprietà in $\widetilde{M}$.

Se M è un monoide commutativo cancellativo, si dice che M è *fattoriale* se e solo se è verificata una delle seguenti tre proprietà, tra loro equivalenti:

F_1): ogni elemento non invertibile di M è prodotto di primi;
F_2): ogni elemento non invertibile di M è prodotto di irriducibili, ed ogni irriducibile è primo;
F_3): ogni elemento non invertibile di M è prodotto di irriducibili, in modo essenzialmente unico.

[1] $\mathcal{U}(M)$ denota il gruppo degli invertibili di M.
[2] nella definizione di elemento primo molti autori richiedono anche che l'elemento, in questo caso p, sia cancellabile, vale a dire: tale che l'applicazione $x \in M \mapsto px \in M$ sia iniettiva. La cosa non è molto rilevante, ma notiamo che se, come in queste note, non lo si fa, allora il numero 0 è a tutti gli effetti un primo (non irriducibile!) in $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

Chiariamo il significato dell'ultima espressione. Se un elemento a è espresso come prodotto di elementi di M in due modi: $x_1x_2\cdots x_r = a = y_1y_2\cdots y_s$, diciamo che queste due fattorizzazioni sono 'essenzialmente uguali' se e solo se $r = s$ ed esiste una permutazione $\sigma \in \mathbb{S}_r$ tale che $x_i \sim_M y_{i^\sigma}$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. In altri termini: il numero dei fattori nelle due fattorizzazioni è lo stesso ed è possibile riordinare i fattori y_i in modo che ciascuno degli x_i sia associato in M al corrispondente fattore y_i. Dire che a ha essenzialmente una unica fattorizzazione in irriducibili vuol dire che due qualsiasi fattorizzazioni di a come prodotto di irriducibili devono risultare essenzialmente uguali.

Conseguenza immediata della definizione è che in un monoide fattoriale le proprietà di essere irriducibile e quella di essere primo sono equivalenti.

Esercizi ed Esempi.

2.A.1. Verificare in dettaglio tutte le affermazioni fatte in questa sezione.

2.A.2. Verificare che se $M \simeq (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ allora $\widetilde{M} \simeq (\mathbb{N}, \cdot, 1)$.

2.A.3. Sia P il sottomonoide di $(\mathbb{N}^+, \cdot)$ costituito da 1 e dai numeri interi positivi pari. Descrivere gli elementi irriducibili di P, e verificare che in P non esistono elementi primi. Dedurre che P è un monoide commutativo cancellativo in cui ogni elemento non invertibile (cioè diverso da 1) è prodotto di irriducibili, ma non è un monoide fattoriale. Trovare qualche elemento che abbia in P fattorizzazioni in irriducibili che non sono essenzialmente uguali tra loro.

2.A.4. Sia M un monoide commutativo, e sia a un elemento cancellabile di M. Dimostrare:

i) ogni divisore di a è cancellabile;

ii) due qualsiasi fattorizzazioni di a come prodotto di primi in M sono essenzialmente uguali.

2.2 Una caratterizzazione dei monoidi fattoriali in termini di ordinamenti

2.2.1 Reticoli

La caratterizzazione a cui allude il titolo di questa sezione è espressa in termini di reticoli; diamo qui qualche rapida informazione su questa importantissima (ed ubiqua, in matematica) nozione, limitandoci allo stretto necessario. Si chiama *reticolo* un insieme ordinato $(S, \leq)$ con la proprietà che, per ogni $a, b \in S$, esistano in $(S, \leq)$ sia l'estremo inferiore $\inf\{a, b\}$ che l'estremo superiore $\sup\{a, b\}$. Più in generale, $(S, \leq)$ è un inf-semireticolo se e solo se per ogni $a, b \in S$, in $(S, \leq)$ esiste $\inf\{a, b\}$; analogamente si definiscono i sup-semireticoli.

Sono esempi di reticoli tutti gli insiemi totalmente ordinati, l'insieme delle parti di un qualsiasi insieme, ordinato per inclusione (gli estremi inferiori e superiori sono descritti in questo caso da intersezione ed unione), l'insieme dei sottomoduli di un modulo, ancora ordinato per inclusione (con intersezione e sottomodulo generato a fornire estremi inferiori e superiori—allo stesso modo, in ogni genere di struttura algebrica l'insieme delle sottostrutture costituisce un reticolo). Se $(S, \leq)$ è un reticolo, chiaramente sarà un reticolo anche $(S, \geq)$, cioè S munito dell'ordinamento duale.

In ogni reticolo $(S, \leq)$ risultano definite due operazioni binarie, indicate abitualmente come $\wedge$ e $\vee$ e chiamate operazioni reticolari, definite ponendo $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ e $a \vee b = \sup\{a, b\}$ per ogni $a, b \in S$. Si verifica facilmente che queste due operazioni sono associative e commutative e verificano le cosiddette leggi di assorbimento: per ogni $a, b \in S$, vale $a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$. Meno evidente è che vale il viceversa: se in un insieme S sono date due operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$

che verificano queste proprietà (che, si noti, sono puramente algebriche), allora è possibile definire in S una relazione d'ordine $\leq$ che rende $(S, \leq)$ un reticolo con $\wedge$ e $\vee$ come operazioni reticolari (la relazione si definisce ponendo, per ogni $a, b \in S$, $a \leq b$ se e solo se $a = a \wedge b$). Questo significa, in sostanza, che si può, in modo equivalente, studiare i reticoli come strutture relazionali (insiemi muniti di, in questo caso, un particolare tipo di relazione d'ordine) o come strutture algebriche. È utile sapere che le due possibili nozioni, quella relazionale e quella algebrica, di isomorfismo tra reticoli coincidono: un'applicazione biettiva tra due reticoli è un isomorfismo tra insiemi ordinati (cioè è crescente ed ha inversa crescente) se e solo se è un isomorfismo tra strutture algebriche (cioè conserva le operazioni reticolari). Faremo anche riferimento ad anti-isomorfismi; un *anti-isomorfismo* da un insieme ordinato S ad un insieme ordinato T è un isomorfismo da S al duale di T, cioè un'applicazione biettiva strettamente decrescente con inversa strettamente decrescente (se S e T sono reticoli gli anti-isomorfismi da S a T si interpretano, in termini algebrici, come isomorfismi da $(S, \wedge, \vee)$ a $(T, \vee, \wedge)$). Esiste una nozione, algebrica, di *sottoreticolo:* è il reticolo costituito da una parte non vuota che sia chiusa rispetto alle operazioni reticolari. Si faccia però attenzione: un sottoinsieme di un reticolo S può essere esso stesso un reticolo rispetto all'ordinamento indotto pur non essendo un sottoreticolo di S; in altri termini, per i reticoli, le nozioni algebrica e relazionale di sottostruttura non coincidono. Ad esempio, ordinati entrambi per inclusione, sia l'insieme delle parti che l'insieme dei sottomoduli di un modulo sono reticoli, ma in generale il secondo non è un sottoreticolo del primo perché non è chiuso per l'operazione reticolare di estremo superiore del primo, cioè per l'unione.[3]

Un reticolo può avere o non avere minimo e/o massimo (se li ha si dice che è limitato). In un reticolo (o più in generale, in un insieme ordinato) con minimo si dicono *atomi* gli elementi che siano minimali tra quelli diversi dal minimo (ad esempio, i singleton nell'insieme delle parti di un insieme), dualmente, in un insieme ordinato con massimo i *coatomi* sono gli elementi massimali tra quelli diversi dal massimo (ad esempio, nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo i coatomi sono i sottogruppi massimali, in quello degli ideali di un anello commutativo i coatomi sono gli ideali massimali).

2.2.2 Il preordinamento divisibilità

Un *preordinamento* in un insieme S è una relazione binaria in S che sia riflessiva e transitiva. Se σ è un preordinamento in S, si può definire in S una relazione binaria ρ ponendo, per ogni $a, b \in S$, $a \ \rho \ b$ se e solo se $a \ \sigma \ b$ e $b \ \sigma \ a$. È facile verificare che ρ è una relazione di equivalenza (che si dice associata a σ) e che σ induce una relazione d'ordine (largo) σ^* nel quoziente S/ρ definita ponendo, per ogni $a, b \in S$, $[a]_\rho \ \sigma^* \ [b]_\rho$ se e solo se $a \ \sigma \ b$. Un esempio di questa costruzione l'abbiamo già per le mani: la relazione di divisibilità in un (arbitrario) monoide commutativo M è un preordinamento e la relazione di equivalenza associata a questa è, evidentemente, la relazione $\sim_M$ 'essere elementi associati' in M. La relazione d'ordine indotta nel quoziente $M/{\sim_M} = \widetilde{M}$ dalla divisibilità in M non è altro che la relazione di divisibilità in $\widetilde{M}$, che è così un ordinamento, in accordo col fatto che $\widetilde{M}$ ha un unico elemento invertibile, il suo elemento neutro $\tilde{1}_M$ (a questo proposito può essere utile esaminare l'osservazione 2.B.2).

Siano $a, b \in M$. Un elemento $d \in M$ divide a (in M) se e solo se $\tilde{d}$ divide $\tilde{a}$ in $\widetilde{M}$. Da ciò e dall'analoga osservazione per b al posto di a segue facilmente che d è un massimo comun divisore (MCD) tra a e b in M se e solo se $\tilde{d}$ è un MCD tra $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ in $\widetilde{M}$. Poiché la divisibilità è una relazione d'ordine in $\widetilde{M}$ quest'ultima affermazione equivale a dire che $\tilde{d}$ è l'estremo inferiore di $\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ nell'insieme ordinato $(\widetilde{M}, |)$. Ciò suggerisce di usare la notazione consueta in teoria dei reticoli e scrivere $\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \tilde{b}$ per indicare che d è un MCD tra a e b. In modo del tutto analogo,

[3] anzi, è un semplice esercizio verificare che l'unione di due sotto(pre)moduli di un (pre)modulo è un sotto(pre)modulo se e solo se i due sotto(pre)moduli sono confrontabili per inclusione.

per ogni $m \in M$ abbiamo che m è un minimo comune multiplo (mcm) tra a e b se e solo se $\tilde{m}$ è un mcm tra $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, ovvero $\tilde{m} = \tilde{a} \vee \tilde{b}$ è l'estremo superiore di $\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ in $(\widetilde{M}, |)$.

Un richiamo sembra opportuno: l'insieme dei MCD tra due elementi è, in generale, una classe di elementi associati, quindi se d è un MCD tra a e b allora $\tilde{d}$ è l'insieme di tutti i MCD tra a e b in M. Nel passaggio a $\widetilde{M}$ si guadagna in definizione: le classi di elementi associati sono singleton, quindi, sempre nel caso in cui d sia un MCD tra a e b, $\tilde{d}$ sarà l'*unico* MCD tra $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ in $\widetilde{M}$. Analogo discorso vale per i mcm.

Ci occupiamo ora del problema dell'esistenza o meno di un MCD o di un mcm per due elementi di un monoide commutativo M. Come ben noto l'esistenza di questi non è generalmente garantita neanche nel caso in cui M sia cancellativo, ma lo è nel caso dei monoidi fattoriali. Infatti, se M è fattoriale e $a, b \in M$, esistono $n \in \mathbb{N}$, elementi irriducibili $p_1, p_2, \dots, p_n$ di M a due a due non associati tra loro ed interi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$ tali che $a \sim_M \prod_1^n p_i^{\alpha_i}$ e $b \sim_M \prod_1^n p_i^{\beta_i}$. In questo caso, posto $\delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e $\mu_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si ha che $\prod_1^n p_i^{\delta_i}$ e $\prod_1^n p_i^{\mu_i}$ sono rispettivamente un MCD ed un mcm tra a e b. Questo ovviamente prova che se M è un monoide fattoriale allora $\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità, è un reticolo. Dimostreremo ora che questa proprietà è non lontana dal caratterizzare i monoidi fattoriali.

Introduciamo una notazione che utilizzeremo nelle prossime dimostrazioni. Se a e b sono elementi di un monoide commutativo M in cui a sia cancellabile e $a|b$, allora esiste un unico $c \in M$ tale che $b = ac$. In queste condizioni (ma solo in queste) indicheremo tale c con $\left(\frac{b}{a}\right)$. Dunque, se a è cancellabile, $b = a\left(\frac{b}{a}\right)$ equivale a $a|b$.

Assumendo che M sia cancellativo, l'ipotesi che $\widetilde{M}$ sia un reticolo implica che ogni irriducibile in M è primo. Il primo passo per la dimostrazione è questo lemma:

Lemma 2.2. *Siano a, b, c elementi di un monoide commutativo cancellativo M. Sia d un MCD tra a e b in M. Supponiamo che anche ac e bc abbiano un MCD e in M. Allora $e \sim_M dc$.*

Dimostrazione. Ovviamente dc è un divisore comune ad ac e bc, quindi $dc|e$. Da $e = dc\left(\frac{e}{dc}\right)|ac$, cancellando c, segue $d\left(\frac{e}{dc}\right)|a$. Allo stesso modo si ottiene $d\left(\frac{e}{dc}\right)|b$. Di conseguenza $d\left(\frac{e}{dc}\right)$ divide il MCD d tra a e b; quindi $\left(\frac{e}{dc}\right)$ è invertibile ed $e \sim_M cd$. □

Il precedente enunciato sembra del tutto ovvio (lo è ad esempio, nell'ipotesi che M sia fattoriale), e potrebbe sorgere il dubbio che l'ipotesi che esista un MCD tra ac e bc sia superflua. Non è così, l'esistenza di un MCD tra a e b non garantisce quella di un MCD tra ac e bc; un esempio è dato nell'esercizio 2.B.5.

Lemma 2.3. *Sia M un monoide commutativo cancellativo e supponiamo che $\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità sia un reticolo. Allora, in M, ogni irriducibile è primo.*

Dimostrazione. Assunta l'ipotesi, sia p un irriducibile in M. Allora $p \notin \mathcal{U}(M)$. Per ogni $a, b \in M$, se $p|ab$ e $p \nmid a$ abbiamo ovviamente $\tilde{1}_M = \tilde{a} \wedge \tilde{p}$, dunque $\tilde{b} = \widetilde{ab} \wedge \widetilde{pb}$, per il lemma 2.2. Ma p divide sia ab che pb, quindi $p|b$. È così provato che p è primo. □

Lemma 2.4. *Sia M un monoide commutativo cancellativo e supponiamo che $\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità verifichi la condizione minimale. Allora, in M, ogni elemento non invertibile è prodotto di irriducibili.*

Dimostrazione. Sia S l'insieme degli elementi in $M \setminus \mathcal{U}(M)$ che non siano prodotto di irriducibili in M. Supposta la tesi falsa, $S \neq \varnothing$ e quindi $\widetilde{S} = \{\tilde{a} \mid a \in S\} \neq \varnothing$. Esiste allora $a \in M$ tale che $\tilde{a}$ sia minimale (rispetto a $|$) in $\widetilde{S}$. Ovviamente a non è irriducibile, quindi a ha un divisore non banale b in M ed esiste $c \in M$ tale che $a = bc$; poiché b non è invertibile e M è cancellativo, c non è associato ad a. Allora b e c sono divisori propri di a, dunque $\tilde{a} \neq \tilde{b}|\tilde{a}$ e $\tilde{a} \neq \tilde{c}|\tilde{a}$. La minimalità di $\tilde{a}$ garantisce che sia b che c sono prodotti di irriducibili in M, quindi lo stesso vale per a. Questa è una contraddizione. □

Mettendo assieme i risultati ottenuti negli ultimi due lemmi arriviamo al risultato principale di questa sezione.

Teorema 2.5. *Sia M un monoide commutativo cancellativo. Allora M è fattoriale se e solo se $\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità, è un reticolo a condizione minimale.*

Dimostrazione. Se $\widetilde{M}$ è un reticolo a condizione minimale, allora i due lemmi precedenti mostrano che ogni elemento non invertibile di M è prodotto di irriducibili e tutti gli irriducibili di M sono primi; dunque M è fattoriale. Viceversa, supponiamo che M sia fattoriale. Abbiamo già osservato che in questo caso ogni coppia di elementi di M ha MCD, quindi $(\widetilde{M}, |)$ è un reticolo. Possiamo definire un'applicazione $\tau\colon \widetilde{M} \to \mathbb{N}$, associando a ciascun $\tilde{a} \in \widetilde{M}$ il numero dei fattori in una decomposizione di a in prodotto di irriducibili (poiché M è fattoriale questo numero è univocamente definito e non dipende dalla scelta del rappresentante a in $\tilde{a}$); si osservi che $\tilde{1}_M^\tau = 0$. Ora, se $\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{M}$ e $\tilde{a}|\tilde{b}$, allora $\tilde{b}^\tau \leq \tilde{a}^\tau$ e $\tilde{b}^\tau < \tilde{a}^\tau$ se $\tilde{a} \neq \tilde{b}$. Se ne deduce che se S è un sottoinsieme non vuoto di $\widetilde{M}$ e $n = \min S^{\vec{\tau}}$, ogni $\tilde{a} \in S$ tale che $\tilde{a}^\tau = n$ è un elemento minimale in S. Questo mostra che $(\widetilde{M}, |)$ verifica la condizione minimale. A questo punto la dimostrazione è completa. □

Corollario 2.6. *Sia M un monoide commutativo cancellativo. Allora M è fattoriale se e solo se $\widetilde{M}$ è fattoriale.*

Dimostrazione. Posto $M_1 = \widetilde{M}$, abbiamo ovviamente $\widetilde{M}_1 \simeq \widetilde{M}$; altrettanto ovvio è che $\widetilde{M}$ è cancellativo. Dunque, per il teorema 2.5, $\widetilde{M}$ è fattoriale se e solo se $\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità, è un reticolo a condizione minimale, ma, per lo stesso teorema, questo equivale all'essere M fattoriale. □

Osserviamo esplicitamente che se M è fattoriale, i suoi elementi irriducibili sono gli a tali che $\tilde{a}$ sia un *atomo* nel reticolo $\widetilde{M}$.

Si noti che nella dimostrazione della sufficienza della condizione nel teorema 2.5 abbiamo usato l'esistenza di MCD tra coppie di elementi di M, ma non sono apparsi nella discussione minimi comuni multipli, quindi, apparentemente, abbiamo provato un risultato più forte di quello enunciato: M è fattoriale se e solo se $\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità, è un inf-semireticolo a condizione minimale. In realtà, l'esistenza di MCD e l'esistenza di mcm in un monoide commutativo non sono affatto condizioni indipendenti tra loro, come stiamo per verificare; ne seguirà che questo secondo enunciato non differisce sostanzialmente dal primo.

Proposizione 2.7. *Sia M un monoide commutativo cancellativo.*

(i) *Per ogni $a, b \in M$, se esiste un mcm m tra a e b, allora esiste un MCD d tra a e b, e si ha $ab \sim_M dm$.*

(ii) *Se per ogni $a, b \in M$ esiste un MCD tra a e b, allora per ogni $a, b \in M$ esiste un mcm tra a e b.*

Dimostrazione. Siano a, $b \in M$, ed esista $m \in M$ tale che $\tilde{m} = \tilde{a} \vee \tilde{b}$. Poiché m divide ab, possiamo porre $d = \left(\frac{ab}{m}\right)$, dunque $md = ab$. Da quest'ultima uguaglianza seguono $b = \left(\frac{m}{a}\right)d$ e $a = \left(\frac{m}{b}\right)d$, dunque d divide sia a che b. Sia e un arbitrario divisore comune ad a e b. Posto $n := a\left(\frac{b}{e}\right)$ abbiamo $ne = ab = b\left(\frac{a}{e}\right)e$, quindi, per la cancellabilità in M, $n = b\left(\frac{a}{e}\right)$. Dunque n è un multiplo comune ad a e b, quindi $m|n$. Da $ne = ab = md$ segue $\left(\frac{n}{m}\right)e = d$, quindi $e|d$. È così provato che d è un MCD tra a e b; la dimostrazione di (i) è completa.

Proviamo ora (ii). Nell'ipotesi di (ii), siano $a, b \in M$ e $\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \tilde{b}$. Abbiamo $a\left(\frac{b}{d}\right) = b\left(\frac{a}{d}\right)$, perché moltiplicando per d ciascuno dei due membri di questa uguaglianza si ottiene ab. Chiamando questo elemento m, abbiamo così $ab = md$. Chiaramente $a|m$ e $b|m$; proveremo che $\tilde{m} = \tilde{a} \vee \tilde{b}$. Sia n un multiplo comune ad a e b. Per ipotesi, n ed m hanno in M un MCD, chiamiamolo n_1. Ovviamente,

a e b dividono n_1, che a sua volta divide m. Allora $ab = md = n_1\left(\frac{m}{n_1}\right)d = a\left(\frac{n_1}{a}\right)\left(\frac{m}{n_1}\right)d$, sicché $b = \left(\frac{n_1}{a}\right)\left(\frac{m}{n_1}\right)d$ e b è diviso da $e := \left(\frac{m}{n_1}\right)d$. Allo stesso modo $e|a$ e quindi, poiché $\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \tilde{b}$, abbiamo $e|d$. Pertanto $e \sim_M d$ e così $\left(\frac{m}{n_1}\right) = \left(\frac{e}{d}\right)$ è invertibile. Di conseguenza $m \sim_M n_1$ e quindi $m|n$. Concludiamo che $\tilde{m} = \tilde{a} \vee \tilde{b}$; la dimostrazione è ora completa. □

Può sorprendere la mancanza di simmetria tra le due parti dell'enunciato della proposizione 2.7: l'esistenza di un mcm per una coppia di elementi di M comporta l'esistenza del corrispondente MCD; per ottenere l'implicazione inversa abbiamo richiesto che *tutte* le coppie di elementi di M abbiano un mcm. L'esempio costruito nell'esercizio 2.B.4 mostra che questa asimmetria è inevitabile: è possibile che, in un monoide commutativo cancellativo, due elementi abbiano un MCD ma non un mcm.

Abbiamo comunque dimostrato che le condizioni di esistenza di MCD e mcm, considerate globalmente, sono equivalenti. Abbiamo così:

Corollario 2.8. *Se M è un monoide commutativo cancellativo, sono equivalenti le proprietà:*
(i) *$\widetilde{M}$, ordinato per divisibilità, è un reticolo.*
(ii) *Per ogni $a, b \in M$, esiste un MCD tra a e b in M (vale a dire: $\widetilde{M}$ è un inf-semireticolo).*
(iii) *Per ogni $a, b \in M$, esiste un mcm tra a e b in M (vale a dire: $\widetilde{M}$ è un sup-semireticolo).*

Esercizi, Esempi, Osservazioni.

2.B.1. Verificare in dettaglio tutte le affermazioni fatte e non dimostrate in questa sezione.

2.B.2. Se M è un monoide commutativo, la relazione di divisibilità non è, in generale, d'ordine; lo è se e solo se $\sim_M$ è l'uguaglianza. In questo caso, l'unità è l'unico elemento invertibile di M. *Se M è cancellativo* questa condizione si inverte: la divisibilità in M è una relazione d'ordine se e solo se $\mathcal{U}(M) = \{1_M\}$. Nel caso generale questa equivalenza non vale; chi è interessato può verificarlo con l'esempio fornito al prossimo esercizio.

2.B.3. Si definisca sull'insieme $S = (\mathbb{N} \times \{0,1\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$ un'operazione binaria $*$ ponendo, per ogni $u, v, s, t \in \mathbb{N}$, $(u, v) * (s, t) = (u + s, r)$, dove r è $v + t$ se $u = s = 0$, il resto di $v + t$ modulo 2 altrimenti. Si verifichi che $(S, *, (0, 0))$ è un monoide commutativo e che in S esiste un solo elemento invertibile (quello neutro), ma gli elementi $a = (1, 0)$ e $b = (1, 1)$ sono associati. In questo monoide, dunque, la relazione di divisibilità non è d'ordine.

2.B.4. In questo esercizio viene costruito un monoide commutativo cancellativo M, generato da elementi a, b, c, d con la proprietà che a e c siano coprimi, ed abbiano quindi un MCD, ma non abbiano un mcm.

Sia F il gruppo abeliano libero sulla base $\{a_0, b_0, c_0, d_0\}$. Siano poi H il sottogruppo di F generato da $a_0 b_0 c_0^{-1} d_0^{-1}$ e $P = \{a_0^\alpha b_0^\beta c_0^\gamma d_0^\delta \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}\}$ (P è un monoide commutativo libero sulla base $\{a_0, b_0, c_0, d_0\}$). È chiaro che $M := PH/H$ è un monoide commutativo cancellativo (perché immerso nel gruppo F/H) generato da $a := a_0 H$, $b := b_0 H$, $c := c_0 H$, $d := d_0 H$, in cui vale l'uguaglianza $ab = cd$. Si provi che ciascuno di a, b, c, d è irriducibile, quindi 1_M è un MCD tra a e c, ma non esistono mcm tra a e c.

Suggerimento: si può osservare che se, per $i \in \{1, 2\}$, poniamo $x_i = a^{\alpha_i} b^{\beta_i} c^{\gamma_i} d^{\delta_i}$, dove gli esponenti sono interi arbitrari, abbiamo $x_1 = x_2$ se e solo se $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = \delta_2 - \delta_1$. Da ciò si può dedurre che un elemento $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ di F/H è in M se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale che $\alpha + \lambda$, $\beta + \lambda$, $\gamma - \lambda$ and $\delta - \lambda$ siano tutti non negativi, ovvero: $\min\{\alpha, \beta\} \geq \max\{-\gamma, -\delta\}$. Visto ciò, diventa facile stabilire se due assegnati elementi di M si dividano o meno (e che 1_M è l'unico elemento invertibile di M), ed arrivare alle conclusioni desiderate.

2.B.5. In questo esercizio viene costruito un monoide commutativo cancellativo M, con elementi a, b, c, in cui esiste un MCD tra a e b ma non esiste un MCD tra ac e bc. La costruzione è simile a quella dell'esercizio 2.B.4, ma un po' più elaborata.

Sia F il gruppo abeliano libero di rango 7, sulla base $\{x_1, x_2, \dots, x_7\}$. Siano poi H il sottogruppo di F generato da $x_1x_3x_4x_5^{-1}x_6^{-1}$ e $x_2x_3x_4x_5^{-1}x_7^{-1}$. Sia poi $P = \{\prod_{i=1}^7 x_i^{\alpha_i} \mid (\forall\, i \in \{1,2,\dots,7\})(\alpha_i \in \mathbb{N})\}$, il monoide (commutativo libero) generato in F da $x_1, \dots, x_7$, e sia $M = PH/H$. Allora M è un monoide commutativo cancellativo. Ponendo $a = x_1x_4H$, $b = x_2x_4H$, $c = x_3H$, si verifichi che $d := x_4H$ è un MCD in M tra a e b, ma ac e bc non hanno un MCD in M.

Suggerimento: si osservi che F/H è abeliano libero di rango 5: ogni elemento di F/H può essere rappresentato (unicamente) come xH, dove $x = \prod_{i=1}^5 x_i^{\alpha_i}$ per opportuni interi $\alpha_1, \dots, \alpha_5$. Si verifichi poi che questo l'elemento è in M se e solo se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq -\alpha_5$. A questo punto è facile verificare che l'unità H di M e d sono gli unici divisori comuni ad a e b. Inoltre x_5H divide ac e bc ma non cd, quindi cd non è un MCD tra ac e bc.

2.3 Parti sature e saturazioni

Una parte X di un semigruppo commutativo $(M, \cdot)$ si dice *satura* se e solo se, per ogni $x \in X$, ogni divisore (in M) di x appartiene a X. È chiaro che ogni intersezione di parti sature di M è ancora satura. Per ogni $S \subseteq M$, la parte satura generata da S è l'intersezione delle parti sature di M contenenti S, quindi la più piccola parte satura di M contenente S. Questa è facile da descrivere:

Lemma 2.9. *Siano $(M, \cdot)$ un semigruppo commutativo e $S \subseteq M$. Allora la parte satura T generata da S in M è $S \cup \bigcup\{\mathrm{Div}_M(s) \mid s \in S\}$, che coincide con $\bigcup\{\mathrm{Div}_M(s) \mid s \in S\}$ se M è un monoide. Se S è una parte chiusa rispetto a $\cdot$, anche T è chiusa; se inoltre M è un monoide T ne è un sottomonoide.*

La semplice dimostrazione viene lasciata per esercizio. Se M è un monoide, è chiaro che ogni sua parte satura non vuota contiene $\mathcal{U}(M)$.

Chiameremo *saturazione* di una parte S di un semigruppo M la parte satura generata dalla parte chiusa generata da S in M (quindi la parte "chiusa e satura" generata da S). Indicheremo la saturazione di S in M come $S^{\updownarrow}$ (almeno quando si può sottintendere un riferimento a M); per quanto detto sopra $S^{\updownarrow}$ consiste dei divisori di prodotti di elementi di S, e se M è un monoide e $S \neq \varnothing$, allora $S^{\updownarrow}$ ne è un sottomonoide.

Lemma 2.10. *In ogni monoide commutativo M, il sottoinsieme S costituito dagli elementi invertibili e dagli elementi che siano prodotti di primi cancellabili*[4] *in M è un sottomonoide saturo.*

Dimostrazione. Che S sia un sottomonoide di M è chiaro, bisogna solo verificare che è saturo. Ovviamente i divisori degli elementi invertibili sono invertibili, quindi appartengono ad S; va dimostrato che sono in S tutti i divisori in M di ogni elemento della forma $p_1p_2\cdots p_n$, dove $n \in \mathbb{N}^+$ e ciascuno dei p_i è un primo cancellabile di M. Possiamo farlo ragionando per induzione su n, essendo l'asserto ovviamente vero se $n = 1$. Per semplicità, poniamo $s = p_1p_2\cdots p_{n-1}$ e $p = p_n$; per ipotesi induttiva (o direttamente, se $n = 1$) $\mathrm{Div}_M(s) \subseteq S$. Sia $a \in \mathrm{Div}_M(sp)$, dunque esiste $b \in M$ tale che $ab = sp$. Dal momento che p è primo e divide ab, o $p|_M a$ oppure $p|_M b$. Nel primo caso, esiste $a_1 \in M$ tale che $a = pa_1$, ma allora, poiché p è cancellabile, $s = a_1b$ e $a_1|s$, quindi $a_1 \in S$ e così $a = pa_1 \in S$. Nel secondo caso, altrettanto chiaramente, $a|s$, quindi, ancora, $a \in S$. L'asserto è così dimostrato. □

[4] a scanso di equivoci: ogni primo cancellabile è in S: è un prodotto con un solo fattore.

Esercizi.

2.C.1. Sia $(R, +, \cdot)$ un anello commutativo ed H un suo sottogruppo additivo. Allora $H \lhd R$ se e solo se $R \setminus H$ è satura in $(R, \cdot)$.

2.C.2. Sia R un anello commutativo. Qual è la parte satura di $(R, \cdot)$ generata da $\{0_R\}$?

2.C.3. Sia $S = \{a, b, c, d\}$ un insieme di cardinalità 4. Nel monoide $(\mathcal{P}(S) \setminus \mathcal{P}_1(S), \cup)$, la parte $\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ è satura, ma il sottomonoide (ovvero la parte chiusa) che essa genera non lo è (notazione: $\mathcal{P}_1(S) = \{\{x\} \mid x \in S\}$).

2.C.4. Verificare che l'insieme degli elementi cancellabili in un semigruppo commutativo ne è una parte chiusa satura e lo stesso vale per l'insieme degli invertibili in un monoide commutativo.

3 Ideali

La teoria degli anelli commutativi è, in larga misura, la teoria dei loro ideali. In questo capitolo raccogliamo alcune osservazioni generali sugli ideali di un anello commutativo e sulle operazioni definite per essi, concentrando l'attenzione sugli ideali primi e su quelli massimali, che spesso svolgono un ruolo particolarmente significativo.

3.1 Operazioni tra parti e ideali in un anello

Ricordiamo dalla sottosezione 1.2.3 che nell'insieme delle parti di un anello commutativo R sono definite due operazioni binarie di addizione e moltiplicazione: se $H, K \subseteq R$,

$$H + K = \{h + k \mid h \in H \wedge k \in K\}$$

è l'insieme di tutte le somme tra un elemento di H ed uno di K, mentre HK è il sottomonoide di $(R, +)$ generato da $\{hk \mid h \in H \wedge k \in K\}$, dunque

$$HK = \left\{ \sum_{i=1}^{n} h_i k_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}(h_i \in H \wedge k_i \in K) \right\}.$$

Le operazioni di addizione e moltiplicazione di $\mathcal{P}(R)$ sono associative (questo è del tutto ovvio nel caso dell'addizione, richiede un attimo di riflessione in più per la moltiplicazione; si veda l'esercizio 1.D.2 nella sottosezione 1.2.3). Rispetto all'addizione l'ideale nullo $0 = \{0_R\}$ è elemento neutro, quindi $(\mathcal{P}(R), +, 0)$ è un monoide.

Un ideale di R, come già detto, è semplicemente un sottopremodulo del premodulo R_R, quindi un sottogruppo H di $(R, +)$ tale che $HR \subseteq H$. Indicheremo con $\mathfrak{I}(R)$ l'insieme degli ideali di R. Questo insieme è chiuso sia rispetto all'addizione che rispetto alla moltiplicazione. Infatti, sempre dalla sottosezione 1.2.3, sappiamo che H e K sono ideali di R, allora $H + K$ è ancora un ideale di R, precisamente l'ideale generato da H e K, e abbiamo poi:

Lemma 3.1. *Siano R un anello commutativo, $H, K \lhd R$ e $X \subseteq R$. Allora:*
(i) *XH è un ideale di R contenuto in H;*
(ii) *$X(H + K) = XH + XK$;*
(iii) *$\mathfrak{I}(R)$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione tra parti di R. Se R è unitario, $(\mathfrak{I}(R), \cdot)$ è un monoide di elemento neutro R.*

Dimostrazione. La (i) segue da $(XH)R = X(HR) \subseteq XH$. Per la (ii): gli elementi di $X(H + K)$ sono somme di prodotti della forma $x(h + k)$ al variare di $x \in X$, $h \in h$ e $k \in K$. Ma $x(h + k) = xh + xk \in XH + XK$; dunque $X(H + K) \subseteq XH + XK$. D'altra parte, essendo $H, K \subseteq H + K$, certamente $XH, XK \subseteq X(H + K)$, quindi da $X(H + K) \lhd R$ segue $XH + XK \subseteq X(H + K)$. È così verificata la (ii). La (iii) segue immediatamente da (i) e dall'osservazione 1.D.1. □

Caso particolare della (i) del lemma precedente è che il prodotto HK tra due ideali H e K è sempre contenuto nella loro intersezione: $HK \subseteq H \cap K$. Una condizione sufficiente perché qui valga l'uguaglianza è data da uno dei prossimi risultati.

Due ideali H e K di un anello R si dicono *comassimali* se e solo se $R = H + K$.

Lemma 3.2. *Siano R un anello commutativo unitario, e $H, K, I \lhd R$. Se H e K sono comassimali con I, allora anche HK è comassimale con I.*

Dimostrazione. Da $R = H+I = K+I$ e dalla (ii) del lemma 3.1 segue $R = RR = (H+I)(K+I) = HK + (H+K+I)I \subseteq HK + I$, quindi $R = HK + I$. □

Lemma 3.3. *Siano R un anello commutativo unitario, $n \in \mathbb{N}^+$ e $H_1, H_2, \dots, H_n$ ideali di R a due a due comassimali. Allora $H_1 H_2 \cdots H_n = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$.*

Dimostrazione. Non c'è nulla da provare se $n = 1$. Per il caso $n = 2$: da $R = H_1 + H_2$ deduciamo $H_1 \cap H_2 = (H_1 \cap H_2)(H_1 + H_2) = (H_1 \cap H_2)H_1 + (H_1 \cap H_2)H_2 \subseteq H_2 H_1 + H_1 H_2 = H_1 H_2$, quindi $H_1 \cap H_2 = H_1 H_2$. Per gli altri casi basta procedere per induzione: assunto l'asserto vero per $n-1$ ideali, quindi $I := H_1 H_2 \cdots H_{n-1} = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n-1}$, siccome I è comassimale con H_n come segue dal lemma 3.2, si ha $H_1 H_2 \cdots H_n = I H_n = I \cap H_n = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$. □

Dunque, il prodotto tra due ideali comassimali in un anello commutativo unitario coincide con la loro intersezione. In altri casi questa uguaglianza può non valere, alcuni sono illustrati nell'esempio 3.A.1.

Se X è una parte dell'anello commutativo R, l'ideale generato da X in R è descritto dal lemma 1.6 nel caso in cui R sia unitario, dall'esercizio 1.D.3 (o dalla proposizione 1.34 (i)) nel caso generale. Questo ideale viene spesso indicato con (X); si ha dunque $(X) = XR + \langle X \rangle$, e $(X) = XR$ se R è unitario o se, comunque, $X \subseteq XR$. Usuali varianti di questa notazione sono scritture come $(a, b, c, \dots)$ per $(\{a, b, c, \dots\})$ o $(a \mid \dots)$ per $(\{a \mid \dots\})$.

È generalmente semplice esprimere un prodotto tra ideali in termini dei rispettivi generatori: se X e Y sono parti di un anello commutativo R, in R si ha infatti $(X)(Y) = (xy \mid x \in X \wedge y \in Y)$, come si verifica immediatamente. Ad esempio, se a, b, c sono elementi di R, $H = (a)$ e $K = (b, c)$, allora $H^2 = (a^2)$, $HK = (ab, ac)$ e $K^2 = (b^2, c^2, bc)$.

Un'altra operazione tra ideali dell'anello commutativo R è quella di divisione, caso particolare dell'annullatore nei quozienti che abbiamo già definito per premoduli: se $H \lhd R$ e $X \subseteq R$ (non necessariamente $X \lhd R$), $(H : X)_R = \operatorname{Ann}_R(X + H/H) = \{r \in R \mid Xr \subseteq H\} \lhd R$; questo ideale viene anche chiamato *trasportatore* o *conduttore* di X in H. Alla lista di proprietà sostanzialmente ovvie sugli annullatori che si chiede a chi legge di verificare aggiungiamo (con la consueta sostituzione nella notazione di un singleton col suo elemento):

Lemma 3.4. *Siano R un anello commutativo, $H \lhd R$ e $X \subseteq R$. Allora $H \subseteq (H : X)_R$. Inoltre, per ogni $a, b \in R$:*
(i) $(H : a)_R \subseteq (H : ab)_R$;
(ii) $H \cap aR = a(H : a)_R$.

Esempi, osservazioni , esercizi.

3.A.1. Nei lemmi 3.2 e 3.3 è essenziale l'ipotesi che l'anello ambiente (o un suo opportuno quoziente) sia unitario. Se, ad esempio, R è un anello non nullo con prodotto costante nullo, R è comassimale con qualsiasi suo ideale proprio ma $RR = 0$ non lo è, e, pur essendo R comassimale con sé stesso, $0 = RR \neq R \cap R = R$. I due enunciati restano veri (verificarlo) se l'ipotesi che R sia unitario è sostituita dall'ipotesi (solo apparentemente più debole) che sia unitario R/I nel lemma 3.2, o $R/(H_1 H_2 \cdots H_n)$ nel lemma 3.3.

Anche nel caso degli anelli unitari è facile trovare esempi di coppie di ideali per le quali prodotto ed intersezione non coincidano. Ad esempio, in $\mathbb{Z}$ si ha $2\mathbb{Z} \cdot 2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \neq 2\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z}$.

Naturalmente è anche possibile costruire esempi di ideali, distinti o meno, H e K tali che $HK = H \cap K$ pur non essendo H e K comassimali. Un modo molto facile è questo: se R

è un anello commutativo unitario e S è un suo sottoanello che sia unitario come anello ma non come sottoanello di R, basta scegliere come H e K due ideali di R contenuti in S tali che $S = H + K$. Una possibile scelta è data da: $R = \mathcal{P}(X)$ per un qualche insieme X, e $S = \mathcal{P}(Y)$, $H = \mathcal{P}(A)$ e $K = \mathcal{P}(B)$, dove $A \cup B = Y \subset X$.

3.A.2. Non è difficile interpretare le operazioni tra ideali nel caso dell'anello degli interi (si tratta in ultima analisi del teorema di Bézout). Quando è che due ideali $a\mathbb{Z}$ e $b\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$ sono comassimali? In termini di aritmetica elementare, cosa dicono i lemmi 3.2 e 3.3 se applicati all'anello degli interi?

3.A.3. Dedurre dall'esercizio 1.H.3: se a è un elemento cancellabile di un anello commutativo R e $a \in aR$, allora R è unitario.

3.2 Ideali primi e massimali

Centrale nella teoria degli anelli commutativi è la nozione di ideale primo. In diversi casi che incontreremo le proprietà degli ideali primi di un anello commutativo unitario R determinano le proprietà di tutti gli ideali di R ed in definitiva quelle di R.

3.2.1 Primi

La definizione è senz'altro già nota: in un anello commutativo R un ideale P è *primo* se e solo se R/P è un dominio di integrità, cioè se e solo se $P \neq R$ e, per ogni $r, s \in R$, se $rs \in P$ allora almeno uno tra r e s è in P, vale a dire: $R \smallsetminus P$ è una parte chiusa e non vuota di R rispetto alla moltiplicazione—si ricorda che, almeno in queste note, l'anello nullo non è considerato dominio di integrità. L'insieme degli ideali primi di R si chiama *spettro* (o spettro primo) di R e si indica con $\operatorname{Spec}(R)$. Vediamo altre caratterizzazioni elementari degli ideali primi:

Lemma 3.5. *Siano R un anello commutativo e P un ideale proprio di R. Allora sono equivalenti:*
(i) *P è primo in R;*
(ii) *per ogni $r \in R \smallsetminus P$ si ha $(P : r)_R = P$;*
(iii) *scelti comunque $I, J \lhd R$, se $IJ \subseteq P$ allora $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$;*
(iv) *scelti comunque I e J tra gli ideali di R contenenti P, se $IJ \subseteq P$ allora $I = P$ o $J = P$.*

Dimostrazione. Siano $r \in R$ e $K_r = (P : r)_R$. Allora $P \subseteq K_r$ e K_r/P è l'insieme degli elementi k di R/P tali che $(r + P)k = 0_{R/P}$. Dunque, $K_r \neq P$ se e solo se $r + P$ è un divisore dello zero in R/P. Pertanto la (ii) significa precisamente che R/P non ha divisori dello zero non nulli, cioè che P è un ideale primo. Dunque (ii) equivale a (i).

Valga (ii), e siano $I, J \lhd R$ tali che $IJ \subseteq P$ e $I \not\subseteq P$. Scelto $r \in I \smallsetminus P$, abbiamo allora $J \subseteq (P : r)_R = P$. Questo mostra che (ii) implica (iii). Che (iii) implichi (iv) è ovvio.

Infine, se P non è primo esistono $r, s \in R \smallsetminus P$ tali che $rs \in P$. Allora, detti I e J, nell'ordine, gli ideali di R generati da $P \cup \{r\}$ e $P \cup \{s\}$, si ha $IJ \subseteq P$ (ad esempio perché $I = P + rR + \{nr \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e J ha una descrizione analoga), $P \subset I$ e $P \subset J$, quindi non vale la (iv). È così provato che (iv) implica (i). □

Dunque, se un ideale primo è il prodotto di (un numero finito di) ideali che lo contengono, allora è uno di essi. Una proprietà in un senso (molto lasco) duale è nota come *prime-avoidance*: se un sottoanello di un anello commutativo non è incluso in nessuno degli ideali in un certo insieme finito di ideali primi, allora non è incluso (cioè 'evita') la loro unione:

Lemma 3.6 (Il 'prime-avoidance lemma')**.** *Sia $\mathcal{P}$ un insieme finito di ideali primi in un anello commutativo R. Allora ogni sottoanello A di R che sia contenuto in $\bigcup \mathcal{P}$ è contenuto in almeno un elemento di $\mathcal{P}$.*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo che R, A e $\mathcal{P}$ forniscano un controesempio in cui $|\mathcal{P}|$ ha il minimo valore possibile. Chiaramente $|\mathcal{P}| > 1$ e, per minimalità, scelto comunque $P \in \mathcal{P}$ e posto $\hat{\mathcal{P}}_P = \mathcal{P} \smallsetminus \{P\}$, si ha $A \nsubseteq \bigcup \hat{\mathcal{P}}_P$. Per ogni $P \in \mathcal{P}$ possiamo allora scegliere $a_P \in A \smallsetminus \bigcup \hat{\mathcal{P}}_P$. Vediamo che a_P appartiene a P, dal momento che non appartiene a nessun altro elemento di $\mathcal{P}$. Poniamo anche, sempre per ogni $P \in \mathcal{P}$, $b_P = \prod_{Q \in \hat{\mathcal{P}}_P} a_Q$; si ha $b_P \in A \cap Q$ per ogni $Q \in \hat{\mathcal{P}}_P$, ma $b_P \notin P$, perché P è primo e, per ogni $Q \in \hat{\mathcal{P}}_P$, $a_Q \notin P$. Sia ora $a = \sum_{P \in \mathcal{P}} b_P$. Ovviamente $a \in A$, quindi esiste $Q \in \mathcal{P}$ tale che $a \in Q$. Ma $b_P \in Q$ per ogni $P \in \hat{P}_Q$ e $b_Q \notin Q$, questa è dunque una contraddizione. □

Come chi legge già sa,[1] un ideale H di un anello commutativo R si dice *massimale* se è massimale nell'insieme degli ideali propri di R, ordinato per inclusione. È anche ben noto, dai corsi elementari di algebra, che se R è unitario, questo equivale a richiedere che R/H sia un campo. Una caratterizzazione degli ideali massimali che comprenda anche il caso non unitario è data da:

Lemma 3.7. *Sia H un ideale di un anello commutativo R. Sono allora equivalenti:*
(i) *$H \lhd \cdot\, R$;*
(ii) *l'R-premodulo R_R/H è semplice;*
(iii) *si verifica una delle due:*
  a) *R/H è un campo;* *oppure*
  b) *$R^2 \subseteq H$ e $|R/H|$ è un numero primo.*

Inoltre, se è verificata (iii.a) H è primo, se è verificata (iii.b) non lo è. Se R è unitario (iii.b) non si può verificare.

Dimostrazione. È sostanzialmente ovvio (ed è stato già osservato provando la proposizione 1.24) che (i) e (ii) siano equivalenti, altrettanto chiaramente (iii) implica (ii). Viceversa, se R_R/H è semplice la proposizione 1.24 mostra che o R_R/H è annullato da R (ovvero: $R^2 \subseteq H$) ed ha ordine primo, oppure R/H è un campo; vale quindi (iii). L'equivalenza è così provata; l'annotazione ulteriore è ovvia. □

Dunque, *gli ideali massimali di un anello commutativo unitario sono tutti primi*, ma lo stesso non vale per anelli non unitari. Ad esempio, se R è un anello di cardinalità un numero primo e con moltiplicazione costante nulla, allora il suo ideale nullo è del tipo descritto in (iii.b), quindi è massimale ma non primo.

L'esempio degli ideali massimali in anelli commutativi unitari si generalizza in un lemma che fornisce un utilissimo metodo generale per la costruzione di ideali primi.

Lemma 3.8. *Sia R un anello commutativo; siano S una parte chiusa di $(R, \cdot)$ e $H \lhd R$ tali che $S \cap H = \varnothing \neq S$. Allora l'insieme $\mathcal{S} = \{I \lhd R \mid I \supseteq H \wedge I \cap S = \varnothing\}$, ordinato per inclusione, è induttivo; ogni suo elemento massimale è un ideale primo di R.*

Dimostrazione. È chiaro che l'unione di una arbitraria catena non vuota di elementi di $\mathcal{S}$ è in $\mathcal{S}$ (certamene è un ideale, per il lemma 1.17), quindi $\mathcal{S}$ è induttivo. Sia P un suo elemento massimale. Dal momento che $P \cap S = \varnothing$, $P \subset R$. Se P non è primo esistono $I, J \lhd R$ tali che $IJ \subseteq P \subset I, J$. La massimalità di P in $\mathcal{S}$ implica $I, J \notin \mathcal{S}$, dunque $I \cap S \neq \varnothing \neq J \cap S$. Siano $i \in I \cap S$ e $j \in J \cap S$. Allora $ij \in S$ ma, d'altra parte, $ij \in IJ \subseteq P$. Dunque $ij \in P \cap S$, contraddicendo così la scelta di P. Si conclude in questo modo che P è un ideale primo. □

[1] la nozione, del resto, è stata già usata in queste note.

Ad esempio, se R è unitario, $S = \{1_R\}$ e $H = 0$, l'insieme $\mathcal{S}$ descritto nell'enunciato è l'insieme degli ideali propri di R, quindi il lemma fornisce di nuovo l'informazione che R ha ideali massimali (il già menzionato teorema di Krull) e questi sono tutti primi.

Un'altra applicazione del lemma 3.8 è la seguente descrizione delle parti chiuse e sature di un anello in termini di ideali primi:

Lemma 3.9. *Sia R un anello commutativo e sia S una sua parte non vuota. Allora S è una parte chiusa e satura di $(R, \cdot)$ se e solo se $R \setminus S$ è unione di ideali primi di R.*

Dimostrazione. Per ogni $P \in \operatorname{Spec}(R)$, sappiamo che $R \setminus P$ è una parte chiusa di $(R, \cdot)$, ed è anche satura per l'esercizio 2.C.1. Sia $\varnothing \neq \mathcal{S} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$. Poiché ogni intersezione di parti chiuse e sature ha le stesse proprietà, $R \setminus \bigcup \mathcal{S} = \bigcap_{P \in \mathcal{S}} (R \setminus P)$ è una parte chiusa e satura di $(R, \cdot)$. Viceversa, sia S una parte chiusa e satura di $(R, \cdot)$. Per ogni $a \in R \setminus S$ si ha $aR \cap S = \varnothing$, dal momento che se esistesse $s \in aR \cap S$ allora a sarebbe un divisore di $s \in S$ e quindi apparterrebbe ad S perché S è saturo. Possiamo allora utilizzare il lemma 3.8 per ottenere un ideale primo P_a disgiunto da S (quindi contenuto in $R \setminus S$) e contenente aR. Abbiamo $P_a \subset R$; scelto $r \in R \setminus P_a$ da $ar \in aR \subseteq P_a$ e $r \notin P_a$ deduciamo $a \in P_a$. A questo punto è chiaro che $R \setminus S = \bigcup \{P_a \mid a \in R \setminus S\}$. La dimostrazione è così completata. □

Una caratterizzazione degli anelli fattoriali Si ricorda che gli anelli fattoriali sono, per definizione, i domini di integrità unitari R tali che $(R \setminus 0, \cdot)$ sia un monoide fattoriale. Una conseguenza del lemma 3.9 (e del lemma 2.10) è la seguente caratterizzazione:

Lemma 3.10. *Sia R un dominio di integrità unitario. Allora R è un anello fattoriale se e solo se ogni suo ideale primo non nullo contiene un elemento primo non nullo.*

Dimostrazione. Supponiamo R fattoriale, e siano $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$ e $0_R \neq a \in P$. Allora $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ per opportuni $n \in \mathbb{N}^+$ ed elementi primi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ di R. Poiché P è primo, da $p_1 p_2 \cdots p_n \in P$ segue che almeno uno dei p_i è contenuto in P. Questo prova che la condizione è necessaria.

Viceversa, assumiamo che ogni ideale primo non nullo di R contenga un primo non nullo. Per il lemma 2.10, gli elementi di R che siano invertibili oppure prodotti di primi non nulli costituiscono un sottomonoide saturo S di $(R, \cdot)$, dunque, come segue dal lemma 3.9, $R \setminus S$ è unione di ideali primi. Ma, per ipotesi, $S \cap P \neq \varnothing$ per ogni ideale primo non nullo di R; di conseguenza $R \setminus S = 0$. Questo significa che ogni elemento non nullo e non invertibile di R è prodotto di primi, vale a dire: R è fattoriale. □

Corollario 3.11. *Sia P un elemento minimale (per inclusione) tra gli ideali primi non nulli di un anello fattoriale. Allora P è principale.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente, P contiene un elemento primo non nullo p. Allora $0 \neq pR \in \operatorname{Spec}(R)$ e quindi $pR = P$ per la minimalità di P. □

Facciamo infine un'accenno alla *dimensione di Krull* di un anello commutativo unitario. Se R è un tale anello, si dice che R ha per dimensione di Krull un intero n (o, semplicemente, ha dimensione n) se n è la massima lunghezza possibile per una catena di ideali primi di R, cioè, per essere più espliciti, se $n + 1$ è il massimo delle cardinalità degli insiemi di ideali primi di R che siano totalmente ordinati per inclusione.[2] Ad esempio, i campi hanno dimensione di Krull 0, l'anello degli interi ha dimensione 1, perché le catene di lunghezza massima di ideali primi in $\mathbb{Z}$ sono quelle costituite dall'ideale nullo e da un ideale della forma $p\mathbb{Z}$, dove p è un numero primo.

[2] tradizionalmente si chiama lunghezza di una catena finita il numero dei suoi elementi meno uno.

Esercizi.

3.B.1. Per ogni intero n, l'insieme dei numeri interi coprimi con n è un sottomonoide saturo di $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Interpretare questo fatto alla luce del lemma 3.9.

3.B.2. Siano R un anello commutativo, $H \lhd R$ e $P \in \operatorname{Spec}(H)$. Verificare che $P^* = (P : H)_R \in \operatorname{Spec}(R)$ e $P = H \cap P^*$.

3.B.3. Due risultati in teoria dei gruppi (il primo dei quali del tutto elementare, il secondo un poco meno) mostrano che un gruppo non può essere unione di due suoi sottogruppi propri e che se è unione di un numero finito di sottogruppi almeno uno di questi deve avere indice finito. Usare questi due fatti per estendere il lemma 3.6 in questi modi (in entrambi i casi $\mathcal{P}$ è un insieme finito di ideali di R):

- vale la stessa conclusione del lemma 3.6 se l'ipotesi $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ è sostituita dall'ipotesi che al massimo due ideali in $\mathcal{P}$ non siano primi;
- vale la stessa conclusione del lemma 3.6 se l'ipotesi $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ è sostituita dalle ipotesi che R sia unitario, $A \lhd R$ e valga una delle due: (a) R/M è infinito per ogni $M \lhd\cdot R$; (b) R contiene un campo infinito come sottoanello unitario.

Il primo enunciato si trova (all'incirca: lì gli anelli sono unitari) in Sharp, Theorem 3.61. A proposito del secondo si osservi che un anello unitario ha la proprietà che tutti i suoi ideali massimali abbiano indice infinito se ha un sottoanello unitario con questa proprietà. Dunque, la condizione in (a) è conseguenza di (b).

A questo proposito, partendo dal gruppo V_4 di Klein (il gruppo non ciclico di ordine 4), che è l'unione dei suoi tre sottogruppi non banali, mostrare che esiste un anello commutativo R che ha un campo infinito come sottoanello ed un ideale massimale che è unione di un numero finito di ideali propriamente contenuti in esso.

3.B.4. Dimostrare che l'intersezione di una catena di ideali primi in un anello commutativo è sempre un ideale primo.

Conseguenza di questo fatto è, ad esempio, che se R è un anello commutativo unitario e H è un suo ideale proprio, esiste sempre un ideale che sia minimale tra quelli primi contenenti H.

3.B.5. Estraendo parte dell'argomentazione svolta per la dimostrazione del lemma 3.9, provare che se R è un anello commutativo e a è un suo elemento tale che l'ideale aR sia primo, allora $a \in aR$. Come ulteriore conseguenza (ovvia dall'esercizio 3.A.3), dedurre che se a è anche cancellabile, allora R è unitario.

3.3 Nilradicale e radicale di Jacobson di un anello commutativo

3.3.1 Il niradicale di un anello; varietà e radicale di un ideale

Un elemento a di un anello commutativo R si dice *nilpotente* se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $a^n = 0_R$. Chiaramente 0_R è nilpotente e, se R non è l'anello nullo, ogni elemento nilpotente è un divisore dello zero, quindi in un dominio di integrità lo zero è l'unico elemento nilpotente. È possibile dimostrare per via diretta che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo ne costituiscono un ideale (vedi esercizio 3.C.2), ma lo si può fare in modo più efficiente (ed elegante) provando che questo insieme è precisamente l'intersezione degli ideali primi dell'anello (con la consueta convenzione che questa intersezione sia l'intero anello se questo è privo di ideali primi).

Se R è un anello commutativo, si chiama *nilradicale* di R l'ideale

$$\operatorname{NilRad}(R) := \bigcap(\{R\} \cup \operatorname{Spec}(R)),$$

dunque $\operatorname{NilRad}(R) = R$ se R non ha ideali primi, $\operatorname{NilRad}(R) = \bigcap \operatorname{Spec}(R)$ altrimenti.

Proposizione 3.12. *Se R è un anello commutativo,* $\mathrm{NilRad}(R)$ *è l'insieme degli elementi nilpotenti di R.*

Dimostrazione. Sia a un elemento nilpotente di R e sia $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $a^n = 0 \in P$; poiché P è primo questo implica $a \in P$. Dunque, ogni elemento nilpotente di R è in $\mathrm{NilRad}(R)$.

Sia ora a un elemento non nilpotente di R. L'insieme $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ delle potenze di a ad esponente positivo è ovviamente chiuso rispetto alla moltiplicazione; per la scelta di a si ha $0_R \notin S$. Possiamo dunque applicare il lemma 3.8 ad S e all'ideale nullo di R per ottenere un ideale primo P disgiunto da S (difatti, massimale tra gli ideali disgiunti da S). Dal momento che $a \in S$, abbiamo $a \notin P$; abbiamo così provato che $a \notin \bigcap \mathrm{Spec}(R) = \mathrm{NilRad}(R)$. La dimostrazione è completa. □

Se poi H è un ideale dell'anello commutativo R, si chiama *varietà* di H, e si indica con $\mathrm{Var}\, H$ o $\mathrm{Var}_R(H)$, l'insieme degli ideali primi di R contenenti H. Se $H \subseteq I \lhd R$, allora I/H è primo se e solo se I è primo, dal momento che $(R/H)/(I/H) \simeq R/I$, quindi $\{P/H \mid P \in \mathrm{Var}\, H\} = \mathrm{Spec}(R/H)$. La proposizione 3.12 mostra dunque che l'intersezione tra (R e) gli ideali nella varietà di H è l'insieme degli $r \in R$ tali che $r + H$ sia un elemento nilpotente di R/H; questo insieme è un ideale di R che si chiama *radicale* di H in R, indicato in genere con uno dei simboli $\sqrt{H}$, $\sqrt{(H)}$, $\sqrt[R]{H}$, $\mathrm{Rad}_R\, H$. Dunque, il radicale di H in R è

$$\sqrt{H} = \bigcap(\{R\} \cup \mathrm{Var}_R(H)) = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}^+ \, (r^n \in H)\};$$

vale a dire: $\sqrt{H}/H = \mathrm{NilRad}(R/H)$. Ovviamente $\sqrt{0} = \mathrm{NilRad}\, R$, e $\sqrt{P} = P$ per ogni ideale primo P.

Lemma 3.13. *Siano R un anello commutativo e $H, K \lhd R$. Allora:*
(i) $H \subseteq K \Rightarrow \sqrt{H} \subseteq \sqrt{K}$;
(ii) $\sqrt{H \cap K} = \sqrt{HK} = \sqrt{H} \cap \sqrt{K}$;
(iii) *Se R è unitario,* $\sqrt{H} = R \iff H = R$;

Dimostrazione. La (i) e la (iii) sono ovvie. Per provare la (ii), si osservi che da $HK \subseteq H \cap K$ segue $\sqrt{HK} \subseteq \sqrt{H \cap K} \subseteq \sqrt{H} \cap \sqrt{K}$, usando due volte la (i). Se poi $r \in \sqrt{H} \cap \sqrt{K}$, esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $r^n \in H$ e $r^m \in K$, quindi $r^{n+m} \in HK$ e $r \in \sqrt{HK}$; così anche la (ii) è dimostrata. □

In generale, se H è un ideale di un anello commutativo R, non è detto che H contenga una potenza del suo radicale in R. Questo però accade in un importante caso particolare: quando $\sqrt{H}$ è finitamente generato (o, più in generale, quando $\sqrt{H}/H$ è finitamente generato). Estendendo agli ideali la terminologia utilizzata per gli elementi di un anello, si dice che un ideale I è *nilpotente* se e solo se $I^n = 0$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.14. *Siano R un anello commutativo e $I \lhd R$. Se I è finitamente generato ed ogni suo elemento è nilpotente, allora I è nilpotente.*

Dimostrazione. Sia F un insieme finito di generatori di I. Per ogni $a \in F$ esiste $\lambda_a \in \mathbb{N}^+$ tale che $a^{\lambda_a} = 0_R$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, I^n è generato dai prodotti tra n elementi (eventualmente ripetuti) di F, cioè da elementi della forma $r = \prod_{a \in F_0} a^{\mu_a}$, dove $F_0 \subseteq F$ e gli esponenti μ_a sono numeri interi positivi tali che $\sum_{a \in F_0} \mu_a = n$. Se n è scelto in modo che $n > \sum_{a \in F}(\lambda_a - 1)$, allora la condizione sugli interi μ_a assicura che $\mu_a \geq \lambda_a$, e quindi $a^{\mu_a} = 0_R$, per almeno un $a \in F_0$, dunque $r = 0_R$. Ciò prova che, per ogni tale n, $I^n = 0$. □

Corollario 3.15. *Siano R un anello commutativo, H e J ideali di R tali che $H \subseteq J \subseteq \sqrt{H}$ e J/H è finitamente generato. Allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $J^n \subseteq H$.*

Dimostrazione. L'ideale $I := J/H$ di R/H è finitamente generato e costituito da elementi nilpotenti. Per il lemma precedente esiste allora $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $I^n = 0$, ovvero $J^n \subseteq H$. □

3.3.2 Il radicale di Jacobson

Il radicale di Jacobson[3] di un anello commutativo R si indica con $\mathrm{Jac}(R)$ ed è l'intersezione di tutti gli ideali massimali di R se R ha almeno un ideale massimale, R nel caso contrario. Dunque

$$\mathrm{Jac}(R) = \bigcap \{H \mid H = R \vee H \lhd\cdot R\}.$$

Questo ideale ha una grande importanza nella teoria generale degli anelli commutativi (e lo stesso si può dire per il caso non commutativo); una ragione è quella indicata nell'osservazione 3.C.13.

Nel caso in cui R sia unitario, $\mathrm{Jac}(R)$ ha una descrizione piuttosto semplice. Per formularla, iniziamo a fare un'osservazione sull'unione degli ideali massimali. Come è ben noto, in un anello commutativo unitario R un elemento a è invertibile se e solo se aR (che è l'ideale generato da a) coincide con R. Dunque, a non è invertibile se e solo se a appartiene ad un ideale proprio di R. Ma, per il corollario 1.19, in questo secondo caso a appartiene ad un ideale massimale di R. In definitiva, per ciascun $a \in R$ si verifica una ed una sola delle due: o a è invertibile, oppure $a \in M$ per qualche $M \lhd\cdot R$. Abbiamo così:

Lemma 3.16. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora $\mathcal{U}(R) = R \setminus \bigcup\{M \mid M \lhd\cdot R\}$.*

Lemma 3.17. *Siano R un anello commutativo unitario, $a \in R$ e $M \lhd\cdot R$. Allora $a \in M$ se e solo se, per ogni $r \in R$ si ha $1_R - ar \notin M$.*

Dimostrazione. Se $a \in M$ e $r \in R$, allora $ar \in M$. Dal momento che $1_R \notin M$, allora $1_R - ar \notin M$. Sia invece $a \notin M$. Allora l'ideale generato da $M \cup \{a\}$, ovvero $M + aR$, coincide con R. Dunque $1_R = m + ar$ per opportuni $m \in M$ e $r \in R$ quindi $1_R - ar = m \in M$; ciò prova l'asserto. □

Proposizione 3.18. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora*

$$\mathrm{Jac}(R) = \{a \in R \mid 1_R + aR \subseteq \mathcal{U}(R)\}.$$

Dimostrazione. Sia $a \in R$. Ovviamente $a \in \mathrm{Jac}(R)$ se e solo se per ogni $M \lhd\cdot R$ si ha $a \in M$, cioè, per il lemma 3.17, $(1_R + aR) \cap M = \varnothing$. Utilizzando anche il lemma 3.16 otteniamo così che $a \in \mathrm{Jac}(R)$ se e solo $1_R + aR \subseteq R \setminus \bigcup\{M \mid M \lhd\cdot R\} = \mathcal{U}(R)$. □

Corollario 3.19. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora per ogni $a \in \mathrm{Jac}(R)$ si ha $|aR| \leq |\mathcal{U}(R)|$. In particolare:*
(i) *se $\mathcal{U}(R) = \{1_R\}$, allora $\mathrm{Jac}(R) = 0$;*
(ii) *se $\mathrm{Jac}(R)$ contiene un elemento cancellabile in R, allora $|\mathcal{U}(R)| = |R|$;*
(iii) *se R è un dominio di integrità e $\mathrm{Jac}(R) \neq 0$, allora $|\mathcal{U}(R)| = |R|$.*

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue subito dalla proposizione 3.18, dal momento che $1 + aR$ è equipotente ad aR. Se $0_R \neq a \in \mathrm{Jac}(R)$, allora $|aR| > 1$ e, se a è cancellabile, $|aR| = |R|$. Da ciò e da quanto appena visto seguono (i) e (ii), da (ii) segue poi immediatamente (iii). □

Una seconda caratterizzazione del radicale di Jacobson ha anche un corrispettivo debole per anelli non unitari; si vedano per questo l'esercizio 3.C.12 e anche l'osservazione 3.C.13:

Proposizione 3.20. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora $\mathrm{Jac}(R)$ è l'insieme di tutti gli $r \in R$ tali che $Mr = 0$ per ogni R-modulo semplice M.*

[3] che prende il nome da Nathan Jacobson (1910–1999).

Dimostrazione. La proposizione 1.24 mostra che gli annullatori degli R-moduli semplici sono tutti e soli gli ideali massimali di R. Da ciò segue immediatamente l'asserto. □

Nel caso degli anelli unitari, la comparazione tra il niradicale ed il radicale di Jacobson fornisce:

Proposizione 3.21. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora* $\mathrm{NilRad}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$. *Inoltre, per ogni $a, u \in R$, se a è nilpotente e u è invertibile, $a + u$ è invertibile.*

Dimostrazione. L'inclusione $\mathrm{NilRad}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ è immediata dalle definizioni, dal momento che gli ideali massimali di R sono tutti primi. Se a e u sono come all'enunciato, $a \in \mathrm{NilRad}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ (proposizione 3.12), mentre $u \notin V := \bigcup\{M \mid M \lhd\cdot R\}$; di conseguenza, per ogni $M \lhd\cdot R$, si ha $a + u \notin M$. Allora $a + u \notin V$ e quindi $a + u \in \mathcal{U}(R)$ per il lemma 3.16. □

Anelli locali Chiamiamo *anello locale* un anello commutativo unitario che abbia esattamente un ideale massimale, cioè tale che il suo radicale di Jacobson sia un ideale massimale[4]. Dal lemma 3.16 si ricava immediatamente:

Corollario 3.22. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora R è locale se e solo se $R \smallsetminus \mathcal{U}(R)$ è un ideale di R. Se ciò accade, questo è l'ideale massimale di R.*

Sono ovviamente anelli locali i campi (sono quelli con 0 come ideale massimale). Un altro esempio interessante è, per ogni numero primo p, quello del sottoanello

$$\mathbb{Q}_{p'} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \smallsetminus p\mathbb{Z}\}$$

del campo razionale, costituito da quei numeri razionali che, rappresentati come frazione ridotta, hanno denominatore non divisibile per p. È facile vedere che questo insieme forma effettivamente un sottoanello (per giunta unitario) di $\mathbb{Q}$ i cui elementi non invertibili sono i multipli di p, quindi l'ideale massimale di $\mathbb{Q}_{p'}$ è $p\mathbb{Q}_{p'}$. Questo esempio ritornerà a più riprese in queste note, venendo tra l'altro discusso in maggior dettaglio in uno dei prossimi capitoli nel contesto di una procedura per costruire in modo sistematico anelli locali.

Esempi, osservazioni, esercizi.

3.C.1. Per ogni intero positivo n, descrivere il nilradicale ed il radicale di Jacobson di $\mathbb{Z}_n$. Per quale motivo coincidono?

3.C.2. Sia R un anello commutativo. Provare per via diretta (senza usare la proposizione 3.12) che l'insieme degli elementi nilpotenti di R costituisce un ideale (l'unica cosa non del tutto ovvia da provare è che la somma di due elementi nilpotenti è sempre nilpotente)

Similmente, se R è unitario, a è un elemento nilpotente di R e $u \in \mathcal{U}(R)$, provare che $a + u$ è invertibile, descrivendone l'inverso e senza usare la proposizione 3.21.

3.C.3. Siano R un anello commutativo e $(H_i)_{i\in I}$ una famiglia di ideali di R. Verificare che $\mathrm{Var}(\sum_{i\in I} H_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Var}(H_i)$ e, se I è finito e non vuoto, $\mathrm{Var}(\bigcap_{i\in I} H_i) = \mathrm{Var}(\prod_{i\in I} H_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Var}(H_i)$.

Di conseguenza (e poiché $\varnothing = \mathrm{Var}(R)$) l'insieme delle varietà degli ideali di R è l'insieme dei chiusi di una topologia su $\mathrm{Spec}(R)$, nota come *topologia di Zariski*. Provare che, se R è unitario, lo spazio topologico così definito è compatto.

La topologia di Zariski è di grande importanza per lo studio degli anelli commutativi unitari e per le loro applicazioni geometriche. Questa topologia, nel caso particolare degli anelli booleani, avrà un ruolo nella sezione 14.2.

[4] alcuni autori richiedono in aggiunta che l'anello sia noetheriano e chiamano semilocali gli anelli che abbiamo chiamato locali.

3.C.4. Verificare che se R, e S sono anelli commutativi, $H \lhd R$ e $\alpha\colon R \to S$ è un omomorfismo, in S si ha $(\sqrt{H})^{\vec{\alpha}} \subseteq \sqrt{H^{\vec{\alpha}}}$. In particolare, $(\sqrt{H}+I)/I \subseteq \sqrt{(H+I)/I}$ per ogni $I \lhd R$. L'uguaglianza non vale, in generale (si consideri ad esempio il caso $R = \mathbb{Z}$, $H = 0$ e $I = 4\mathbb{Z}$), ma vale se $I \subseteq H$.

3.C.5. In relazione al lemma 3.13, provare che, se H e K sono ideali di uno stesso anello commutativo R, si ha $\sqrt{H+K} = \sqrt{(\sqrt{H}+\sqrt{K})}$, ma non necessariamente $\sqrt{H+K} = \sqrt{H}+\sqrt{K}$ né $\sqrt{HK} = \sqrt{H}\sqrt{K}$. (Suggerimento per la seconda parte: per l'affermazione su $\sqrt{H+K}$ si considerino un campo F, il suo anello di polinomi $F[x,y,z]$ (gli anelli di polinomi verranno discussi più avanti in queste note) e il quoziente $R = F[x,y,z]/(x+y-z^2)$; per l'affermazione che riguarda il radicale di un prodotto si cerchi un anello commutativo il cui nilradicale N verifichi $N^2 = 0 \neq N$.)

3.C.6. Siano R un anello commutativo e P un suo ideale primo. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha $P = \sqrt{P^n}$.

3.C.7. L'applicazione che ad ogni ideale di un anello commutativo R associa il suo radicale è un operatore di chiusura nel reticolo degli ideali di R, nel senso che è crescente, estensiva ($H \subseteq \sqrt{H}$ per ogni $H \lhd R$) e idempotente ($\sqrt{(\sqrt{H})} = \sqrt{H}$ per ogni $H \lhd R$).

3.C.8. Verificare in dettaglio quanto asserito a proposito dell'anello locale $\mathbb{Q}_{p'}$ dei razionali a denominatore coprimo col primo p. Generalizzando una delle sue proprietà, verificare che se R è un anello fattoriale che non sia un campo ed in cui tutti gli elementi irriducibili sono associati tra loro, allora R è locale e il suo ideale massimale è pR, dove p è un elemento irriducibile di R.

3.C.9. In un anello commutativo unitario si può avere $\mathrm{NilRad}(R) \subset \mathrm{Jac}(R)$. ad esempio, questo accade se R è un dominio di integrità locale che non sia un campo, come l'anello $\mathbb{Q}_{p'}$ presentato in questa sezione. Per un tale R sia ha infatti $\mathrm{NilRad}(R) = 0$, mentre $\mathrm{Jac}(R)$ è l'ideale massimale di R, che non è l'ideale nullo perché R non è un campo.

Se R è un anello con prodotto costante nullo, $R = \mathrm{NilRad}(R)$. Se R è finito e non nullo, certamente R ha ideali massimali (i sottogruppi massimali di $(R,+)$) e quindi $\mathrm{Jac}(R) \subset \mathrm{NilRad}(R)$.

3.C.10. Sia R un anello commutativo unitario e supponiamo $R = N + S$, dove N è un ideale di R contenuto in $\mathrm{NilRad}(R)$ e S è un sottoanello unitario di R. Allora $\mathrm{Jac}\, R = N + \mathrm{Jac}(S)$; dimostrarlo.

3.C.11. Il corollario 3.19 può essere in certi casi usato per dimostrare che un anello commutativo unitario ha radicale di Jacobson nullo. Esempi di anelli per i quali l'ipotesi in (i) (l'unico elemento invertibile è l'unità) è verificata sono l'anello delle parti di un qualsiasi insieme e, come seguirà dalla proposizione 5.10, gli anelli di polinomi su di esso. I domini di integrità con un numero finito di elementi invertibili hanno anch'essi radicale di Jacobson nullo: quelli finiti perché sono campi, quelli infiniti (come $\mathbb{Z}$ o gli anelli di polinomi su $\mathbb{Z}$) per via della (iii) nel corollario 3.19.

3.C.12. Estendere la proposizione 3.20 provando quanto segue. Siano R un anello commutativo e $\mathcal{M}$ l'insieme dei suoi ideali massimali primi, dunque $\mathcal{M} = \{H \mid R^2 \not\subseteq H \lhd \cdot R\}$ e $J = \bigcap(\{R\} \cup \mathcal{M})$. Allora J è l'insieme degli elementi di R che annullano ogni R-premodulo semplice.

Notare che questo vale anche se R è unitario, nel qual caso $J = \mathrm{Jac}(R)$.

Aggiungiamo che alcuni autori propongono una definizione di premodulo semplice diversa dalla definizione standard qui adottata, richiedendo che i premoduli per essere semplici non debbano essere annullati dall'intero anello degli scalari. Per chi assume questa definizione, anche nel caso in cui R non sia unitario l'insieme degli elementi di R che annullano ogni R-premodulo semplice è $\mathrm{Jac}(R)$.

3.C.13. Gli R-(pre)moduli semplici, o più in generale quelli *semisemplici* (cioè generati da (pre)moduli semplici) hanno una grande importanza nella teoria generale degli R-(pre)moduli. Segue dall'esercizio precedente che il radicale di Jacobson di un anello commutativo R

annulla tutti gli R-(pre)moduli semisemplici. Questo mostra che la teoria degli R-(pre)moduli semisemplici si riduce a quella dei (pre)moduli semisemplici su $R/\operatorname{Jac}(R)$.

3.3.3 Versioni del lemma di Nakayama

Al radicale di Jacobson di un anello commutativo è associato questo risultato, noto come lemma di Nakayama, che è una versione debole del corollario 1.18:

Lemma 3.23 (Lemma di Nakayama)**.** *Siano R un anello commutativo, $J = \operatorname{Jac}(R)$ e M un R-(pre)modulo finitamente generato. Allora $MJ = M$ se e solo se $M = 0$.*

Dimostrazione. Se $M = 0$, ovviamente $MJ = M$. Se invece $M \neq 0$, allora M ha un sotto(pre)modulo massimale N. Ovviamente M/N è semplice, quindi annullato da J, per la proposizione 1.24 (si veda anche l'osservazione 3.C.13). Questo significa che $MJ \subseteq N$, quindi $MJ \neq M$. □

Corollario 3.24. *Siano R un anello commutativo, $J = \operatorname{Jac}(R)$, M un R-(pre)modulo finitamente generato e $N \leq_R M$. Se $M = N + MJ$, allora $N = M$.*

Dimostrazione. Basta applicare il lemma 3.23 al (pre)modulo M/N. □

Una versione più forte del lemma di Nakayama, spesso associata ai nomi di Nakayama, Azumaya e Krull e talvolta chiamato quindi 'lemma NAK' (ma spesso anch'esso lemma di Nakayama) è data dal lemma 3.26. Per dimostrarla, iniziamo con semplice lemma:

Lemma 3.25. *Siano M un premodulo sull'anello commutativo R, $a \in M$ e $H, K \lhd R$. Allora $aH \subseteq aK$ se e solo se $H \subseteq K + \operatorname{Ann}_R(a)$.*

Dimostrazione. Se $H \subseteq K + \operatorname{Ann}_R(a)$, è ovvio che $aH \subseteq a(K + \operatorname{Ann}_R(a)) = aK$. Viceversa, se $aH \subseteq aK$, per ogni $h \in H$ esiste $k \in K$ tale che $ah = ak$, quindi $a(h - k) = 0_M$, dunque $h - k \in \operatorname{Ann}_R(a)$ e $h = k + (h - k) \in K + \operatorname{Ann}_R(a)$. □

Lemma 3.26 (NAK)**.** *Sia M un premodulo finitamente generato sull'anello commutativo R. Sia $H \lhd R$. Sono allora equivalenti:*
(i) *$MH = M$;*
(ii) *esiste $h \in H$ tale che $ah = a$ per ogni $a \in M$.*
Inoltre, (i) implica:
(iii) $R = H + \operatorname{Ann}_R(M)$
e, se R è unitario e M è un R-modulo, (iii) implica (i).

Dimostrazione. È ovvio che (i) segue da (ii) e, se M è un R-modulo e quindi $MR = M$, anche da (iii). Vanno dimostrate le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (iii) e (i) $\Rightarrow$ (ii). Iniziamo a farlo nel caso in cui R sia unitario e M sia un R-modulo. Supponiamo $MH = M$; vogliamo provare che vale la (iii). Sia X un insieme finito di generatori di M e ragioniamo per induzione su $|X|$. La (iii) è banalmente vera se $X = \varnothing$; possiamo allora assumere $|X| > 0$ e che l'implicazione (i) $\Rightarrow$ (iii) valga se M è sostituito da un modulo generato da un insieme di cardinalità minore di $|X|$. Fissiamo $a \in X$, e sia $\overline{M}$ il modulo quoziente M/aR. Poniamo anche $I = \operatorname{Ann}_R(\overline{M})$ e $J = \operatorname{Ann}_R(a)$. Si ha $MI \subseteq aR$ e $aRJ = aJ = 0$, quindi $MIJ = 0$, ovvero $IJ \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$. Dovrebbe essere chiaro che $\overline{M}H = \overline{M}$ e che $\overline{M}$ è generato da $\{x + aR \mid x \in X \smallsetminus \{a\}\}$, che ha cardinalità minore di $|X|$, quindi, per l'assunzione fatta, $R = H + I$. Da $MI \subseteq aR$ otteniamo anche $MIH \subseteq aRH$, ovvero $MI \subseteq aH$ (ricordiamo: $MH = M$), quindi $aI \subseteq aH$. Dal lemma 3.25 segue $I \subseteq H + J$, quindi $R = H + I$ comporta $R = H + J$. A questo punto possiamo applicare il lemma 3.2 per

concludere che H è comassimale con IJ, ma, come avevamo visto, $IJ \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$, dunque $R = H + IJ = H + \operatorname{Ann}_R(M)$ e vale la (iii). Ora, sempre nell'ipotesi che M sia un R-modulo, la (iii) implica $1_R \in H + \operatorname{Ann}_R(M)$, quindi esistono $h \in H$ e $k \in \operatorname{Ann}_R(M)$ tali che $h + k = 1_R$, dunque per ogni $a \in M$ si ha $ah = a(1_R - k) = a - ak = a$ e vale la (ii).

Passiamo ora al caso generale rimuovendo l'ipotesi che M sia un modulo e assumendo semplicemente che M sia un premodulo finitamente generato per il quale valga (i). Sia $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$ l'anello accresciuto definito da R e riguardiamo M come R_1-modulo in accordo con il corollario 1.33. Anche come R_1-modulo M è finitamente generato. Dal momento che H è un ideale anche di R_1, per il caso precedente da $MH = M$ deduciamo che continua a valere (ii) e che $R_1 = H + \operatorname{Ann}_{R_1}(M)$. Da quest'ultima, utilizzando la legge di Dedekind (lemma 1.8), otteniamo $R = R_1 \cap R = H + (\operatorname{Ann}_{R_1}(M) \cap R) = H + \operatorname{Ann}_R(M)$, ovvero la (iii). A questo punto la dimostrazione è completa. □

Corollario 3.27. *Sia M un premodulo fedele finitamente generato sull'anello commutativo R. Sia H un ideale proprio di R. Allora $MH \neq M$.*

È il caso di notare che, nel lemma 3.26, la condizione (ii) può essere più sinteticamente riscritta, con riferimento all'azione di premodulo $\zeta\colon R \to \operatorname{End}(M,+)$ che definisce M, come

(ii′) $\quad \mathrm{id}_M \in H^{\vec{\zeta}}$,

che, se soddisfatta, garantisce che, anche nel caso in cui R non lo sia, $R/\operatorname{Ann}_R M$ (che è isomorfo a $\operatorname{im}\zeta$) è un anello unitario, ed implica direttamente la (iii) perché mostra che l'unità di questo anello appartiene all'ideale $H + \operatorname{Ann}_R M/\operatorname{Ann}_R M$.

Esempi, osservazioni, esercizi.

3.D.1. Si mostri con un esempio che, nella situazione del lemma 3.26, se M non è un modulo su R, è possibile che, per ogni ideale H di R, valga la (iii) ma non la (i).

3.D.2. La dimostrazione del lemma di Nakayama (lemma 3.23) che abbiamo fornito prova, in effetti, questo: se M è un (pre)modulo finitamente generato e non nullo su un anello commutativo R, allora esiste $H \lhd R$ tale che $H = R$ o $H \lhd\cdot R$ tale che $MH \neq M$.

3.D.3. Le dimostrazioni qui fornite per i lemmi 3.23 e 3.26 sono tra loro indipendenti, ma in realtà è piuttosto facile provare il primo come conseguenza del secondo; questo è pressoché immediato nel caso in cui R sia unitario, ma lo è anche nel caso generale dopo aver osservato, come notato dopo il corollario 3.27 a proposito della condizione scritta come (ii′), che (ii) implica che $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ sia unitario). Quindi, in senso stretto, non sarebbe stato necessario fornire la dimostrazione del lemma 3.23. Lo si è fatto comunque perché la dimostrazione supplementare è molto semplice ed illustra un'idea utile anche in altre situazioni.

3.D.4. Nelle varie versioni del lemma di Nakayama, incluso il corollario 1.18, l'ipotesi che il (pre)modulo coinvolto sia finitamente generato è essenziale. Ad esempio, se M è il gruppo additivo dei razionali, visto come $\mathbb{Z}$-modulo, allora M è fedele e non ha sottomoduli massimali, come è facile verificare, e per ogni ideale non nullo H di $\mathbb{Z}$ si ha $MH = M$.

3.D.5. Chi ha studiato un po' di teoria dei gruppi oltre il contenuto dei corsi del primo anno potrebbe aver incontrato la nozione di sottogruppo di Frattini, l'intersezione tra i sottogruppi massimali di un gruppo, che è in qualche senso l'analogo gruppale del radicale di Jacobson (ma il sottogruppo di Frattini è storicamente di molto precedente). Chi ha anche qualche familiarità con l'argomento di Frattini potrebbe aver riconosciuto nel lemma 3.25 una semplice variante di questa idea.

3.D.6. Come una parte del lemma NAK, anche il lemma 3.25 può essere riformulato in termini di omomorfismi: esprime di fatto una proprietà elementare dell'omomorfismo di gruppi $r \in (R,+) \mapsto ar \in (R,+)$.

3.D.7. Come nel caso del corollario 1.18, anche per i lemmi 3.23 e 3.26 ed i loro corollari l'ipotesi che M sia finitamente generato non può essere rimossa. Ad esempio, ponendo $R = \mathbb{Z}$, e scegliendo come M il gruppo additivo dei razionali (o, in alternativa, qualsiasi gruppo abeliano divisibile non identico), si ha che M è fedele e $MH = H$ per ogni ideale non nullo H di R.

3.D.8. Siano R un anello commutativo ed F una sua parte finita. Utilizzando il lemma 3.26, provare che se per ogni $x \in F$ esiste $t_x \in R$ tale che $xt_x = x$, allora esiste $t \in R$ tale che $xt = x$ per ogni $x \in (F)$. Dedurne che, in ogni anello commutativo R, l'insieme $\{x \in R \mid \exists y \in R(xy = x)\}$ è un ideale di R.

Osservare che, in conseguenza dell'esercizio 1.H.3, se R non è unitario allora questo ideale è costituito da divisori dello zero.

3.4 Divisibilità e ideali in anelli unitari

Sia R un anello commutativo unitario non nullo; indichiamo con $\mathfrak{I}_P(R)$ l'insieme degli ideali principali di R, ordinato per inclusione. Consideriamo l'applicazione $\varphi\colon a \in R \mapsto aR \in \mathfrak{I}_P(R)$. Chiaramente φ è suriettiva. Inoltre, se a e b sono in R, si ha $aR = bR$ se e solo se $a \sim_R b$, cioè se e solo se a e b sono associati nel monoide moltiplicativo di R. In altri termini, il nucleo di equivalenza di φ è la relazione $\sim_R$, dunque φ induce un'applicazione biettiva

$$\tilde{\varphi}\colon \tilde{a} \in \widetilde{R} \mapsto aR \in \mathfrak{I}_P(R),$$

dove abbiamo posto (come faremo d'ora in poi) $\widetilde{R} = R/{\sim_R}$, quoziente del monoide moltiplicativo di R. È anche chiaro che sia $\tilde{\varphi}$ che la sua inversa sono (strettamente) decrescenti, vale a dire: φ è un anti-isomorfismo da $\widetilde{R}$ (insieme ordinato per divisibilità) a $\mathfrak{I}_P(R)$, ordinato per inclusione.

Questo anti-isomorfismo permette di stabilire una connessione tra proprietà di ideali (principali) in anelli commutativi unitari e proprietà relative alla divisibilità nei corrispondenti monoidi moltiplicativi. Ad esempio, con le notazioni fissate nel paragrafo precedente, un elemento $a \in R$ è irriducibile (si intende: in $(R, \cdot)$) se e solo se $\tilde{a}$ è minimale tra gli elementi diversi da $\tilde{1}$ in $\widetilde{R}$, quindi se e solo se $(\tilde{a})^{\tilde{\varphi}}$, ovvero aR, è massimale tra gli ideali principali diversi da $(\tilde{1})^{\tilde{\varphi}} = R$. Dunque, per ogni $a \in R$,

$$a \text{ è irriducibile in } R \iff aR \text{ è massimale tra gli ideali principali propri di } R$$

A titolo di comparazione, è di verifica più o meno immediata che

$$a \text{ è primo in } R \iff aR \text{ è un ideale primo di } R.$$

Un'applicazione piuttosto elegante dell'anti-isomorfismo φ e di quanto visto nella sezione 2.2 permette di ricavare immediatamente alcuni risultati elementari sugli anelli principali, vediamo come.

Se R è un dominio di integrità unitario, $R^* = R \setminus 0$ è un sottomonoide moltiplicativo di R ed è cancellativo, e $\widetilde{R}^*$ risulta anti-isomorfo, come insieme ordinato, all'insieme $\mathfrak{I}_P^*(R)$ degli ideali principali non nulli di R. Se R è anche principale, $\mathfrak{I}_P^*(R)$ è l'insieme degli ideali non nulli di R, che è un sottoreticolo di $\mathfrak{I}(R)$ (perché l'intersezione tra due ideali non nulli è certamente non nulla). Un risultato elementare che incontreremo più avanti (proposizione 6.8) mostra che R è noetheriano, cioè che $\mathfrak{I}(R)$ verifica la condizione massimale, quindi $\mathfrak{I}_P^*(R)$ è un reticolo a condizione massimale; di conseguenza $\widetilde{R}^*$ (anti-isomorfo a $\mathfrak{I}_P^*(R)$) è un reticolo a condizione minimale. Per il teorema 2.5, allora R^* è un monoide fattoriale; il che, ricordiamo, significa che R è un anello fattoriale. Dunque, otteniamo una rapida dimostrazione del fatto che *ogni anello principale è fattoriale*. Inoltre, dal fatto che per elementi non nulli di R le proprietà di essere

primo e di essere irriducibile sono equivalenti, osservazioni fatte poco sopra garantiscono che gli ideali primi non nulli in un anello principale sono necessariamente massimali (vale a dire: *gli anelli principali hanno dimensione di Krull al più* 1).

Si può poi osservare che, in conseguenza del lemma 2.4, *in ogni dominio di integrità unitario noetheriano,*[5] *tutti gli elementi non invertibili e diversi dallo zero sono prodotto di elementi irriducibili.*

Anche il teorema di Bézout e le sue varianti possono essere ottenuti in modo simile. Siano a e b elementi di un anello commutativo unitario R. Poiché gli anti-isomorfismi tra insiemi ordinati mandano eventuali estremi inferiori in estremi superiori (e viceversa), per ogni $d \in R$ si ha $\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \tilde{b}$ se e solo se dR è estremo superiore di aR e bR in $\mathfrak{I}_P(R)$, vale a dire: il minimo (rispetto all'inclusione) tra gli ideali principali di R contenenti aR e bR, cioè contenenti $aR + bR$. Dualmente, un $m \in R$ sarà un mcm tra a e b se e solo se mR è il massimo ideale principale contenuto in $aR \cap bR$. In particolare, per ogni a, $b \in R$:

se $aR + bR$ è principale, allora i suoi generatori sono tutti e soli i MCD tra a e b in R; (B)

se $aR \cap bR$ è principale, allora i suoi generatori sono tutti e soli i mcm tra a e b in R. $(\hat{B})$

Il primo enunciato, (B) è una delle tante versioni del *teorema di Bézout*. Questo ed il suo duale $(\hat{B})$ si possono senz'altro applicare nel caso in cui R sia un anello principale, perché in questo caso l'ipotesi sull'ideale $aR + bR$ o $aR \cap bR$ è banalmente verificata. Per quanto riguarda (B), lo stesso vale nel caso in cui ogni ideale finitamente generato di R sia principale. I domini di integrità unitari con questa proprietà si chiamano *anelli di Bézout* e verranno brevemente discussi nella sezione 10.2.

[5] o, più in generale, che verifica la condizione massimale sugli ideali principali

4 Costruzioni per moduli e per anelli

In questo capitolo descriveremo delle costruzioni standard, alcune delle quali dovrebbero essere sostanzialmente già note a chi legge

4.1 Prodotti e somme dirette di moduli

Prodotti diretti Siano R un anello commutativo e $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di R-(pre)moduli. Si definiscono un'operazione binaria interna $+$ nel prodotto cartesiano $C = \mathrm{Cr}_{i\in I} M_i$ ed un'operazione esterna $C \times R \to C$ ponendo, per ogni $a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I} \in C$ e $r \in R$,

$$a + b = (a_i + b_i)_{i\in I} \qquad \text{e} \qquad ar = (a_i r)_{i\in I}$$

(come al solito, abbiamo usato lo stesso simbolo $+$ tutte le operazioni binarie interne che appaiono e lo stesso simbolo, peraltro omesso, per quelle esterne. Queste operazioni su C sono, come si dice, definite componente per componente). È del tutto ovvio che in questo modo risulta definita su C una struttura di R-(pre)modulo che si chiama il *prodotto diretto* (esterno) della famiglia $(M_i)_{i\in I}$ e si indica come $\prod_{i\in I} M_i$.

Con il prodotto diretto sono poi definite due famiglie di omomorfismi $(\pi_i)_{i\in I}$ e $(\mu_i)_{i\in I}$. Per ogni $i \in I$,

$$\pi_i \colon (a_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} M_j \mapsto a_i \in M_i$$

è l'applicazione (nota come proiezione i-esima) che ad ogni elemento del prodotto cartesiano associa la sua i-esima componente (in M_i); evidentemente π è un epimorfismo di R-(pre)moduli. L'applicazione $\mu_i \colon M_i \to \prod_{j\in I} M_j$ (chiamata talvolta monomorfismo canonico) associa ad ogni $x \in M_i$ la famiglia che ha x come componente i-esima e, per ogni $j \in I \smallsetminus \{i\}$, 0_{M_j} come componente j-esima; μ_i è un monomorfismo di R-(pre)moduli. Per ogni $i \in I$ si ha, come si vede facilmente, $\mu_i\pi_i = \mathrm{id}_{M_i}$. Se poniamo $M_i^* = \operatorname{im}\mu_i$ e $\hat{M}_i^* = \ker\pi_i$, abbiamo, utilizzando il primo teorema di omomorfismo, $M_i^* \simeq M_i \simeq (\prod_{i\in I} M_i)/\hat{M}_i^*$. Naturalmente $\hat{M}_i^*$ è il sotto(pre)modulo di $\prod_{i\in I} M_i$ costituito dalle famiglie con componente i-esima nulla, mentre M_i^* è costituito dalle famiglie con componente j-esima nulla per ogni $j \in I \smallsetminus \{i\}$, vale a dire $M_i^* = \bigcap\{\hat{M}_j^* \mid i \neq j \in I\}$.

Somme dirette Proseguendo con le stesse notazioni, per ogni $a = (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, il *supporto* di a è l'insieme $\operatorname{supp}(a) = \{i \in I \mid a_i \neq 0_{M_i}\}$. Ovviamente $\operatorname{supp}(a + b) \subseteq \operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b)$ e $\operatorname{supp}(ar) \subseteq \operatorname{supp}(a)$ per ogni $a, b \in C$ e $r \in R$, ne segue che l'insieme D costituito dalle famiglie in C di supporto finito forma un R-sotto(pre)modulo di C, noto come la *somma diretta esterna* $\coprod_{i\in I} M_i$ della famiglia $(M_i)_{i\in I}$. Nel caso in cui I sia finito, ovviamente $\coprod_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

Evidentemente $M_j^* \leq \coprod_{i\in I} M_i$ per ogni $j \in I$. D'altra parte, per ogni $a = (a_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} M_i$ si ha $a = \sum_{i\in I} a_i^{\mu_i}$, dove la somma a secondo membro ha senso perché, anche nel caso in cui I sia infinito, gli addendi non nulli sono comunque in numero finito. Di conseguenza $\coprod_{i\in I} M_i = \sum_{i\in I} M_i^*$. Si usa chiamare monomorfismi canonici anche le ridotte a $\coprod_{i\in I} M_i$ dei monomorfismi canonici $\mu_i \colon M_i \rightarrowtail \prod_{i\in I} M_i$, cioè i monomorfismi $a \in M_i \mapsto a^{\mu_i} \in \coprod_{i\in I} M_i$.

Osserviamo anche che, per ogni $i \in I$, la restrizione di π_i a $\coprod_{i\in I} M_i$ è suriettiva, quindi in aggiunta a quanto visto sopra, $M_i \simeq (\coprod_{i\in I} M_i)/(\hat{M}_i^* \cap \coprod_{i\in I} M_i)$.

Somme dirette interne Supponiamo ora che $(M_i)_{i\in I}$ sia una famiglia di sotto(pre)moduli di un R-(pre)modulo M. Si dice che M è *somma diretta interna* della famiglia $(M_i)_{i\in I}$, e si scrive in questo caso $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, se e solo se:

— $M = \sum_{i\in I} M_i$, e
— per ogni $i \in I$ si ha $M_i \cap \sum_{i\neq j\in I} M_j = 0$.

Notiamo che richiedere queste due condizioni equivale a richiedere che il gruppo additivo di M sia somma diretta dei gruppi additivi degli M_i. L'informazione aggiuntiva che qui appare in premessa è che gli M_i non sono solo sottogruppi, ma R-sotto(pre)moduli di M.

Le somme dirette esterne sono esempi di somme dirette interne. Infatti, da quanto visto sopra segue facilmente che, per un'arbitraria famiglia $(A_i)_{i\in I}$ di (pre)moduli, si ha

$$\coprod_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} A_i^*,$$

dove, con notazione analoga a quelle usate in precedenza, le A_i^* sono le immagini dei monomorfismi canonici. Vale, in sostanza, anche il viceversa, la qual cosa ci permette di considerare interscambiabili le nozioni di somma diretta interna e di somma diretta esterna:

Proposizione 4.1. *Siano R un anello commutativo e $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di sotto(pre)moduli di un R-(pre)modulo M. Sono allora equivalenti:*

(i) $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$;
(ii) $M = \sum_{i\in I} M_i$ *e, scelti comunque una parte finita J di I e, per ogni $i \in J$, un elemento $a_i \in M_i$ in modo che $\sum_{i\in J} a_i = 0_M$, allora $a_i = 0_M$ per ogni $i \in J$;*
(iii) *l'applicazione $\varphi\colon (a_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} M_i \mapsto \sum_{i\in I} a_i \in M$ è un R-isomorfismo.*

Dimostrazione. Supponiamo $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Allora, per definizione, $M = \sum_{i\in I} M_i$; se J e gli elementi a_i, al variare di i in J sono scelti come in (ii), per ogni tale i si ha $a_i = -\sum_{i\neq j\in I} a_j \in M_i \cap \sum_{i\neq j\in I} M_j = 0$, quindi $a_i = 0_M$, dunque vale la (ii). Supponiamo ora che valga (ii). È evidente che φ, come definita in (iii), è un R-omomorfismo, il fatto che valga $M = \sum_{i\in I} M_i$ garantisce che φ è suriettiva, l'altra condizione in (ii) fornisce $\ker\varphi = 0$. Dunque, φ è un isomorfismo e vale (iii). Infine, assumiamo (iii). Chiamando, come sopra, per ogni $i \in I$, M_i^* l'immagine dell'i-esimo omomorfismo canonico, sappiamo che $\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i^*$, ed è anche evidente che, per ogni $i \in I$, M_i è l'immagine di M_i^* mediante l'isomorfismo φ, da ciò segue facilmente $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. □

Un'ultima, si immagina non sorprendente, annotazione: come in situazioni analoghe, i simboli $\prod$ e $\bigoplus$ vengono talvolta (soprattutto in relazione a famiglie finite) sostituiti dai corrispondenti simboli $\times$ e $\oplus$ in notazione infissa; ad esempio $M_1 \times M_2$ per $\prod_{i\in\{1,2\}} M_i$ e $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ per $\bigoplus_{i\in\{1,2,3\}} M_i$, che si scrive anche $\bigoplus_{i=1}^3 M_i$. La stessa avvertenza si applica a situazioni analoghe che incontreremo per altre nozioni di prodotto o somma diretta.

Esercizi.

4.A.1. Siano R un anello commutativo, $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di R-(pre)moduli, $\mathcal{J}$ una partizione di I. Verificare che $\prod_{i\in I} M_i \simeq \prod_{J\in\mathcal{J}} \prod_{i\in J} M_i$ e $\coprod_{i\in I} M_i \simeq \coprod_{J\in\mathcal{J}} \coprod_{i\in J} M_i$.

4.A.2. Siano R e $(M_i)_{i\in I}$ come nell'esercizio precedente, e sia, per ogni $i \in I$ $N_i \leq_R M_i$. Verificare che $(\prod_{i\in I} M_i)/(\prod_{i\in I} N_i) \simeq \prod_{i\in I} M_i/N_i$ e $(\coprod_{i\in I} M_i)/(\coprod_{i\in I} N_i) \simeq \coprod_{i\in I} M_i/N_i$.

4.A.3. Prodotti e somme dirette della stessa famiglia di moduli possono essere molto diversi tra loro. Ad esempio, considerati i gruppi ciclici $(\mathbb{Z}_n, +)$ come moduli su $\mathbb{Z}$, $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ è un gruppo numerabile periodico, $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ non è né numerabile né periodico.

4.2 Prodotti e somme dirette di anelli e algebre

Le definizioni di prodotti diretti e somme dirette per anelli sono simili a quelle date per (pre)moduli. Il prodotto diretto $\prod_{i\in I} R_i$ di una famiglia $(R_i)_{i\in I}$ di anelli ha per sostegno il prodotto cartesiano della famiglia e operazioni binarie definite 'componente per componente'. Che quello così ottenuto sia un anello è molto facile da verificare, così come il fatto che $\prod_{i\in I} R_i$ è commutativo se e solo se ciascuno degli R_i è commutativo, unitario se e solo se ciascuno degli R_i è unitario; chiaramente lo zero di questo anello è la famiglia $(0_{R_i})_{i\in I}$ e, qualora esista, l'unità è $(1_{R_i})_{i\in I}$. Se $\prod_{i\in I} R_i$ è unitario si ha anche $\mathcal{U}(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} \mathcal{U}(R_i)$, dove il prodotto a secondo membro è un prodotto diretto di gruppi abeliani (con la terminologia della teoria dei moduli; con quella della teoria dei gruppi è un prodotto cartesiano).

Anche le proiezioni $\pi_i\colon \prod_{j\in I} R_j \to R_i$ e i monomorfismi canonici $\mu_i\colon R_i \to \prod_{j\in I} R_j$ sono definiti esattamente come nel caso dei (pre)moduli, e verificano le stesse proprietà che in quel caso. In aggiunta, rispetto al caso dei (pre)moduli, si ha che, per ogni $i \in I$, l'immagine R_i^* di μ_i è un ideale di $\prod_{j\in I} R_j$; lo si riconosce osservando che R_i^* coincide con $\bigcap_{i\neq j\in I} \ker \pi_j$, o, in alternativa, che per ogni $r \in R_i$ e $s = (s_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} R_j$ si ha $r^{\mu_i} s = (r s_i)^{\mu_i}$, essendo nulle tutte le componenti di r^{μ_i} tranne al più la i-esima.

Per motivi che saranno chiari più avanti, per la somma diretta esterna di anelli (il sottoanello del prodotto diretto costituito dalle famiglie a supporto finito; come è facile vedere si tratta di un ideale, la somma degli ideali $R_i^* = \operatorname{im}\mu_i$ al variare di $i \in I$) non viene utilizzato il simbolo $\coprod$. Anche se ciascuno degli anelli R_i è unitario, a meno che non sia finito l'insieme degli $i \in I$ tali che R_i non sia nullo, la somma diretta esterna di $(R_i)_{i\in I}$ non è un anello unitario. Lo si verifica direttamente, o anche attraverso una proprietà dei suoi ideali propri. Abbiamo infatti:

Proposizione 4.2. *Siano $(R_i)_{i\in I}$ una famiglia di anelli commutativi e S la sua somma diretta esterna, e supponiamo che l'insieme degli $i \in I$ tali che R_i non sia nullo sia infinito. Allora S è unione insiemistica di suoi ideali propri e quindi non è unitario.*

Dimostrazione. Come sopra, per ogni $i \in I$, indichiamo con R_i^* l'immagine dell'i-esimo monomorfismo canonico da R_i a $\prod_{i\in I} R_i$. Sappiamo che R_i^* è un ideale di $\prod_{i\in I} R_i$ contenuto in S, dunque $R_i^* \lhd S$. Ogni $s \in S$ appartiene a $\sum_{i\in\operatorname{supp}(s)} R_i^*$, che è un ideale di S; siccome $\operatorname{supp}(s)$ è finito, l'ipotesi comporta che questo ideale è proprio. È così giustificata la prima parte dell'enunciato. Dal momento che, se esiste, 1_S non può appartenere ad un ideale proprio di S, se ne ricava che S non è unitario. □

Infine, riprendendo le notazioni iniziali, se supponiamo che gli R_i non siano solo anelli ma (pre)algebre su un prefissato anello commutativo R, allora $\operatorname{Cr}_{i\in I} R_i$ è anche munito dell'operazione esterna che lo rende R-(pre)modulo prodotto diretto di $(R_i)_{i\in I}$, nel senso definito in precedenza, ed è di immediata verifica il fatto che questa rende $\prod_{i\in I} R_i$ una R-(pre)algebra. Inoltre la somma diretta degli anelli R_i ne è una sotto(pre)algebra; otteniamo così la nozione di prodotto diretto e di somma diretta di R-(pre)algebre.

Anelli di funzioni Un caso particolare di prodotto diretto di anelli si ha quando la famiglia di anelli su cui il prodotto è costruito è costante.

Siano R un anello e I un insieme. Il prodotto cartesiano $\operatorname{Cr}_{i\in I} R$ della famiglia $(R)_{i\in I}$ non è altro che l'insieme R^I delle applicazioni da I a R. Il corrispondente anello prodotto diretto, $\prod_{i\in I} R$, viene chiamato l'anello delle funzioni da I a R ed è commutativo, o unitario, se e solo se R ha la stessa proprietà. Si verifica facilmente che le operazioni di addizione e moltiplicazione in questo anello sono le operazioni puntuali definite dalle omologhe operazioni di R, che avevamo definito nella sottosezione 1.1.1.

Somme dirette interne di anelli Siano R un anello commutativo e $(H_i)_{i\in I}$ una famiglia di ideali di R. In termini di premoduli, questa situazione si può equivalentemente esprimere dicendo che $(H_i)_{i\in I}$ è una famiglia di sottopremoduli dell'R-premodulo R_R. Se $R_R = \bigoplus_{i\in I} H_i$ (e solo in questo caso), diciamo anche che R (come anello) è somma diretta (interna) della famiglia $(H_i)_{i\in I}$, e scriviamo anche $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$. Osserviamo che questo equivale anche all'essere $(R,+) = \bigoplus_{i\in I}(H_i,+)$ (cioè: che il gruppo additivo di R sia somma diretta dei gruppi additivi degli H_i) a condizione, non lo dimentichiamo, che gli H_i siano tutti ideali di R.

Una proprietà ovvia ma essenziale delle somme dirette interne $\bigoplus_{i\in I} H_i$ di anelli è la cosiddetta ortogonalità dei sommandi diretti: per ogni $i, j \in I$ e $i \neq j$, si ha $H_i \cap H_j = 0$ e quindi $H_iH_j = 0$, in conseguenza del lemma 3.1 (i).

Come accade per i (pre)moduli, si possono in qualche senso identificare le nozioni di somma diretta interna ed esterna di anelli commutativi. Infatti, poiché l'analogo enunciato vale per i premoduli, se $(R_i)_{i\in I}$ è una famiglia di anelli commutativi, indicando, per ogni $i \in I$, con H_i l'immagine dell'i-esimo monomorfismo canonico da R_i a $\prod_{j\in I} R_j$, abbiamo che la somma diretta esterna di $(R_i)_{i\in I}$ è la somma diretta interna di $(H_i)_{i\in I}$ (abbiamo già visto che ciascuno degli H_i è un ideale di questa somma). Inoltre, la proposizione 4.1, tradotta nel linguaggio degli anelli, diventa:

Proposizione 4.3. *Siano R un anello commutativo e S la somma diretta esterna di una famiglia $(H_i)_{i\in I}$ di ideali di R. Allora $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$ se e solo se l'applicazione*

$$\varphi\colon (a_i)_{i\in I} \in S \longmapsto \sum_{i\in I} a_i \in R$$

è un isomorfismo di anelli.

Dimostrazione. Come osservato, abbiamo $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$ se e solo se $(R,+) = \bigoplus_{i\in I}(H_i,+)$, e questo, in accordo con la proposizione 4.1 applicata al caso degli $\mathbb{Z}$-moduli, equivale a dire che φ sia un isomorfismo di gruppi additivi. Bisogna dunque verificare che φ è un isomorfismo di gruppi additivi se e solo se è un isomorfismo di anelli. Siano $a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I} \in S$. Se $i, j \in I$ e $i \neq j$, abbiamo $a_ib_j = 0$, dal momento che $H_iH_j = 0$, come visto sopra. Pertanto $a^\varphi b^\varphi = (\sum_{i\in I} a_i)(\sum_{i\in I} b_i) = \sum_{i\in I} a_ib_i = (ab)^\varphi$. Concludiamo che φ conserva la moltiplicazione; l'asserto è ora chiaro. □

Se un anello commutativo R è somma diretta interna di suoi ideali: $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$, allora, visti come anelli, gli ideali H_i sono sottoanelli di R ma sono anche isomorfi a quozienti di R, avendosi, per ogni $i \in I$, $H_i \simeq R/(\sum_{i\neq j\in I} H_j)$. Quindi, se R è unitario, gli ideali H_i sono necessariamente anelli unitari (ma non, salvo che in casi banali, sottoanelli unitari). L'ovvio epimorfismo $R \twoheadrightarrow H_i$ che abbiamo implicitamente utilizzato è spesso chiamato proiezione di R su H_i ed è strettamente imparentato con le proiezioni definite a proposito dei prodotti diretti: se identifichiamo R con la somma diretta esterna degli ideali H_i utilizzando l'isomorfismo φ della proposizione 4.3, la proiezione di R su H_i è semplicemente la restrizione a R della proiezione $\pi_i\colon \prod_{j\in I} R_j \to R_i$. Come è facile verificare, se H_i è unitario, la proiezione di R su H_i è l'applicazione che ad ogni $r \in R$ associa $r1_{H_i} \in H_i$.

Gli ideali di una somma diretta di anelli commutativi unitari sono facili da descrivere in termini degli ideali dei sommandi diretti:

Proposizione 4.4. *Sia $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$ un anello commutativo, somma diretta di una famiglia $(H_i)_{i\in I}$ di suoi ideali che siano tutti unitari. Allora:*

(i) *gli ideali di R sono tutte e sole le somme dirette $\bigoplus_{i\in I} K_i$ dove $K_i \lhd H_i$ per ogni $i \in I$;*

(ii) *gli ideali massimali di R sono tutti soli quelli della forma $M_i \oplus (\bigoplus_{i\neq j\in I} H_j)$ dove $M_i \lhd\cdot H_i$, al variare di i in I;*

(iii) *gli ideali primi di R sono tutti soli quelli della forma $P_i \oplus (\bigoplus_{i\neq j\in I} H_j)$ dove $P_i \in \operatorname{Spec}(H_i)$, al variare di i in I.*

Dimostrazione. Dal momento che $H_iH_j = 0$ per ogni scelta di i e j distinti in I, è facile riconoscere che le somme dirette menzionate in (i) sono tutte ideali di R. Viceversa, sia $H \lhd R$. Per ogni $i \in I$ sia $K_i = H1_{H_i}$, l'immagine di H mediante la proiezione $p_i\colon r \in R \mapsto r1_{H_i} \in H_i$ di R sul suo sommando diretto H_i; chiaramente $K_i \subseteq H_i$. Siccome $h = \sum_{i\in I} h^{p_i}$ per ogni $h \in H$ (si noti che la somma è ben definita perché è finito il numero degli addendi non nulli), $H \subseteq \sum_i K_i$. D'altra parte $\sum_{i\in I} K_i \subseteq H$; si ottiene così la (i).

La (ii) segue facilmente da (i). Anche la (iii) ne è una conseguenza: se $P = \bigoplus_{i\in I} K_i \lhd R$ (e $K_i \lhd H_i$ per ogni i), allora (si veda l'esercizio 4.A.2) $R/P \simeq \coprod_{i\in I} H_i/K_i$. Ora, per la proprietà di ortogonalità dei sommandi di una somma diretta, R/P è un dominio di integrità se e solo se esattamente uno dei quozienti H_i/K_i non è nullo, e quello non nullo è un dominio di integrità. Dunque, P è primo se e solo se esiste un $i \in I$ tale che K_i sia primo in H_i e $K_j = H_j$ per ogni $j \in I \smallsetminus \{i\}$; questo è il contenuto di (iii). □

Da (ii) e (iii) della proposizione 4.4 segue direttamente che il radicale di Jacobson ed il nilradicale di una somma diretta di anelli unitari sono le somme dirette dei corrispondenti radicali dei sommandi. Lo stesso si può dimostrare anche per anelli non unitari:

Proposizione 4.5. *Sia $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$ un anello commutativo, somma diretta di una famiglia $(H_i)_{i\in I}$ di suoi ideali. Allora:*
(i) $\operatorname{Jac}(R) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Jac}(H_i)$;
(ii) $\operatorname{NilRad}(R) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{NilRad}(H_i)$.

Dimostrazione. La (ii) è molto semplice da provare: per ogni $r \in R$, indicando per ogni $i \in I$ con p_i la proiezione di R su H_i, si vede molto facilmente che r è nilpotente se e solo se r^{p_i} è nilpotente per ogni $i \in I$ (il fatto che $r^{p_i} \neq 0_R$ solo per un numero finito di scelte di i è qui essenziale). Da ciò la (ii) segue immediatamente.

Per provare la (i), osserviamo che, per ogni $i \in I$ ed ogni $K_i \lhd\cdot H_i$ la somma $K_i \oplus (\bigoplus_{i\neq j\in I} H_j)$ è un ideale massimale di R. L'intersezione tra tutti questi ideali massimali di R (assumendo l'intersezione uguale a R se l'insieme intersecato è vuoto) è $\bigoplus_{i\in I} \operatorname{Jac}(H_i)$; questa somma contiene dunque $\operatorname{Jac}(R)$. Viceversa, se $M \lhd\cdot R$ e $i \in I$, allora o $H_i \subseteq M$ oppure $R = H_i + M$. In questo secondo caso $\bar{H} := H_i/(M \cap H_i) \simeq_R R/M$ per il secondo teorema di omomorfismo, quindi $\bar{H}$ è un R-premodulo semplice. Posto $K = \bigoplus_{i\neq j\in I} H_j$, si ha $R = H_i + K$, e $\bar{H}K = 0$. Da ciò segue che ogni H_i-sottopremodulo di $\bar{H}$ è anche un R-premodulo, quindi $\bar{H}$ è semplice anche come H_i-premodulo, sicché $M \cap H_i \lhd\cdot H_i$ e $\operatorname{Jac}(H_i) \subseteq M \cap H_i \subseteq M$. Abbiamo mostrato che, in ciascuno dei due casi, $\operatorname{Jac}(H_i) \subseteq M$. Pertanto $\bigoplus_{i\in I} \operatorname{Jac}(H_i) \subseteq \operatorname{Jac}(R)$; ora la dimostrazione è completa. □

Esercizi.

4.B.1. Sia I uno spazio topologico. Verificare che nell'anello delle funzioni da I a $\mathbb{R}$ l'insieme C delle funzioni continue costituisce un sottoanello unitario. Provare inoltre che:
i) $\mathcal{U}(C) = \{f \in C \mid (\forall a \in I)(a^f \neq 0)\}$;
ii) se I è compatto, gli ideali massimali di C sono tutti e soli gli insiemi $M_i = \{f \in C \mid i^f = 0\}$ al variare di i in I. (Suggerimento: per ogni $f \in C$, sia Z_f l'antiimmagine di $\{0\}$ mediante f; osservare che se F è una parte finita di un ideale proprio H di C allora $\bigcap\{Z_f \mid f \in F\} \neq \varnothing$ e dedurne, utilizzando la compatteza di I, che $\bigcap\{Z_f \mid f \in H\} \neq \varnothing$.)

4.B.2. L'anello delle parti di un insieme può essere riguardato come anello di funzioni. Infatti, per ogni insieme S, l'applicazione da $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ all'anello delle funzioni da S a $\mathbb{Z}_2$ che ad ogni parte di S associa la sua funzione caratterisica è un isomorfismo. Verificarlo.

4.B.3. Questo esempio si riferisce alla definizione di somma diretta interna per anelli ed ha lo scopo di illustrare la rilevanza del fatto che i sottoanelli sommandi diretti siano ideali.

Sia $R = H \oplus K$ un anello commutativo, somma diretta interna di due ideali H e K tra loro isomorfi tramite un isomorfismo (di anelli) $\alpha\colon H \to K$. Allora $D = \{hh^\alpha \mid h \in H\}$ è un sottoanello (anche unitario, se R è unitario) di R isomorfo, come anello, ad H e certamente $(R,+) = (H,+) \oplus (D,+)$ è una somma diretta di gruppi abeliani. (Può essere utile visualizzare la situazione in termini di somme dirette esterne, identificando R con $H \times H$ e, utilizzando i monomorfismi canonici, H con il suo ideale $H \times 0$ e K con $0 \times H$; in questo modo D diventa la diagonale $\{(h,h) \mid h \in H\}$ di H). È chiaro che, escluso il caso particolare in cui H sia un anello a prodotto costante nullo (cioè $H^2 = 0$), D non è un ideale di R, infatti $H \supseteq HD = H^2 \not\subseteq D$, quindi R non è, come anello, somma diretta interna di H e D, benché lo sia come gruppo abeliano e, come anello, $D \simeq K \simeq R/H$. In termini delle operazioni sugli elementi, in cosa la decomposizione $R = H + D$ differisce dalla decomposizione $R = H \oplus K$? Nel fatto che mentre, rispetto alla seconda decomposizione, il prodotto tra elementi di R si ottiene 'addendo per addendo' ('componente per componente' se ci riferiamo alla rappresentazione di R come somma diretta esterna), cioè $(h_1+k_1)(h_2+k_2) = h_1h_2+k_1k_2$ per ogni $h_1, h_2 \in H$ e $k_1, k_2 \in K$, l'analoga descrizione non si applica alla decomposizione $R = H + D$. Infatti, ogni elemento di R si scrive in unico modo nella forma $h + d$ per opportuni $h \in H$ e $d \in D$, ma se $h_1, h_2 \in H$ e $d_1, d_2 \in D$ si ha $(h_1 + d_1)(h_2 + d_2) = h^* + d_1d_2$ dove ovviamente $d_1d_2 \in D$, ma $h^* = h_1h_2 + h_1d_2 + h_2d_1$ è un elemento di H in generale diverso da h_1h_2: si ha $d_1 = uu^\alpha$ e $d_2 = vv^\alpha$ per opportuni $u, v \in H$ e $h^* = h_1h_2 + h_1v + h_2u$.

4.B.4. Proseguendo con le considerazioni sulle somme dirette di anelli, notiamo che se $R = H \oplus K$, dove $H, K \lhd R$, allora $K \subseteq \mathrm{Ann}_R(H)$ e, per la legge di Dedekind (lemma 1.8), $\mathrm{Ann}_R(H) = \mathrm{Ann}_H(H) + K$. Dunque, se H è tale che $\mathrm{Ann}_H(H) = 0$ (ad esempio, se H è unitario oppure è un dominio di integrità), allora $K = \mathrm{Ann}_R(H)$ è univocamente determinato da H: non esistono altri ideali $I \lhd R$ tali che $R = H \oplus I$.

4.B.5. Sia $R = \prod_{i\in I} R_i$ il prodotto di una famiglia di anelli commutativi unitari. Dopo aver verificato che, come detto nel testo, $\mathcal{U}(R) = \prod_{i\in I} \mathcal{U}(R_i)$, dedurne $\mathrm{Jac}(R) = \prod_{i\in I} \mathrm{Jac}(R_i)$.

4.B.6. In contrasto con l'esercizio precedente, nelle stesse notazioni, si ha (ovviamente) $\mathrm{NilRad}(R) \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{NilRad}(R_i)$, ma non sempre vale l'uguaglianza. Ad esempio, in $\prod_{i\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_{2^i}$ l'elemento $([2]_{2^i})_{i\in\mathbb{N}^+}$ non è nilpotente, pur appartenendo a $\prod_{i\in\mathbb{N}^+} \mathrm{NilRad}(\mathbb{Z}_{2^i})$.

4.B.7. L'analogo della proposizione 4.4 non vale se gli H_i non sono assunti unitari, né vale per prodotti diretti di anelli, anche unitari. Ad esempio, il gruppo V_4 di Klein si può descrivere come somma diretta di due gruppi di ordine 2: $\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$. Una volta munito del prodotto costante nullo, V_4 costituisce un anello (non unitario) commutativo in cui $\langle a\rangle$ e $\langle b\rangle$ sono ideali (abbiamo quindi una somma diretta di anelli), ma il sottogruppo generato da $a + b$ è un ideale, per giunta massimale, che non è della forma indicata in (i) della proposizione 4.4.

Sia ora $R = \prod_{i\in I} R_i$ il prodotto di una famiglia di anelli commutativi unitari, e chiamiamo fattorizzati gli ideali di R della forma $\prod_{i\in I} K_i$, dove ciascuno dei K_i è un ideale di R_i. Tra gli ideali fattorizzati, quelli che sono massimali come ideali di R sono quelli ottenuti scegliendo $K_i \lhd\cdot R_i$ per un $i \in I$ e $K_j = R_j$ per ogni altro $j \in I$. Mostriamo che possono esistere in un tale R ideali massimali non fattorizzati.

Se S è un insieme infinito, come visto in un esercizio precedente, l'anello $\mathcal{P}(S)$ è isomorfo all'anello di funzioni $\mathbb{Z}_2^S$, ovvero (verificarlo!) a $R := \prod_{x\in S} \mathcal{P}(\{x\})$. Dal momento che, per ogni $x \in S$, l'unico ideale proprio di $\mathcal{P}(\{x\})$ e quello nullo, cioè $\{\varnothing\}$, in questo prodotto gli ideali massimali fattorizzati sono quelli della forma $M_x = \{\varnothing\} \times \prod_{x\neq y\in S} \mathcal{P}(\{y\})$ al variare di x

in S. Ora, nell'ovvio isomorfismo tra $\mathcal{P}(S)$ e R, ciascun M_x corrisponde all'ideale massimale $\mathcal{P}(S \smallsetminus \{x\})$ di $\mathcal{P}(S)$. Si può verificare che non tutti gli ideali massimali di $\mathcal{P}(S)$ sono di questo tipo, dunque non tutti gli ideali massimali di R sono fattorizzati. Un modo semplice per arrivarci è questo: l'insieme delle parti finite di S costituisce un ideale proprio F di $\mathcal{P}(S)$; per il teorema di Krull dell'ideale massimale $F \subseteq M$ per qualche $M \lhd \cdot\, \mathcal{P}(S)$. Ma, chiaramente, per ogni $x \in S$ si ha $F \not\subseteq \mathcal{P}(S \smallsetminus \{x\})$, quindi M è un ideale massimale che corrisponde ad un ideale non fattorizzato di R.

Chi ha incontrato la nozione di ultrafiltro potrebbe interpretare il discorso appena fatto in questo modo: gli ideali massimali di $\mathcal{P}(S)$ hanno come complementi in $\mathcal{P}(S)$ gli ultrafiltri di S; tra questi gli ultrafiltri principali sono quelli della forma $\mathcal{P}(S) \smallsetminus \mathcal{P}(S \smallsetminus \{x\})$ al variare di $x \in S$, ma, assumendo l'assioma di scelta, esistono in $\mathcal{P}(S)$ anche ultrafiltri non principali, e da ciò segue la conclusione.

4.2.1 Idempotenti e decomposizioni dirette in anelli

In una struttura algebrica in cui sia definita un'operazione binaria $*$ un elemento e si dice *idempotente* (rispetto a $*$) se e solo se $e * e = e$. In un anello R il termine idempotente è sempre riferito all'operazione di moltiplicazione, quindi un idempotente di R è per definizione un elemento e che coincida col proprio quadrato. Ovviamente, se e è idempotente si ha $e = e^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Sono idempotenti 0_R e, se R è unitario, 1_R; questi sono detti gli *idempotenti banali* di R. Assumendo R commutativo, si dice poi che due idempotenti e, e' di R sono *ortogonali* tra loro se e solo se $ee' = 0_R$. Ad esempio: nell'anello $\mathbb{Z}_{10}$ gli elementi $[5]_{10}$ e $[6]_{10}$ sono idempotenti tra loro ortogonali.

Lemma 4.6. *Sia e un elemento idempotente in un anello commutativo R. Allora*
(i) *eR è l'ideale generato da e in R;*
(ii) *eR è un anello unitario, con unità e;*
(iii) *$R = eR \oplus \mathrm{Ann}_R(e)$;*
(iv) *e è l'unità di R oppure un divisore dello zero in R;*
(v) *se R è unitario, $1_R - e$ è un idempotente ortogonale ad e.*

Dimostrazione. Abbiamo $e = e^2$, quindi $e \in eR$; questo prova (i). Inoltre, per ogni $r \in R$, si ha $e(er) = e^2 r = er$, dunque e è l'unità di eR ed otteniamo così (ii). Evidentemente $(eR)^2 = eR$, quindi il lemma 3.26 fornisce $R = eR + \mathrm{Ann}_R(e)$. Da ciò e dal fatto che vale $e = 1_{eR}$ traiamo (iii) e (iv): $eR \cap \mathrm{Ann}_R(e) = \mathrm{Ann}_{(eR)}(e) = 0$, dunque $R = eR \oplus \mathrm{Ann}_R(e)$; inoltre, se e non è l'unità di R, allora $R \neq eR$, quindi $\mathrm{Ann}_R(e) \neq 0$, vale a dire: e è un divisore dello zero.

Infine, se R è unitario, abbiamo $(1_R - e)^2 = 1_R - 2e + e^2 = 1_R - 2e + e = 1_R - e$, quindi $1_R - e$ è idempotente. Inoltre $e(1_R - e) = e - e^2 = 0_R$, quindi e e $1_R - e$ sono tra loro ortogonali. □

È evidente da (v) che, se R è unitario, l'assegnazione $e \mapsto 1_R - e$ definisce una permutazione involutoria (cioè di periodo due, a meno che R sia nullo) nell'insieme degli elementi idempotenti di R.

Corollario 4.7. *Sia R un anello commutativo. Se R è indecomponibile in somma diretta (cioè: non è somma diretta di suoi ideali non banali) allora R non ha idempotenti non banali.*

Se poi R è anche unitario, la condizione si inverte: R è indecomponibile in somma diretta se e solo se non ha idempotenti non banali.

Dimostrazione. Se R ha un elemento idempotente non banale e, allora le parti (ii) e (iii) del lemma 4.6 mostrano che eR è un sommando diretto in R e $0 \neq eR \neq R$; questo dimostra la prima

parte dell'enunciato. Se R è unitario e, viceversa, il suo ideale non banale H ne è un sommando diretto, allora H è unitario perché isomorfo ad un quoziente di R, e ovviamente 1_H è idempotente. Inoltre $1_H \neq 0_R$, perché $H \neq 0$ e $1_H \neq 1_R$, perché essendo $H \neq R$ certamente $1_R \notin H$. □

Notiamo che se l'anello commutativo R non è unitario, è possibile che R non sia indecomponibile in somma diretta pur essendo privo di idempotenti non banali, cioè nulli. Un esempio ovvio è la somma diretta esterna di due copie dell'anello $2\mathbb{Z}$. Nel caso degli anelli unitari dimostreremo invece, nel teorema 4.9, una versione molto più precisa del corollario 4.7.

Lemma 4.8. *Siano R un anello commutativo e sia E un insieme finito di elementi idempotenti di R a due a due ortogonali tra loro. Allora:*
(i) *$s := \sum_{e\in E} e$ è idempotente; inoltre sR è l'ideale generato da E in R e s ne è l'unità;*
(ii) *$\operatorname{Ann}_R(s) = \operatorname{Ann}_R(E)$ e $R = \left(\bigoplus_{e\in E} eR\right) \oplus \operatorname{Ann}_R(s) = sR \oplus \operatorname{Ann}_R(s)$.*

Dimostrazione. $s^2 = (\sum_{e\in E} e)(\sum_{e\in E} e) = \sum_{e,f\in E} ef = \sum_{e\in E} e^2 = \sum_{e\in E} e = s$, perché $ef = 0_R$ per ogni $e, f \in E$ tali che $e \neq f$. Dunque s è idempotente, $sR = (s)$ e $s = 1_{sR}$ per il lemma 4.6. Inoltre, per ogni $e \in E$ si ha $es = e\sum_{f\in E} f = e^2 = e$, quindi $E \subseteq sR$ e così sR è anche l'ideale generato da E e di conseguenza $\operatorname{Ann}_R(s) = \operatorname{Ann}_R(E)$.

Il lemma 4.6 (iii) fornisce $R = sR \oplus \operatorname{Ann}_R(s)$. Ovviamente $sR = \sum_{e\in E} eR$ e, per ogni $e \in E$, $eR \cap \sum_{f\in E\smallsetminus\{e\}} fR \subseteq eR \cap \operatorname{Ann}_R(e) = 0$ per lo stesso lemma, quindi $sR = \bigoplus_{e\in E} eR$. A questo punto la dimostrazione è completa. □

Nel caso in cui s sia cancellabile, cioè, per il lemma 4.6 (iv), quando R è unitario e $s = 1_R$, questo lemma mostra che l'insieme E produce una decomposizione di R in somma diretta (finita) di ideali (necessariamente principali): $R = \bigoplus_{e\in E} eR$, perché $\operatorname{Ann}_R(s) = 0$. Come stiamo per vedere, questa osservazione si inverte.

Notiamo innanzitutto che è facile costruire idempotenti, anche tra loro ortogonali, in prodotti diretti di anelli unitari. Sia infatti $R = \prod_{i\in I} R_i$, dove, per ogni i, R_i è un anello commutativo unitario. Ovviamente, un elemento di R è idempotente se e solo se lo sono tutte le sue componenti, quindi ogni $(r_i)_{i\in I} \in R$ tale che per ogni $i \in I$ si abbia $r_i \in \{0_{R_i}, 1_{R_i}\}$ è idempotente. Sempre per ogni $i \in I$ poniamo $e_i = 1_{R_i}^{\mu_i}$, dove μ_i è il monomorfismo canonico $R_i \to R$; dunque e_i ha i-esima componente 1_{R_i} ed ogni altra componente nulla. Gli elementi e_i, al variare di $i \in I$, si chiamano *idempotenti canonici* del prodotto R (rispetto alla famiglia $(R_i)_{i\in I}$) e sono tra loro, a due a due, ortogonali. Nel caso in cui I sia finito, possiamo sommare tra loro gli idempotenti canonici di R ottenendo, evidentemente, $\sum_{i\in I} e_i = 1_R$; si usa dire che quella data dagli e_i è una decomposizione dell'unità di R in (somma di) idempotenti ortogonali.

Sia ora R un anello commutativo unitario arbitrario. Chiamiamo $\mathcal{E}$ l'insieme degli insiemi finiti E di elementi idempotenti di R a due a due ortogonali tali che $1_R = \sum_{e\in E} e$ (informalmente: l'insieme delle decomposizioni dell'unità di R in somma di idempotenti ortogonali; l'esercizio 4.C.1 mostra che la richiesta che gli elementi degli $E \in \mathcal{E}$ siano idempotenti sia in realtà ridondante) e $\mathcal{S}$ l'insieme degli insiemi finiti S di ideali di R tali che $R = \bigoplus_{H\in S} H$ (informalmente: l'insieme delle decomposizioni di R in somma diretta finita).

Teorema 4.9. *Nelle notazioni appena fissate, l'applicazione da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{S}$ che ad ogni $E \in \mathcal{E}$ associa $\{eR \mid e \in E\} \in \mathcal{S}$ è biettiva.*

Dimostrazione. Il lemma 4.8 (iii) mostra che l'applicazione è ben definita: $R = \bigoplus_{e\in E} eR$ per ogni $E \in \mathcal{E}$, dal momento che $\sum_{e\in E} e = 1_R$. Ricordando che i sommandi che appaiono in una decomposizione diretta di un anello unitario sono certamente unitari, definiamo l'inversa di questa applicazione associando a ciascun $S \in \mathcal{S}$ l'insieme $\{1_H \mid H \in S\}$; è facile verificare che questo insieme è un elemento di $\mathcal{E}$: nell'isomorfismo tra $\prod_{H\in S} H$ e R stabilito nella proposizione 4.3 i suoi elementi corrispondono agli idempotenti canonici del prodotto, quindi la loro somma è 1_R ed

essi sono tra loro ortogonali. La verifica del fatto che, come detto, le due applicazioni sono l'una inversa dell'altra è immediata, tenendo presente la parte (ii) del lemma 4.6. □

Esercizi.

4.C.1. Verificare che se in un anello commutativo unitario R gli elementi $e_1, e_2, \dots, e_n$ sono tali che $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ e $e_i e_j = 0_R$ per ogni scelta di i e j tra loro distinti, allora necessariamente tutti gli e_i sono idempotenti.

4.C.2. Uno studente, Dario Esposito, che ha partecipato al corso qualche anno fa, ha proposto un'elegante applicazione del teorema 4.9: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $5^{2^n} + 6^{5^n} \equiv_{10^{n+1}} 1$, vale a dire: scritto in base 10, il numero $5^{2^n} + 6^{5^n}$ termina con n zeri seguiti da un 1. Provare a dimostrarlo dopo aver verificato che:

i) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $5^{2^n} \equiv_{2^{n+1}} 1$ e $6^{5^n} \equiv_{5^{n+1}} 1$, quindi $[5^{2^n}]_{10^{n+1}}$ e $[6^{5^n}]_{10^{n+1}}$ sono elementi idempotenti nell'anello $\mathbb{Z}_{10^{n+1}}$. Questo si può dimostrare per induzione su n, ma anche, in alternativa, utilizzando il teorema di Fermat-Eulero e qualche informazione sulla struttura del gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico di ordine potenza di primo (oppure, il che è lo stesso, sulla struttura del gruppo degli invertibili degli anelli quoziente di $\mathbb{Z}$).

ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, il gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_{10^{n+1}}, +)$ ha (al massimo) una decomposizione non banale in somma diretta interna; questo segue dal fatto che 10^{n+1} ha esattamente due divisori primi.

4.C.3. Siano R un anello commutativo e $H \lhd R$. Provare che se si verifica una delle seguenti:

i) come R-(pre)modulo, H è finitamente generato e $H^2 = H$;

ii) come anello, H è unitario,

allora $R = H \oplus K$ per un opportuno $K \lhd R$.

4.C.4. Sia R un anello commutativo. Verificare che l'assegnazione $\varepsilon \mapsto 1^\varepsilon$ definisce una biezione dall'insieme degli omomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}$ ad R all'insieme degli elementi idempotenti di R.

4.2.2 Immersioni in prodotti diretti di quozienti

Se una famiglia $(H_i)_{i\in I}$ di ideali di un anello commutativo R ha intersezione nulla, allora il prodotto diretto dei quozienti R/H_i ha un sottoanello isomorfo a R. Questo è un caso particolare del prossimo lemma.

Lemma 4.10. *Siano R un anello commutativo, A una R-prealgebra e $(H_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottoprealgebre di A che ne siano anche ideali. Allora l'applicazione*

$$\theta\colon a \in A \longmapsto (a + H_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(A/H_i)$$

è un omomorfismo di R-prealgebre. Il suo nucleo è $\bigcap\{H_i \mid i \in I\}$.

Inoltre, se A è unitaria, θ è un omomorfismo di R-prealgebre unitarie e si ha:

(i) *se θ è suriettivo, per ogni $J \subset I$ tale che $J \neq \varnothing$, $\bigcap_{i\in J} H_i$ e $\bigcap_{i\in I\smallsetminus J} H_i$ sono ideali comassimali in A e, in particolare, gli ideali H_i, al variare di $i \in I$, sono a due a due comassimali;*

(ii) *se I è finito, θ è suriettivo se e solo se gli ideali H_i, al variare di $i \in I$, sono a due a due comassimali in A.*

Dimostrazione. Che θ sia un omomorfismo è ovvio. Sia $a \in A$. Per ogni $i \in I$, la i-esima componente di a^θ è $a + H_i$, che è $0_{A/H_i}$ se e solo se $a \in H_i$. Dunque, $\ker\theta = \bigcap\{H_i \mid i \in I\}$.

La prima parte dell'enunciato è così verificata. Per provare il resto, assumiamo ora A unitario. È chiaro che anche θ è unitario. Chiamiamo P il suo codominio $\prod_{i\in I}(A/H_i)$. Per ogni parte J di I, chiamiamo e_J l'elemento $(x_i)_{i\in I}$ definito da $x_i = H_i$ (cioè $x_i = 0_{A/H_i}$) per ogni $i \in J$ e $x_i = 1_A + H_i$ (cioè $x_i = 1_{A/H_i}$) per ogni $i \in I \setminus J$; inoltre, se $J \neq \varnothing$, poniamo anche $H_J = \bigcap H_i \mid i \in J$.

Fissiamo J tale che $\varnothing \neq J \subset I$. Se θ è suriettiva, esiste $a \in A$ tale che $a^\theta = e_J$. Allora $a + H_i = H_i$ (cioè $a \in H_i$) per ogni $i \in J$ e $a + H_i = 1_A + H_i$ (cioè $1_A - a \in H_i$) per ogni $i \in I \setminus J$. Pertanto $a \in H_J$ e $1_A - a \in H_{I\setminus J}$, sicché $1_A = a + (1_A - a) \in H_J + H_{I\setminus J}$ e dunque $A = H_J + H_{I\setminus J}$. Abbiamo così provato che H_J e $H_{I\setminus J}$ sono comassimali. Per completare la dimostrazione di (i) osserviamo che se i e j sono due elementi distinti di I, allora $J := \{i\} \subset I$ e $H_J = H_i$ mentre $H_{I\setminus J} \subseteq H_j$, quindi dal fatto che H_J e $H_{I\setminus J}$ sono comassimali in A segue che anche H_i e H_j lo sono.

Per provare (ii), supponiamo ora che I sia finito e $A = H_i + H_j$ per ogni $i, j \in I$ tali che $i \neq j$. Per ogni $i \in I$, segue dai lemmi 3.2 e 3.3 che H_i è comassimale con $K_i = H_{I\setminus\{i\}}$, dunque $1_A = h_i + k_i$ per opportuni $h_i \in H_i$ e $k_i \in K_i$. Ma allora $k_i + H_i = 1_A + H_i$ e $k_i + H_j = H_j$ se $i \neq j \in I$, quindi $k_i^\theta = e_{\{i\}}$, nelle notazioni introdotte sopra. Questo significa che k_i^θ è l'i-esimo idempotente canonico del prodotto diretto P. Pertanto $X := \{e_{\{i\}} \mid i \in I\} \subseteq \operatorname{im}\theta$. Ma $P = XA$, di conseguenza $\operatorname{im}\theta = P$ e θ è suriettiva. È così provata una delle due implicazioni richieste; l'altra era già contenuta in (i). Ora la dimostrazione è completa. □

Corollario 4.11. *Siano M un (pre)modulo e $(N_i)_{i\in I}$ una famiglia di suoi sotto(pre)moduli. Allora l'applicazione $\theta\colon a \in M \mapsto (a + N_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(M/N_i)$ è un omomorfismo di (pre)moduli. Il suo nucleo è $\bigcap_{i\in I} N_i$.*

Dimostrazione. Munito del prodotto interno costante nullo, M diventa una prealgebra sul suo anello di scalari originale, con tutti i sottogruppi ideali, quindi l'asserto si ottiene dal lemma precedente. □

Due applicazioni aritmetiche

Teorema 4.12 (Il teorema cinese dei resti)**.** *Siano n un numero intero positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ interi positivi a due a due coprimi. Allora $\mathbb{Z}_{a_1a_2\cdots a_n} \simeq \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{a_i}$. Un isomorfismo è descritto dall'applicazione $[t]_{a_1a_2\cdots a_n} \in \mathbb{Z}_{a_1a_2\cdots a_n} \mapsto ([t]_{a_i})_{i\in I} \in \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{a_i}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il lemma 4.10 all'anello $\mathbb{Z}$ ed alla famiglia $(a_i\mathbb{Z})_{i\in I}$ di suoi ideali, dove $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Posto $P = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{a_i}$, il lemma fornisce l'omomorfismo di anelli unitari

$$\theta\colon t \in \mathbb{Z} \mapsto ([t]_{a_i})_{i\in I} \in P,$$

con nucleo $K := \bigcap_{i\in I} a_i\mathbb{Z}$. Il fatto che gli interi a_i siano a due e due coprimi mostra, per il teorema di Bézout, che gli ideali $a_i\mathbb{Z}$ sono a due a due comassimali, quindi $K = (a_1\mathbb{Z})(a_2\mathbb{Z})\cdots(a_n\mathbb{Z}) = (a_1a_2\cdots a_n)\mathbb{Z}$ per il lemma 3.3 e, per il lemma 4.10, θ è suriettiva. Di conseguenza, per il primo teorema di isomorfismo, $\mathbb{Z}_{a_1a_2\cdots a_n} = \mathbb{Z}/K \simeq P$. □

La *funzione di Eulero* $\varphi\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ è definita associando ad ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'intero positivo $\varphi(n) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)|$, che è uguale al numero degli interi compresi tra 1 ed n che siano coprimi con n. La funzione di Eulero non è un omomorfismo né rispetto all'addizione né rispetto alla moltiplicazione, ma è quella che in teoria dei numeri viene chiamata una funzione moltiplicativa, intendendo con questo che vale questo risultato:

Corollario 4.13. *Se a e b sono due interi positivi coprimi, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.*

Dimostrazione. Abbiamo $\varphi(ab) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{ab})|$. Per il teorema 4.12, $\mathbb{Z}_{ab} \simeq \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ e quindi, per l'esercizio 4.B.5, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{ab}) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_a) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}_b)$; da ciò segue subito l'asserto. □

Si verifica anche che, viceversa, se a e b sono interi positivi *non* coprimi tra loro, allora $\varphi(ab) \neq \varphi(a)\varphi(b)$; questo è il contenuto dell'esercizio 4.D.2.

Esercizi.

4.D.1. Non si conoscono algoritmi che permettano di calcolare in modo efficiente il valore $\varphi(a)$ assunto della funzione di Eulero per un arbitrario intero positivo a, ma è facile calcolare questo valore se di a si conosce la fattorizzazione in potenze di primi. Infatti è facile verificare che, se p è un numero primo positivo e $n \in \mathbb{N}^+$, si ha $\varphi(p^n) = (p-1)p^{n-1}$. Da questa osservazione e dal corollario 4.13 segue che, se $a = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_k^{\lambda_k}$ dove $k \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots . p_k$ sono primi positivi a due a due distinti e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}^+$, allora $\varphi(a) = \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1)p_i^{\lambda_i - 1}$.

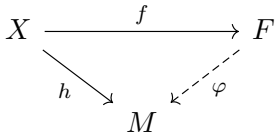
4.D.2. Usare l'osservazione precedente per dimostrare questa inversione del corollario 4.13: se a e b sono interi positivi tali che $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, allora a e b sono coprimi tra loro.

4.3 Costruzioni universali: oggetti liberi, prodotti e coprodotti

Introduciamo qui alcuni esempi di costruzioni che sono di grande importanza in tanti settori della matematica. Una descrizione precisa richiede il linguaggio della teoria delle categorie; ci limitiamo qui a dire che un oggetto A (una struttura algebrica, nel nostro caso) ha una proprietà universale rispetto ad un certo tipo di diagrammi quando, ogni volta che siano dati diagrammi del tipo indicato esiste uno ed un solo omomorfismo di dominio o codominio A che, aggiunto ai diagrammi, li renda commutativi. La descrizione è piuttosto nebulosa, ma gli esempi che seguono dovrebbero chiarire l'idea. Uno degli aspetti che rende estremamente utile questa nozione è il fatto che si può dimostrare, piuttosto facilmente, che due oggetti che verifichino una data proprietà universale sono necessariamente isomorfi tra loro. Di conseguenza è possibile utilizzare proprietà universali per definire, a meno di isomorfismi, oggetti che in molti casi svolgono un ruolo di grande importanza nella teoria.

4.3.1 Moduli e premoduli liberi

Siano R un anello commutativo, F un R-(pre)modulo e $f\colon X \to F$ un'applicazione da un insieme X al sostegno di F. Si dice che F è un R-(pre)modulo libero su X con applicazione universale f, o che (f, F) descrive un R-(pre)modulo libero, se e solo se per ogni R-(pre)modulo M ed ogni applicazione h da X al sostegno di M esiste uno ed un solo omomorfismo $\varphi\colon F \to M$ di R-(pre)moduli tale che $f\varphi = h$.



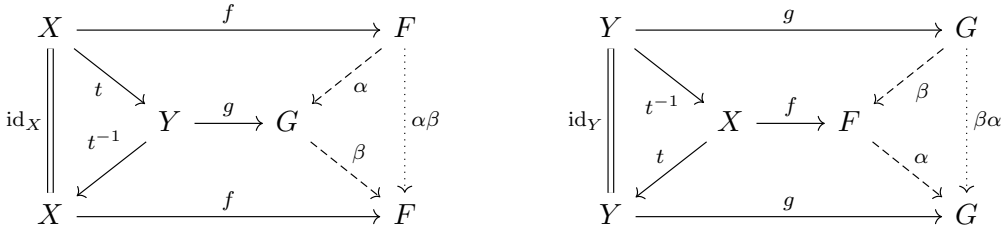
In queste condizioni, si dice anche che X è una base di F.

Prima di porci il problema dell'esistenza di (pre)moduli liberi, osserviamo la loro proprietà di unicità a meno di isomorfismi.

Proposizione 4.14. *Siano R un anello commutativo, X e Y insiemi equipotenti, con una biezione $t\colon X \to Y$. Supponiamo che F e G siano R-(pre)moduli liberi su X e Y rispettivamente, con applicazioni universali $f\colon X \to F$ e $g\colon Y \to G$. Allora esiste uno ed un solo R-omomorfismo $\alpha\colon F \to G$ tale che $tg = f\alpha$, e questo è un isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha}\sim \\ Y & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nell'usare ripetutamente la proprietà universale che definisce i (pre)moduli liberi; la si può seguire con l'aiuto di questi diagrammi:



Poiché (f, F) descrive un (pre)modulo libero, esiste uno ed un solo R-omomorfismo α tale che $tg = f\alpha$, cioè tale che il 'trapezio' superiore nel diagramma a sinistra sia commutativo. Similmente, poiché (g, G) descrive un (pre)modulo libero, esiste uno ed un solo R-omomorfismo β tale che $t^{-1}f = g\beta$. L'intero diagramma a sinistra è dunque commutativo e si ha $f\alpha\beta = tg\beta = tt^{-1}f = f$. Ora, per definizione di (pre)modulo libero, deve esistere un solo R-omomorfismo θ tale che $f\theta = f$; dal momento che sia $\alpha\beta$ che id_F hanno questa proprietà, $\alpha\beta = \mathrm{id}_F$. Passiamo al secondo diagramma; avendosi $tg = f\alpha$ e $t^{-1}f = g\beta$ anch'esso è commutativo, quindi ragionando come fatto per $\alpha\beta$, da $g\beta\alpha = g$ traiamo $\beta\alpha = \mathrm{id}_G$. Abbiamo così verificato che β è l'inversa di α, dunque α è biettiva e la dimostrazione è conclusa. □

Questo risultato mostra che la struttura di un (pre)modulo libero su un insieme X dipende, in ultima analisi, solo da $|X|$ (che viene chiamato *rango* del (pre)modulo libero): premoduli liberi su insiemi equipotenti sono isomorfi—vale, con una sola eccezione, anche il viceversa: si veda l'esercizio 4.E.3. Invertendo il risultato in un'altra direzione, è molto facile osservare che un (pre)modulo libero su un insieme X è libero su ogni insieme equipotente a X, e che ogni (pre)modulo che sia isomorfo ad esso ha la stessa proprietà:

Proposizione 4.15. *Siano R un anello commutativo e $t\colon X \to Y$ un'applicazione biettiva tra due insiemi X e Y. Supponiamo che F sia un (pre)modulo libero su X con applicazione universale $f\colon X \to F$ e che $\alpha\colon F \to G$ sia un isomorfismo di R-(pre)moduli. Allora G è un (pre)modulo libero su Y con applicazione universale $t^{-1}f\alpha$.*

Dimostrazione. Sia $h\colon Y \to M$ un'applicazione da Y al sostegno di un R-(pre)modulo M. Poiché (f, F) descrive un (pre)modulo libero, esiste uno ed un solo R-omomorfismo φ tale che $th = f\varphi$; da ciò segue che $\psi := \alpha^{-1}\varphi$ è l'unico R-omomorfismo tale che $(t^{-1}f\alpha)\psi = h$. Questo prova l'asserto. □

Occupiamoci ora dell'esistenza o meno di (pre)moduli liberi. Iniziamo dal caso dei moduli, che è quello che ci interessa maggiormente. Sia dunque R un anello commutativo unitario. Fissato un insieme I consideriamo la somma diretta esterna, indiciata in I, di copie di R considerato come modulo su sé stesso: $F = \coprod_{i\in I} R_R$; notiamo che F è un modulo nullo se $I = \varnothing$. Per ogni $i \in I$, sia e_i l'elemento di F che ha 1_R come i-esima coordinata e 0_R come j-esima coordinata per ogni $j \in I \smallsetminus \{i\}$.[1]

[1] potremmo descrivere e_i come $(\delta_{ij})_{j\in I}$, intendendo con δ_{ij} una versione del simbolo di Kroneker nell'anello R. Nella terminologia dei prodotti diretti di anelli, e_i corrisponde ad un idempotente canonico.

Proposizione 4.16. *Con le notazioni appena fissate, F è un R-modulo libero su I, con applicazione universale $f\colon i \in I \mapsto e_i \in F$.*

Di conseguenza, per ogni insieme I esiste un R-modulo libero su I; inoltre, se R non è l'anello nullo, ogni R-modulo libero ha come applicazione universale un'applicazione iniettiva.

Dimostrazione. Sia $h\colon I \to M$ un'applicazione da I al sostegno di un R-modulo M. Dobbiamo dimostrare che esiste uno ed un solo R-omomorfismo $\varphi\colon F \to M$ tale che $h = f\varphi$. Se φ verifica queste condizioni, allora per ogni $i \in I$ si ha $e_i^\varphi = i^{f\varphi} = i^h$. Di conseguenza, per ogni $(a_i)_{i\in I} \in F$, si ha $((a_i)_{i\in I})^\varphi = (\sum_{i\in I} e_i a_i)^\varphi = \sum_{i\in I} e_i^\varphi a_i = \sum_{i\in I} i^h a_i$. Dunque, l'unica applicazione $F \to M$ che può soddisfare le condizioni richieste per φ è l'applicazione $(a_i)_{i\in I} \in F \mapsto \sum_{i\in I} i^h a_i \in M$ (che, come al solito, è ben definita perché ogni elemento di F ha solo un numero finito di componenti non nulle). Chiamiamo allora φ questa applicazione. È evidente che vale $h = f\varphi$; resta solo da dimostrare che φ è un R-omomorfismo. Per ogni $a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I} \in F$ e $r \in R$ si ha $a^\varphi + b^\varphi = \sum_{i\in I} i^h a_i + \sum_{i\in I} i^h b_i = \sum_{i\in I} i^h(a_i + b_i) = (a+b)^\varphi$ e $(ar)^\varphi = \sum_{i\in I} i^h(a_i r) = (\sum_{i\in I} i^h a_i)r = a^\varphi r$, quindi φ è effettivamente un R-omomorfismo. A questo punto abbiamo provato che, come richiesto, (f, F) descrive un R-modulo libero. Notiamo che f è un'applicazione iniettiva purché $1_R \neq 0_R$, cioè a meno che R non sia nullo.

Abbiamo così verificato che ogni insieme è base di un R-modulo libero. Infine, per giustificare l'ultima affermazione, consideriamo un'arbitraria applicazione g da un insieme I al sostegno di un R-modulo G tale che (g, G) descriva un R-modulo libero. Allora, utilizzando le notazioni del paragrafo precedente, la proposizione 4.14 fornisce un isomorfismo $\alpha\colon F \to G$ tale che $g = f\alpha$; se R non è nullo, essendo f iniettiva anche g sarà iniettiva. □

Abbiamo così, utilizzando anche la proposizione 4.14, che *se R è un anello commutativo unitario, gli R-moduli liberi sono le somme dirette (interne) di moduli isomorfi a R_R*. Per chiarezza: se $I = \varnothing$ la somma diretta $\coprod_{i\in I} R_R$ è un modulo nullo (verificarlo direttamente dalle definizioni), quindi gli R-moduli liberi sull'insieme vuoto sono gli R-moduli nulli.

È anche bene osservare che nel caso in cui R sia l'anello nullo (cioè se $R = \{0_R\}$), per ogni insieme I si ha $\coprod_{i\in I} R_R = 0$, quindi la proposizione 4.16 comporta in questo caso che l'R-modulo 0 sia libero su I (con *applicazione universale*, ovviamente, *non iniettiva se* $|I| > 1$). Questo non è particolarmente sorprendente: se R è nullo, infatti, tutti gli R-moduli sono a loro volta nulli (perché, essendo $1_R = 0_R$, se M è un R-modulo si ha $M = M1_R = M0_R = 0$) e da ciò segue facilmente (esercizio 4.E.7) che, per ogni insieme I, ogni R-modulo F è libero su I con l'unica applicazione $I \to F$ come applicazione universale.

La proposizione 4.16 descrive anche i premoduli liberi, grazie a questo lemma che permette di tradurre ogni questione su premoduli liberi in una questione su moduli liberi.

Lemma 4.17. *Siano R un anello commutativo, X un insieme, F un R-premodulo e $f\colon X \to F$ un'applicazione. Sia poi $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$ l'anello accresciuto definito da R. Allora (f, F) descrive un R-premodulo libero se e solo se, riguardato F come R_1-modulo, (f, F) descrive un R_1-modulo libero.*

Dimostrazione. L'asserto segue dal fatto (stabilito nella proposizione 1.34) che, per ogni R-premodulo G, un'applicazione $\varphi\colon F \to G$ è un omomorfismo di R-premoduli se e solo se, riguardati F e G come R_1-moduli, è un omomorfismo di R_1-moduli. □

Corollario 4.18. *Siano R un anello commutativo e $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$. Per ogni insieme X esistono R-premoduli liberi di base X. Questi sono le somme dirette interne di $|X|$ premoduli isomorfi a R_1, riguardato come R-premodulo.*

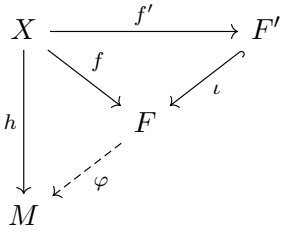
Abbiamo così che *ogni (pre)modulo libero non nullo è fedele.* Notiamo anche che, a differenza di quanto accade per i moduli liberi, le applicazioni universali per i premoduli liberi, anche su un anello nullo, sono tutte iniettive (nel lemma 4.17, anche se R fosse nullo non lo sarebbe R_1).

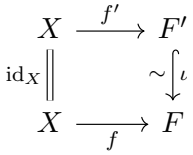
Un'altra utile osservazione è che *ogni (pre)modulo libero è libero su un suo sottoinsieme, con l'applicazione immersione come applicazione universale*. Infatti, questo è vero per i moduli liberi su un anello nullo, che ammettono come base l'insieme vuoto; in tutti gli altri casi, se (f, F) descrive un (pre)modulo libero, allora la proposizione 4.15 mostra che F è libero anche su $\operatorname{im} f$ con applicazione universale $\operatorname{im} f \hookrightarrow F$, dal momento che f è, per la proposizione 4.16 e il lemma 4.17, iniettiva. Nel discutere di (pre)moduli liberi è dunque lecito (e lo si fa spesso) assumere implicitamente che la base sia una parte del (pre)modulo e che l'applicazione universale sia la corrispondente immersione. In questo caso la base è un particolare insieme di generatori del (pre)modulo. Infatti:

Proposizione 4.19. *Supponiamo che (f, F) descriva un (pre)modulo libero. Allora F è generato da $\operatorname{im} f$.*

Dimostrazione. Questo è chiaro dalle descrizioni esplicite date per i (pre)moduli liberi, ma può essere più interessante quest'altra dimostrazione 'a priori' che ne prescinde.[2]

Siano X il dominio di f e F' il sotto(pre)modulo di F generato da $\operatorname{im} f$; siano poi ι l'immersione $F' \hookrightarrow F$ e $f' \colon X \to F'$ la ridotta di f a F', dunque $f = f'\iota$. Verifichiamo che (f', F') descrive un (pre)modulo libero. Scelti comunque un (pre)modulo M (sullo stesso anello di scalari di F) ed un'applicazione $h \colon X \to M$, esiste un unico omomorfismo $\varphi \colon F \to M$ tale che $h = f\varphi$.





Allora $h = f'(\iota\varphi)$. Inoltre $\iota\varphi$ è l'unico omomorfismo che composto con f' dia h: se infatti ψ è un omomorfismo $F' \to M$ e $f'\psi = h$, ovvero $f'\psi = f'(\iota\varphi)$, allora le restrizioni di ψ e $\iota\varphi$ a $\operatorname{im} f'$ coincidono, ma allora $\psi = \iota\varphi$ per l'esercizio 1.D.4. Concludiamo che effettivamente F' è libero con applicazione universale f'. Ci troviamo allora, per la proposizione 4.14, nella situazione descritta nel diagramma commutativo di destra e concludiamo che ι è un isomorfismo, cioè: $F' = F$. □

Forse, ciò che più di ogni altra proprietà rende evidente l'importanza dei (pre)moduli liberi è il fatto che, a meno di isomorfismi, tutti i (pre)moduli sono quozienti di (pre)moduli liberi:

Proposizione 4.20. *Siano R un anello commutativo e M un R-(pre)modulo. Allora esiste un R-(pre)modulo libero F tale che $M \simeq_R F/N$ per un opportuno $N \leq_R F$. Se M è generato da un suo sottoinsieme X, si può scegliere F libero su X.*

Dimostrazione. Sia M generato da X e sia F un R-(pre)modulo libero su X con applicazione universale f. Sia h l'immersione di X in M. Esiste allora un R-omomorfismo $\varphi \colon F \to M$ tale che $h = f\varphi$. Si ha dunque $X = \operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} \varphi$. Poiché X genera M, allora, $\operatorname{im} \varphi = M$. Di conseguenza $M \simeq F/\ker \varphi$. □

Ritroviamo, come caso particolare di quest'ultima proposizione la proposizione 1.22 ed il corollario 1.35, che, dal punto di vista assunto in questa sezione, descrivono i (pre)moduli liberi di rango uno e mostrano che i (pre)moduli ciclici sono isomorfi a loro quozienti.

[2] si veda anche l'esercizio 4.E.8.

Esercizi.

4.E.1. Se R è un campo, ogni R-modulo (ovvero R-spazio vettoriale) è somma diretta di sottospazi di dimensione 1, ciascuno dei quali è isomorfo a R_R. Dunque la proposizione 4.16 mostra che *ogni spazio vettoriale è un modulo libero*. Inoltre l'applicazione universale f che appare nell'enunciato della proposizione 4.16 ha per immagine quella che, nel caso in cui R sia un campo, è la ben nota base canonica di uno spazio vettoriale numerico. Questo (tenendo sempre presente la proposizione 4.15) mostra che le basi degli spazi vettoriali, come definite in algebra lineare, sono effettivamente basi di moduli liberi (con l'immersione come applicazione universale), nel senso che abbiamo qui definito.

Per un arbitrario anello commutativo unitario R, sia F un R-modulo libero e X una sua base contenuta in esso (con $X \hookrightarrow F$ applicazione universale). X ha in comune con le basi degli spazi vettoriali la proprietà di essere un insieme minimale di generatori di F (questo dovrebbe essere chiaro) ma non necessariamente vale il viceversa. Ad esempio, $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero in cui $\{2, 3\}$ è un insieme minimale di generatori, ma $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ non è libero su un insieme di cardinalità due, quindi $\{2, 3\}$ non ne è una base.

4.E.2. A complemento dell'osservazione precedente verificare che un anello commutativo unitario R è un campo se e solo se ogni R-modulo è libero.

4.E.3. Invertendo un'osservazione provata nel testo, verificare che se R è un anello commutativo unitario non nullo, X e Y sono due insiemi e F_X e F_Y sono R-moduli liberi rispettivamente su X e Y, se $F_X \simeq_R F_Y$ allora $|X| = |Y|$. Si può procedere secondo le indicazioni che seguono, utilizzando il fatto che il risultato vale per gli spazi vettoriali. Sia $M \lhd\cdot R$ e siano $V_X = F_X M/M$ e $V_Y = F_Y M/M$; questi, per cambio di scalari, si possono riguardare come due (R/M)-spazi vettoriali. Basta allora provare che V_X e V_Y sono (R/M)-liberi su X e Y e che sono isomorfi tra loro se $F_X \simeq_R F_Y$.

Una volta dimostrato questo, usando il lemma 4.17 è facile estendere lo stesso risultato anche al caso dei premoduli: premoduli liberi isomorfi (sullo stesso anello commutativo) hanno necessariamente basi equipotenti.

Osservare anche che se, invece, R è un anello nullo, lo stesso risultato non vale per gli R-moduli liberi (come da esercizio 4.E.7), ma continua a valere per gli R-premoduli liberi.

4.E.4. Per prevenire un possibile dubbio: se R è un anello commutativo unitario non nullo, R_R è un R-modulo, quindi anche un R-premodulo, ma mentre è libero come R-modulo non è libero come R-premodulo. Quest'ultima affermazione può essere dedotta, ad esempio, dal fatto che, detto S l'anello accresciuto definito da R, se R_R fosse libero come R-premodulo lo sarebbe anche come S-modulo, ma R_R, riguardato come S-modulo non è fedele, dal momento che, in S, l'ideale R è annullato da $1_R - 1_S$. Per trarre la stessa conclusione in modo diretto, supponiamo per assurdo che R_R sia un R-premodulo libero su un insieme X. Allora certamente $X \neq \varnothing$. Ora, S (lo stesso di prima) ha un'ovvia struttura di R-premodulo (ma non di R-modulo!) in cui l'operazione esterna $S \times R \to S$ è la restrizione della moltiplicazione interna di S, ed esiste un'applicazione $h\colon X \to S$ la cui immagine non è contenuta in R. L'assunzione che R_R sia libero su X come R-premodulo implica che debba esistere un omomorfismo di R-premoduli $\varphi\colon R_R \to S$ la cui immagine contenga $\operatorname{im} f$. Però, per ogni R-omomorfismo $\varphi\colon R_R \to S$ ed ogni $r \in R$, si ha $r^\varphi = (r1_R)^\varphi = r^\varphi 1_R \in R$, essendo $R \lhd S$, quindi $\operatorname{im}\varphi \subseteq R$ e dunque $\operatorname{im} f \not\subseteq \operatorname{im}\varphi$. Questa contraddizione completa la dimostrazione.

4.E.5. La definizione di oggetto libero si dà in ogni categoria, ad esempio per ogni tipo di struttura algebrica; la definizione di ottiene da quella fornita per il caso dei (pre)moduli, sostituendo l'espressione R-(pre)modulo con quella che indica il tipo di struttura (monoide, gruppo, etc.) pertinente. Gli analoghi dei principali risultati generali qui provati continuano a valere, con la stessa dimostrazione: questo vale per le proposizioni 4.14 e 4.15 e, nel caso in cui oggetti liberi esistano per ogni insieme, 4.20. Quest'ultima condizione è soddisfatta, ad

esempio, per le categorie dei semigruppi, dei monoidi, dei gruppi, degli anelli, delle algebre su un fissato anello commutativo unitario, ma non per quella dei campi, come suggerito dal prossimo esercizio.

4.E.6. Sia $X = \{x\}$ un singleton. Mostrare che non esistono campi liberi su X. Suggerimento: se F fosse un campo libero su X, scelto un campo K di caratteristica diversa da quella di F dovrebbe esistere un omomorfismo di campi da F a K, ma questo non è possibile (qui per omomorfismo di campi si intende un omomorfismo di anelli unitari tra due campi).

Mostrare anche che non esistono oggetti liberi su X nella categoria dei gruppi abeliani finiti.

4.E.7. Verificare in dettaglio quanto osservato nel testo a proposito dei moduli (liberi) su un anello nullo R: ogni R-modulo F è nullo e, per ogni insieme I, libero con l'unica applicazione da I a F come applicazione universale. Questo segue dal fatto che se F e M sono R-moduli esiste esattamente un omomorfismo da F a M.

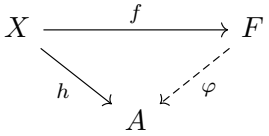
Questo esempio mostra che non per ogni categoria di strutture algebriche le applicazioni universali che descrivono oggetti liberi sono necessariamente iniettive.

4.E.8. Fornire una dimostrazione alternativa della proposizione 4.19 che utilizzi solo un diagramma in cui appaiono, con le notazioni lì usate, X, F ed $M = F/F'$. Questa dimostrazione è più semplice di quella fornita nel testo, ma ha lo svantaggio di non essere, a differenza di quella, immediatamente riproducibile per altri tipi di strutture (non, ad esempio, per anelli liberi, algebre libere, gruppi liberi).

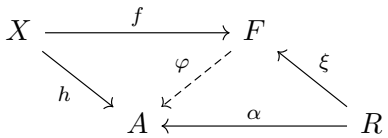
4.E.9. Le proposizioni 4.19 e 4.20 mostrano bene in che senso, fissato un anello commutativo R, gli R-(pre)moduli liberi sono quelli di tipo 'più generale possibile'. Infatti, se F è un R-(pre)modulo libero su una base X, vediamo che F è generato da un insieme di $|X|$ elementi e ogni R-(pre)modulo che sia generato da $|X|$ elementi è isomorfo ad un quoziente di F.

4.3.2 Algebre unitarie libere: anelli di polinomi

Fissato un anello commutativo unitario R, passiamo ora a considerare gli oggetti liberi nella categoria delle R-algebre unitarie (come sempre in queste note 'algebra' sta per 'algebra commutativa associativa'). Riproducendo la definizione data per (pre)moduli, se X è un insieme diciamo che F è una R-algebra unitaria libera con applicazione universale f se e solo se F è una R-algebra unitaria, f è un'applicazione da X al sostegno di F e, per ogni R-algebra unitaria A ed ogni applicazione h da X al sostegno di A esiste uno ed un solo omomorfismo di R-algebre unitarie $\varphi\colon F \to A$ tale che $h = f\varphi$.



Ricordando le proposizioni 1.27 e 1.28, chiamando ξ l'omomorfismo di struttura di F possiamo riformulare la stessa proprietà in questo modo: scelti comunque un anello commutativo unitario A, un omomorfismo di anelli unitari $\alpha\colon R \to A$ ed un'applicazione h da X al sostegno di A, esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon F \to A$ che renda commutativo il diagramma:



Valgono per le algebre unitarie libere proprietà analoghe a quelle provate per i (pre)moduli liberi; dalle proposizioni 4.14, 4.15, 4.19 e 4.20, sostituendo l'espressione 'algebra unitaria' a

'(pre)modulo' e duplicando le dimostrazioni si ottengono i corrispondenti risultati per le algebre unitarie libere su un anello commutativo unitario. Ad esempio, queste algebre risultano generate dall'immagine dell'applicazione universale, ed otteniamo l'unicità a meno di isomorfismi: se F e G sono algebre unitarie libere su un prefissato anello commutativo unitario R, con applicazioni universali $f\colon X \to F$ e $g\colon Y \to G$, dove X e Y sono insiemi legati tra loro dalla biezione $t\colon X \to Y$, allora esiste uno ed un solo isomorfismo di R-algebre unitarie $\alpha\colon F \to G$ tale che $f\alpha = tg$.

Anche la questione dell'esistenza di oggetti liberi ha per le algebre unitarie la stessa risposta positiva che ha per i moduli: per ogni anello commutativo unitario R ed ogni insieme X esiste un'algebra unitaria libera su X, e l'applicazione universale che la descrive è iniettiva se R non è nullo. L'oggetto libero che si ottiene in questo caso è già familiare a chi legge: è infatti, a meno di isomorfismi, un anello di polinomi.

Descriviamo, rapidamente ed in modo schematico, una costruzione delle algebre unitarie libere. Fissato l'insieme X, sia $M(X)$ il monoide costituito dalle applicazioni $X \to \mathbb{N}$ a supporto finito, cioè tali che sia finito l'insieme degli elementi di X con immagine diversa da 0, munito dell'operazione di addizione puntuale. Conviene usare la notazione moltiplicativa per $M(X)$ e identificare ogni $x \in X$ con l'applicazione $X \to \mathbb{N}$ che manda x in 1 ed ogni altro elemento di X in 0. In questo modo gli elementi di $M(X)$ vengono tutti rappresentati nella forma $\prod_{x\in X_0} x^{\lambda_x}$ per una opportuna parte finita X_0 di X, dove ciascuno degli esponenti λ_x è un numero naturale: tale elemento è l'applicazione che manda ogni $x \in X_0$ in λ_x e ciascun elemento di $X \smallsetminus X_0$ in 0 (si può provare, farlo per esercizio, che questo è il monoide commutativo libero su X, con applicazione universale suggerita dall'identificazione fatta). Per quanto banale sia, osserviamo che se a e b sono elementi di $M(X)$ e X_0 è una parte finita di X contenente i supporti di a e di b, si possono rappresentare a e b come $\prod_{x\in X_0} x^{\alpha_x}$ e $\prod_{x\in X_0} x^{\beta_x}$ e la definizione di $M(X)$ fornisce, non sorprendentemente, $ab = \prod_{x\in X_0} x^{\alpha_x+\beta_x}$. Sia ora F l'R-modulo libero su $M(X)$, cioè la somma diretta esterna $\coprod_{a\in M(X)} R_R$; come nella costruzione effettuata nella sottosezione 4.3.1 ad ogni $a \in M(X)$ associamo l'elemento e_a di F che ha 1_R come coordinata corrispondente ad a ed ogni altra coordinata 0_R. Muniamo F della moltiplicazione definita da $fg = \sum_{a,b\in M(X)} e_{ab} f_a g_b$ per ogni $f = \sum_{a\in M(X)} e_a f_a$ e $g = \sum_{a\in M(X)} e_a g_a$ in F (come al solito, f_a ed g_a sono diversi da zero solo per un numero finito di scelte di a). Si verifica senza particolari difficoltà che in questo modo F risulta strutturato come R-algebra unitaria, che risulta inoltre libera con applicazione universale $e\colon x \in X \mapsto e_x \in F$ (ricordiamo che ogni elemento di X è stato identificato con un elemento di $M(X)$): per ogni R-algebra unitaria A ed ogni applicazione $h\colon X \to A$ l'unico omomorfismo $\varphi\colon F \to A$ di R-algebre unitarie tale che $e\varphi = h$ è quello definito da $e_a^\varphi = \prod_{x\in X_0} (x^h)^{\alpha_x}$ per ogni $a = \prod_{x\in X_0} x^{\alpha_x} \in M(X)$ e $f^\varphi = \sum_{a\in M(X)} e_a^\varphi f_a$ per ogni $f = \sum_{a\in M(X)} e_a f_a \in F$.

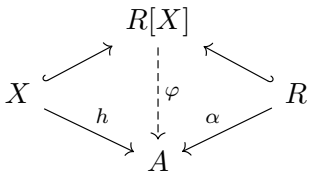
Se R non è nullo, la costruzione mostra che, come accade per i (pre)moduli, le R-algebre commutative unitarie libere hanno applicazioni universali iniettive; inoltre, l'algebra F costruita è, come R-modulo, libero e non nullo, quindi fedele, dunque l'omomorfismo di struttura $r \in R \mapsto 1_F r \in F$ è iniettivo e così R è isomorfo al sottoanello unitario $1_F R$ di F. Anche nel caso in cui R sia l'anello nullo la situazione per le algebre non è dissimile da quella per i moduli: ogni R-algebra unitaria A è nulla (in quanto R-modulo) ed è libera su qualsiasi insieme I con l'unica applicazione $I \to A$ come applicazione universale; lo si può riconoscere sia dalla costruzione svolta sopra per l'algebra F che da un semplice ragionamento analogo a quello richiesto dall'esercizio 4.E.7.

Utilizzando l'analogo della proposizione 4.15 per algebre unitarie (e le considerazioni svolte nell'osservazione 1.J.1), ne possiamo trarre questa conseguenza: scelti comunque un anello commutativo unitario R ed un insieme X disgiunto da R, con l'unico vincolo che sia $X = \varnothing$ se R è l'anello nullo, esiste una R-algebra unitaria libera F su X che contenga X come sottoinsieme ed R come sottoanello unitario, ed abbia le immersioni $X \hookrightarrow F$ e $R \hookrightarrow F$ come applicazione universale ed omomorfismo di struttura. Si chiama *anello di polinomi a coefficienti in R nell'insieme*

di indeterminate X[3] un'algebra con queste proprietà; una tale algebra viene denotata con il simbolo $R[X]$,[4] o anche con simboli come $R[x, y, \dots, z]$ se $x, y, \dots, z$ sono gli elementi (distinti) di X.[5] Ricordiamo, dalle osservazioni iniziali, che come R-algebra unitaria $R[X]$ è generata da X. Ovviamente, fissati R ed X, esistono in generale più anelli di polinomi in R su X, ma questi sono tutti isomorfi tra loro, quindi ci si prende usualmente la libertà di non distinguere tra essi. Come di abitudine, si chiamano polinomi gli elementi di un anello di polinomi.

Ovviamente, a meno di isomorfismi, gli anelli di polinomi su R non sono altro che le R-algebre unitarie libere; se S è un anello isomorfo a R e Y un insieme equipotente a X, poi, l'analogo della proposizione 4.14 fornisce $S[Y] \simeq R[X]$.

Rendendo esplicita la condizione sintetizzata nel diagramma commutativo della pagina precedente, notiamo che l'anello di polinomi $R[X]$ verifica (ed è, a meno di isomorfismi, caratterizzato da) questa proprietà universale: per ogni anello commutativo unitario A, ogni omomorfismo $\alpha\colon R \to A$ di anelli unitari ed ogni applicazione $h\colon X \to A$, esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon R[X] \to A$ che prolunghi simultaneamente α e h.



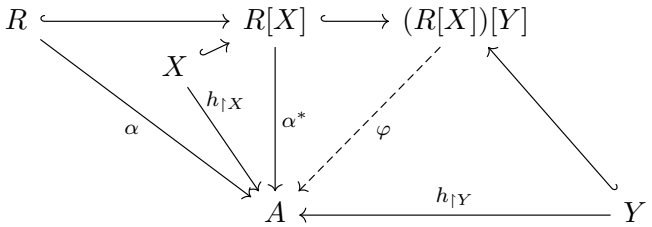
Dovrebbe risultare chiaro dalla definizione che come R-algebra (commutativa, associativa) unitaria, R è libera sull'insieme vuoto, quindi l'anello di polinomi $R[\varnothing]$ è R.

Queste due osservazioni sono spesso utili:

Lemma 4.21. *Siano R un anello commutativo unitario, $R[X]$ un anello di polinomi su R e $(R[X])[Y]$ un anello di polinomi su $R[X]$. Allora $(R[X])[Y]$ è isomorfo all'anello di polinomi $R[X \cup Y]$.*

Dimostrazione. Si tratta di provare che $(R[X])[Y]$ è una R-algebra unitaria libera su $X \cup Y$ (l'omomorfismo di struttura sottinteso è l'immersione). A questo scopo, sia A una R-algebra unitaria con omomorfismo di struttura α, e sia $h\colon X \cup Y \to A$ un'applicazione. Ciò che va provato è che esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon (R[X])[Y] \to A$ che abbia h e α come restrizioni a $X \cup Y$ e R.

Essendo $R[X]$ libero su X, esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $a^*\colon R[X] \to A$ le cui restrizioni a X ed a R siano $h_{\restriction X}$ (la restrizione di h a X) e α.



Ora, poiché $(R[X])[Y]$ è libero, come $R[X]$-algebra unitaria, su Y, esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon (R[X])[Y] \to A$ le cui restrizioni a Y e $R[X]$ sono $h_{\restriction Y}$ e α^*. Dunque, il

[3] si usano ovviamente anche forme abbreviate di questa espressione, come 'anello di polinomi in R su X'.

[4] questo simbolo porta con sé un certo livello di ambiguità, dal momento che lo stesso simbolo viene usato anche per indicare l'anello (o l'algebra) generato da $R \cup X$ anche in contesti in cui l'algebra risultante non sia libera; faremo in modo che il discorso chiarisca sempre a cosa ci riferiamo.

[5] anche il simbolo $R[x]$ presenta un problema di ambiguità: si riferisce ad un anello di polinomi sull'insieme x di indeterminate o sull'insieme $\{x\}$ (cioè su una sola indeterminata)? Stabiliamo una convenzione: quando usiamo una lettera minuscola ci riferiamo al secondo caso.

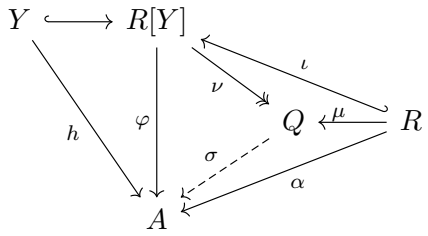
diagramma qui sopra è commutativo; ne segue che le restrizioni di φ a $X \cup Y$ e R sono h e α, come richiesto.

D'altra parte, se $\psi\colon (R[X])[Y] \to A$ è un omomorfismo di anelli unitari tale che $\psi_{\restriction X\cup Y} = h$ e $\psi_{\restriction R} = \alpha$, allora le restrizioni di $\psi_{\restriction R[X]}$ a X e R sono $h_{\restriction X}$ e α, quindi, per l'unicità di α^*, si ha $\psi_{\restriction R[X]} = \alpha^*$; da questa segue, sempre per unicità, $\psi = \varphi$. Con questo la dimostrazione è completa. □

Tenendo presente che gli anelli di polinomi sono in realtà definiti a meno di isomorfismi, il lemma 4.21 mostra che, nelle notazioni date, $R[X]$ si può identificare col sottoanello generato da $R \cup X$ (ovvero la R-sottoalgebra unitaria generata da X) in $R[X \cup Y]$ e quindi $R[X \cup Y]$ con $(R[X])[Y]$, cosa che d'ora in poi faremo, a cominciare da prossimo lemma (una dimostrazione alternativa del quale è indicata all'osservazione 4.F.4).

Lemma 4.22. *Nelle notazioni del lemma precedente, $f \in R[X] \longmapsto f + (Y) \in R[X \cup Y]/(Y)$ è un isomorfismo di R-algebre unitarie.*

Dimostrazione. Iniziamo dal caso particolare in cui $X = \varnothing$, provando che, come R-algebra, R è isomorfa all'algebra quoziente $Q := R[Y]/(Y)$. A questo scopo, per il teorema di unicità degli oggetti liberi, dal momento che R è un'algebra unitaria libera su $\varnothing$ basta provare che anche Q lo è. Questo vuol dire precisamente che per ogni R-algebra unitaria A esiste uno ed un solo omomorfismo di R-algebre unitarie $Q \to A$. Fissiamo tale A, con omomorfismo di struttura $\alpha\colon R \to A$. Se $h\colon Y \to A$ è l'applicazione costante 0_A, esiste uno ed un solo omomorfismo $\varphi\colon R[Y] \to A$ di anelli unitari che abbia h e α come restrizioni.



Siano $\nu\colon R[Y] \twoheadrightarrow Q$ l'epimorfismo canonico e μ la sua restrizione a R; ovviamente μ è l'omomorfismo di struttura di Q. Evidentemente $Y \subseteq \ker\varphi$ quindi, per il primo teorema di omomorfismo, φ induce $\sigma\colon Q \to A$ tale che $\varphi = \nu\sigma$. A questo punto, se ι è l'immersione $R \hookrightarrow R[Y]$, si ha $\mu\sigma = \iota\nu\sigma = \iota\varphi = \alpha$ e così σ è un omomorfismo di algebre unitarie. Resta da provarne l'unicità. Se anche σ_1 è un tale omomorfismo, allora $\nu\sigma_1$ è un omomorfismo il cui nucleo contiene Y, quindi la restrizione di $\nu\sigma_1$ a Y è h, ed inoltre $\mu\sigma_1 = \alpha$, vale a dire: $\iota\nu\sigma_1 = \alpha$. Allora, per l'unicità di φ, $\nu\sigma_1 = \varphi = \nu\sigma$. Essendo ν un epimorfismo, ne segue $\sigma_1 = \sigma$; in questo modo anche l'unicità di σ è provata e così, come R-algebra, Q è isomorfa ad R. Osserviamo anche che, ad esempio per la proposizione 1.28, μ è un omomorfismo di R-algebre unitarie, ma poiché R è libera su $\varnothing$, tale omomorfismo è l'unico da R a Q, e da $Q \simeq R$ segue che μ è un isomorfismo.

Passiamo ora al caso generale. Siano X, Y e $R[X \cup Y]$ come all'enunciato, e poniamo $P = R[X]$. Applicando a P quanto al caso precedente, vediamo che $P[Y]/(Y)$, ovvero $R[X \cup Y]/(Y)$, è isomorfo come P-algebra, e quindi a maggior ragione come R-algebra, a P, con isomorfismo indotto dall'epimorfismo canonico; quindi effettivamente l'applicazione indicata all'enunciato è un isomorfismo, come richiesto. □

Come già accennato, vale l'analogo della proposizione 4.20, il che significa che se $R[X]$ è un anello di polinomi sull'anello commutativo unitario R, ogni R-algebra unitaria che sia generata da al più $|X|$ suoi elementi è isomorfa ad un quoziente di $R[X]$. Come caso particolare, abbiamo:

Corollario 4.23. *Sia R un sottoanello unitario di un anello commutativo unitario S, e sia Y una parte di S tale che, come anello, S sia generato da $R \cup Y$. Allora S è isomorfo ad un quoziente di un anello di polinomi $R[X]$ su un insieme di indeterminate X equipotente a Y.*

Più precisamente, in questa situazione, l'immersione $R \hookrightarrow S$ si prolunga ad un omomorfismo suriettivo $\varepsilon\colon R[X] \to S$.

Dimostrazione. S è una R-algebra unitaria via immersione $R \hookrightarrow S$; dire che, come anello (o come anello unitario), S è generato da $R \cup Y$ equivale a dire che S, come R-algebra unitaria, è generato da Y. L'asserto segue dunque immediatamente dalla proprietà universale per gli anelli di polinomi. □

Questo corollario fornisce il metodo di uso più frequente per realizzare ampliamenti di anelli commutativi unitari (si dice che l'anello commutativo unitario S è un ampliamento di R se, come nella situazione del corollario 4.23, R è un sottoanello unitario di S). Un esempio è stato certamente già incontrato nei corsi elementari di algebra: un'ampliamento algebrico semplice di un campo F (dunque: un campo di cui F sia un sottocampo e che sia generato come anello da F e da un elemento, ovvero, come F-algebra, da un singleton) è stato costruito come quoziente dell'anello di polinomi ad una indeterminata su F. Il corollario 4.23 mostra che, essenzialmente, questa era l'unica maniera di procedere.

Esercizi e osservazioni.

4.F.1. Verificare i dettagli della costruzione delle algebre unitarie libere, ed il fatto che questa costruzione soddisfi la proprietà universale richiesta dalla definizione. Con riferimento alle notazioni usate nel testo, esplicitare le unità di $M(X)$ e di F.

4.F.2. Dati un anello commutativo unitario R ed un insieme X, si può costruire una R-algebra libera su X in modo analogo a quanto fatto per costruire una R-algebra unitaria libera su X, sostituendo il monoide commutativo libero $M(X)$ su X con il semigruppo commutativo libero $M^+(X) = M(X) \setminus \{1_M\}$ su X.

Se $X \cap R = \varnothing$, l'ideale generato da X nell'anello di polinomi $R[X]$ è una R-algebra libera su X.

4.F.3. Dal momento che gli anelli commutativi si possono riguardare equivalentemente come $\mathbb{Z}$-algebre, la teoria esposta per le algebre ha quella per gli anelli commutativi come caso particolare. In particolare gli anelli di polinomi su $\mathbb{Z}$ forniscono gli oggetti liberi nella categoria degli anelli commutativi unitari.

4.F.4. Si sarebbe potuto dimostrare il lemma 4.22 in tanti altri modi. Una dimostrazione più breve (ma meno interessante) di quella fornita procede in questo modo: l'applicazione da $X \cup Y$ a $R[X]$ che manda in 0_R ogni elemento di Y ed in sé ogni elemento di X definisce (per la proprietà universale) un omomorfismo di R-algebre $\theta\colon R[X \cup Y] \to R[X]$. Utilizzando la costruzione esplicita dell'anello di polinomi si può verificare che θ è suriettiva e che $\ker\theta$ è proprio l'ideale generato da Y; da ciò segue che ν è un isomorfismo: l'inverso di quello indotto da θ attraverso il primo teorema di isomorfismo.

4.F.5. Come accennato già subito dopo il corollario 4.23, gli anelli di polinomi forniscono lo strumento adatto a costruire anelli commutativi unitari con elementi che verifichino proprietà preassegnate. Ad esempio, supponiamo di voler costruire, nelle maniera più economica possibile, un anello commutativo unitario di caratteristica 0 che abbia un elemento non nullo a quadrato nullo, cioè un anello commutativo unitario R che abbia un sottoanello unitario isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed un elemento a tale che $a \neq 0_R = a^2$. Se un tale R esiste, anche il suo sottoanello generato da $\{1_R, a\}$ ha le stesse proprietà, quindi possiamo anche limitarci a cercare di costruire R tra gli anelli che siano, come anelli unitari, generati dall'elemento a richiesto. Per il corollario 4.23, un tale anello dovrà essere isomorfo ad un quoziente dell'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$ ad una

indeterminata; sapere questo rende la ricerca molto più semplice. Meglio ancora: per lo stesso corollario, se esiste un R con le proprietà richieste, esiste un (unico) omomorfismo suriettivo $\varepsilon\colon \mathbb{Z}[x] \to R$ di anelli unitari che manda x in a; dunque $R \simeq \mathbb{Z}[x]/\ker\varepsilon$, inoltre a deve corrispondere nell'isomorfismo al laterale individuato da x. Ora, avendo noi richiesto $a^2 = 0$, si deve avere $x^2 \in \ker\varepsilon$; da ciò segue che R deve essere isomorfo ad un quoziente di $\bar{Z} := \mathbb{Z}[x]/(x^2)$. A questo punto la nostra ricerca è finita: si vede subito che $\bar{Z}$ verifica le proprietà richieste per R: il suo elemento $\bar{x} = x + (x^2)$ non è nullo, perché $x \notin (x^2)$, ma ha quadrato nullo.

Dovrebbe essere piuttosto evidente l'analogia con la costruzione fatta nei corsi elementari di algebra dell'estensione di un campo ottenuta aggiungendo una radice di un polinomio irriducibile di grado maggiore di uno.

4.F.6. Costruire un anello commutativo unitario che abbia una copia del campo razionale come sottoanello unitario ed elementi non nulli a, b, c tali che $ab = ac$ e $b \neq c$.

4.3.3 Prodotti e coprodotti

Anche le costruzioni, già presentate, delle somme dirette e dei prodotti diretti di (pre)moduli hanno una interpretazione categoriale come oggetti universali, vediamo come.

Prodotti Sia R un anello commutativo, e siano dati un R-(pre)modulo P, una famiglia $(M_i)_{i\in I}$ di R-(pre)moduli e, per ogni $i \in I$, un R-omomorfismo $\pi_i\colon P \to M_i$. Si dice che P è *prodotto* della famiglia $(M_i)_{i\in I}$ con famiglia di proiezioni $(\pi_i)_{i\in I}$, o che $(P, (\pi_i)_{i\in I})$ è un prodotto di $(M_i)_{i\in I}$ se e solo se, scelti comunque un R-(pre)modulo A e, per ogni $i \in I$, un R-omomorfismo $\alpha_i\colon A \to M_i$, esiste uno ed un solo R-omomorfismo $\varphi\colon A \to P$ tale che, per ogni $i \in I$, si abbia $\alpha_i = \varphi\pi_i$.

È bene soffermarsi su un punto: la richiesta è che esiste e sia unico l'R-omomorfismo φ che renda commutativo, *simultaneamente* ciascuno dei diagrammi

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_i} & M_i \\ & {\scriptstyle\varphi}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\alpha_i} & \\ & A & \end{array}$$

al variare di $i \in I$. La nozione di prodotto si può dare (anzi, si dà) in ogni categoria. Sostituendo l'espressione 'R-(pre)modulo' con 'anello', 'anello commutativo', 'anello commutativo unitario', 'gruppo' etc, e R-omomorfismo con 'omomorfismo di anelli', di anelli unitari, di gruppi etc, nella definizione appena data si ottengono le definizioni di prodotto nelle corrispondenti categorie.

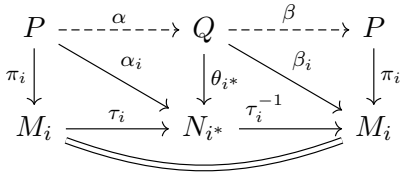
Quella di prodotto è una costruzione universale, e come per tutte le costruzioni universali vale per i prodotti un teorema di unicità a meno di isomorfismi analogo alla proposizione 4.14; lo enunciamo e dimostriamo nel caso dei (pre)moduli.

Proposizione 4.24. *Sia R un anello commutativo, siano $(M_i)_{i\in I}$ e $(N_j)_{j\in J}$ famiglie di R-(pre)moduli; supponiamo che $*\colon I \to J$ sia una biezione e, per ogni $i \in I$, $\tau_i\colon M_i \to N_{i^*}$ un R-isomorfismo. Siano P un prodotto di $(M_i)_{i\in I}$ con famiglia di proiezioni $(\pi_i)_{i\in I}$ e Q un prodotto di $(N_j)_{j\in J}$ con famiglia di proiezioni $(\theta_j)_{j\in J}$. Allora esiste uno ed un solo R-isomorfismo $\alpha\colon P \to Q$ tale che per ogni $i \in I$ si abbia $\pi_i\tau_i = \alpha\theta_{i^*}$.*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_i} & M_i \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_i} \\ Q & \xrightarrow{\theta_{i^*}} & N_{i^*} \end{array}$$

Dimostrazione. Per ogni $i \in I$, sia $\alpha_i = \pi_i\tau_i\colon P \to N_{i^*}$. Per ogni $j \in J$, indichiamo con ${}^*j$ l'immagine di j mediante l'inversa di $*$, quindi $\alpha_{{}^*j}$ è un R-omomorfismo $P \to N_j$. Per la proprietà che definisce i prodotti, esiste uno ed un solo R-omomorfismo $\alpha\colon P \to Q$ tale che $\alpha_{{}^*j} = \alpha\theta_j$ per ogni $j \in J$, vale a dire: $\alpha_i = \alpha\theta_{i^*}$ per ogni $i \in I$. Simmetricamente, ma in modo più diretto, per

ogni $i \in I$ poniamo $\beta_i = \theta_{i^*}\tau_i^{-1} \colon Q \to M_i$, e ricaviamo che esiste uno ed un solo R-omomorfismo $\beta \colon Q \to P$ tale che $\beta_i = \beta\pi_i$ per ogni $i \in I$.



Come si legge da questo diagramma commutativo, per ogni $i \in I$, si ha $\alpha\beta\pi_i = \alpha\beta_i = \alpha\theta_{i^*}\tau_i^{-1} = \alpha_i\tau_i^{-1} = \pi_i\tau_i\tau_i^{-1} = \pi_i$. Dalla definizione di prodotto segue che esiste esattamente un R-omomorfismo $\varphi \colon P \to P$ tale che $\varphi\pi_i = \pi_i$ per ogni $i \in I$. Poiché sia $\alpha\beta$ che id_P soddisfano questa condizione per φ, si ha $\alpha\beta = \mathrm{id}_P$. Scambiano i ruoli di P e Q e delle corrispondenti proiezioni, si prova allo stesso modo $\beta\alpha = \mathrm{id}_Q$. Pertanto α è un R-isomorfismo. La dimostrazione è completa. □

Quasi sempre si incontra questa risultato nella forma semplificata in cui i prodotti sono riferiti ad un'unica famiglia: *se R è un anello commutativo, $(M_i)_{i\in M}$ una famiglia di R-(pre)moduli e $(P, (\pi_i)_{i\in I})$ e $(Q, (\theta_i)_{i\in I})$ due suoi prodotti, allora esiste uno ed un solo R-isomorfismo $\alpha \colon P \to Q$ tale che $\pi_i = \alpha\theta_i$ per ogni $i \in I$.* In effetti questo enunciato è equivalente alla proposizione 4.24 se si tiene in conto del seguente analogo della proposizione 4.15, la cui dimostrazione si lascia per esercizio:

Proposizione 4.25. *Siano R un anello commutativo unitario e $(P, (\pi_i)_{i\in I})$ un prodotto di una famiglia $(M_i)_{i\in I}$ di R-(pre)moduli. Se $\sigma \colon P_1 \to P$ un isomorfismo di R-(pre)moduli, $s \colon J \to I$ è un'applicazione biettiva, $(N_j)_{j\in J}$ una famiglia di R-(pre)moduli e, per ogni $j \in J$, $\sigma_j \colon M_{j^s} \to N_j$ è un R-isomorfismo, allora $(P_1, (\sigma\pi_{j^s}\sigma_j)_{j\in J})$ è un prodotto di $(N_j)_{j\in J}$.*

A meno di isomorfismi i prodotti di famiglie di (pre)moduli sono i prodotti diretti, con le proiezioni canoniche come proiezioni:

Proposizione 4.26. *Sia $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di (pre)moduli sull'anello commutativo R. Allora il prodotto diretto $\prod_{i\in I} M_i$ è un prodotto di $(M_i)_{i\in I}$ con le proiezioni canoniche come proiezioni.*

Dimostrazione. Verifichiamo che le richieste della definizione di prodotto siano soddisfatte da $P := \prod_{i\in I} M_i$ e dalle proiezoni canoniche $\pi_i \colon (a_j)_{j\in J} \in P \mapsto a_i \in M_i$.

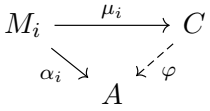
Siano A un R-(pre)modulo e, per ogni $i \in I$, un R-omomorfismo $\alpha_i \colon A \to M_i$. Allora, come dovrebbe risultare chiaro, esiste un'unica applicazione $\varphi \colon A \to P$ tale che $\varphi\pi_i = \alpha_i$ per ogni $i \in I$, precisamente $\varphi \colon a \in A \mapsto (a^{\alpha_i})_{i\in I} \in P$. Inoltre, come si verifica immediatamente, φ è un R-omomorfismo. Ciò mostra che $(P, (\pi_i)_{i\in I}))$ è un prodotto di $(M_i)_{i\in I}$, come richiesto. □

Similmente, e si lascia la dimostrazione come esercizio, sia nel caso degli anelli commutativi che in quello degli anelli commutativi unitari, e quindi delle algebre su un fissato anello commutativo unitario, i prodotti (nel senso categoriale) sono, a meno di isomorfismi, i prodotti diretti con le proiezioni canoniche. Ulteriore conseguenza è che in tutti i casi considerati ((pre)moduli, anelli commutativi, anelli commutativi unitari, (pre)algebre le proiezioni ottenute per i prodotti sono omomorfismi suriettivi.

Coprodotti La nozione di coprodotto è duale di quella di prodotto, il che, come sempre per concetti categoriali, significa che si ottiene dalla seconda 'invertendo il verso' dei morfismi.

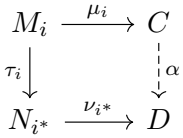
Nel caso dei (pre)moduli la definizione è questa: fissato un anello commutativo R, siano dati un R-(pre)modulo C, una famiglia $(M_i)_{i\in I}$ di R-(pre)moduli e, per ogni $i \in I$, un R-omomorfismo $\mu_i \colon M_i \to C$. Si dice che C è *coprodotto* della famiglia $(M_i)_{i\in I}$ con famiglia di iniezioni $(\mu_i)_{i\in I}$, o

che $(C, (\mu_i)_{i\in I})$ è un coprodotto di $(M_i)_{i\in I}$ se e solo se, scelti comunque un R-(pre)modulo A e, per ogni $i \in I$, un R-omomorfismo $\alpha_i\colon M_i \to A$, esiste uno ed un solo R-omomorfismo $\varphi\colon C \to A$ tale che, per ogni $i \in I$, si abbia $\alpha_i\varphi = \mu_i$.



Valgono per i coprodotti, con dimostrazioni simili, proposizioni analoghe a quelle enunciate per i prodotti di (pre)moduli:

Proposizione 4.27. *Sia R un anello commutativo, siano $(M_i)_{i\in I}$ e $(N_j)_{j\in J}$ famiglie di R-(pre)moduli; supponiamo che $*\colon I \to J$ sia una biezione e, per ogni $i \in I$, $\tau_i\colon M_i \to N_{i^*}$ un R-isomorfismo. Siano C un coprodotto di $(M_i)_{i\in I}$ con famiglia di iniezioni $(\pi_i)_{i\in I}$ e D un coprodotto di $(N_j)_{j\in J}$ con famiglia di proiezioni $(\nu_j)_{j\in J}$. Allora esiste uno ed un solo R-isomorfismo $\alpha\colon C \to D$ tale che per ogni $i \in I$ si abbia $\mu_i\alpha = \tau_i\nu_{i^*}$.*



Proposizione 4.28. *Siano R un anello commutativo unitario e $(C, (\mu_i)_{i\in I})$ un coprodotto di una famiglia $(M_i)_{i\in I}$ di R-(pre)moduli. Se $\sigma\colon C \to C_1$ un isomorfismo di R-(pre)moduli, $s\colon J \to I$ è un'applicazione biettiva, $(N_j)_{j\in J}$ una famiglia di R-(pre)moduli e, per ogni $j \in J$, $\sigma_j\colon N_j \to M_{j^s}$ è un R-isomorfismo, allora $(C_1, (\sigma_j\mu_{j^s})_{j\in J}\sigma)$ è un coprodotto di $(N_j)_{j\in J}$.*

I coprodotti dei (pre)moduli sono, essenzialmente, le somme dirette:

Proposizione 4.29. *Sia $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di (pre)moduli sull'anello commutativo R. Allora la somma diretta $\coprod_{i\in I} M_i$ è un coprodotto di $(M_i)_{i\in I}$ con i monomorfismi canonici come iniezioni.*

Dimostrazione. Sia $C := \coprod_{i\in I} M_i$ e, per ogni $i \in I$, $\mu_i\colon M_i \rightarrowtail C$ l'i-esimo monomorfismo canonico. Per verificare che $(C, (\mu_i)_{i\in I})$ sia un coprodotto di $(M_i)_{i\in I}$ consideriamo un arbitrario R-(pre)modulo A e, per ogni $i \in I$, un R-omomorfismo $\alpha_i\colon M_i \to A$. Supponiamo che φ sia un R-omomorfismo $C \to A$ tale che $\mu_i\varphi = \alpha_i$ per ogni $i \in I$. Sia $a = (a_i)_{i\in I} \in C$; dal momento che $a = \sum_{i\in I} a_i^{\mu_i}$, si deve avere $a^\varphi = \sum_{i\in I} a_i^{\alpha_i}$. D'altra parte l'applicazione $(a_i)_{i\in I} \in C \mapsto \sum_{i\in I} a_i^{\alpha_i}$ è, come si verifica direttamente, un omomorfismo di R-(pre)moduli tale che $\mu_i\varphi = \alpha_i$ per ogni $i \in I$; dunque l'unico con questa proprietà. L'asserto è così provato. □

A differenza di quanto accade nel caso dei prodotti, i coprodotti di anelli commutativi, anelli commutativi unitari, algebre su un fissato anello commutativo unitario, che pure esistono, non sono descritti allo stesso modo che nel caso dei (pre)moduli: non dalle somme dirette, ma dai prodotti tensoriali, che qui non discuteremo.

Esercizi.

4.G.1. A titolo di comparazione, nella categoria dei gruppi il prodotto (nel senso categoriale) è descritto dalla costruzione del prodotto cartesiano, analogamente a quanto accade per moduli e anelli; il coprodotto non è dato dall'analogo della somma diretta di moduli (che nella terminologia usuale della teoria dei gruppi si chiama prodotto diretto, fare attenzione al diverso uso di questa espressione per diverse categorie di strutture algebriche) ma da un'altra costruzione, quella del prodotto libero.

4.G.2. I simboli $\prod$ e $\coprod$ sono utilizzati in teoria delle categorie per denotare prodotti e coprodotti. Quanto qui discusso spiega perché abbiamo usato il simbolo $\coprod$ per le somme dirette di (pre)moduli ma non di anelli.

5 Proprietà di anelli di polinomi e di serie formali di potenze

Terminologia e prime proprietà degli anelli di polinomi su un insieme arbitrario di indeterminate ricalcano abbastanza da vicino quelle già note nel caso dei polinomi ad una indeterminata. Fissato un anello di polinomi $(R[X], +, \cdot)$ sull'anello commutativo unitario R, per ogni $Y \subseteq X$ indichiamo con $\operatorname{Mon} Y$ il sottomonoide generato da Y in $(R[X], \cdot)$ e ricordiamo anche che $R[Y]$ è, salvo indicazione contraria, tacitamente identificato con il sottoanello generato da $R \cup Y$ in $R[X]$. Gli elementi di $\operatorname{Mon} X$ hanno la forma $\ell = \prod_{x \in X} x^{\lambda_x}$ dove ciascuno degli λ_x è un numero naturale e solo un numero finito di essi è positivo; inoltre sappiamo dalla costruzione delle algebre unitarie libere che ogni tale ℓ è univocamente determinato dalla famiglia $(\lambda_x)_{x \in X}$. I polinomi in $R[X]$, a loro volta, hanno la forma $f = \sum_{\ell \in \operatorname{Mon} X} a_\ell \ell$, dove $a_\ell \in R$ per ogni $\ell \in \operatorname{Mon} X$ e $\{\ell \in \operatorname{Mon} X \mid a_\ell \neq 0_R\}$ è finito; inoltre f è univocamente determinato dalla famiglia $(a_\ell)_{\ell \in \operatorname{Mon} X}$. Questa famiglia è la cosiddetta *famiglia dei coefficienti di* f; in maggior dettaglio, per ogni $\ell \in \operatorname{Mon} X$, l'elemento a_ℓ è il coefficiente di f relativo a ℓ. Il coefficiente di f relativo a $1_{\operatorname{Mon} X} = 1_R$ prende il nome, tradizionale quanto brutto, di *termine noto*. Esso è l'immagine di f nell'omomorfismo (suriettivo) di R-algebre unitarie $\varepsilon_0 \colon R[X] \to R$ che manda ogni elemento di X in 0_R. Evidentemente $\ker \varepsilon_0 = (X)$, quindi $R[X]/(X) \simeq R$; questo è un caso particolare del lemma 4.22.

Di una indeterminata $x \in X$ si dice che appare nel polinomio $f \in R[X]$ se e solo se esiste un ℓ in $M[X]$ che sia multiplo di x in $\operatorname{Mon} X$ e tale che il coefficiente di f relativo a ℓ non sia 0_R. In modo equivalente, dire che x appare in f significa dire, nel contesto dato, che $f \notin R[X \smallsetminus \{x\}]$. Evidentemente, per ogni $f \in R[X]$, l'insieme delle indeterminate che appaiono in f è finito.

Indicheremo con νf il grado del polinomio ad una indeterminata f; ad altre nozioni di grado, per anelli di polinomi a più indeterminate, si fa cenno nell'osservazione 5.A.1.

5.1 Due risultati elementari

Iniziamo con l'estensione al caso generale di un risultato noto dai corsi elementari di algebra per polinomi ad una indeterminata. In effetti questo risultato segue anche da quanto sarà provato, per via indipendente, nella sezione 5.3, ma l'importanza di questo risultato suggerisce di fornirne comunque una dimostrazione diretta e più semplice.

Proposizione 5.1. *Sia $R[X]$ un anello di polinomi sull'anello commutativo unitario R. Allora:*
(i) *$R[X]$ è un dominio di integrità se e solo se R lo è;*
(ii) *se R è un dominio di integrità, $\mathcal{U}(R[X]) = \mathcal{U}(R)$.*

Dimostrazione. Questo risultato è ben noto nel caso $|X| = 1$ e quindi, ragionando per induzione sul numero delle indeterminate ed utilizzando il lemma 4.21, che comporta $R[X] \simeq (R[X \smallsetminus \{x\}])[x]$ per ogni $x \in X$, è facile provarlo, più in generale, nel caso in cui X sia finito. Nel caso generale, è ovvio che R è un dominio di integrità se $R[X]$ lo è. Supponiamo invece che R sia un dominio di integrità, e sia $f \in R[X]$. Se f è un divisore dello zero oppure è invertibile, esiste $g \in R[X] \smallsetminus 0$ tale che fg sia 0_R oppure 1_R. In entrambi i casi esiste un sottoinsieme finito X_0 di X tale che $f, g \in R[X_0]$, e quindi f è un divisore dello zero oppure un elemento invertibile in $R[X_0]$. Poiché,

come detto, il risultato vale per anelli di polinomi su un numero finito di indeterminate, e quindi per $R[X_0]$, $f = 0_R$ nel primo caso, $f, g \in \mathcal{U}(R)$ nel secondo. Con questo il lemma è provato.[1] □

Lemma 5.2. *Siano R un anello commutativo unitario e $R[X]$ un anello di polinomi a coefficienti in R. Allora ogni elemento primo di R è primo anche in $R[X]$.*

Dimostrazione. Sia p un elemento primo in R. Allora $\bar{R} := R/pR$ è un dominio di integrità e quindi, per la proposizione 5.1, anche l'anello di polinomi $\bar{R}[X]$ è un dominio di integrità.[2] Per la proprietà universale degli anelli di polinomi, l'epimorfismo canonico $\nu\colon R \twoheadrightarrow \bar{R}$ si estende ad un omomorfismo $\varepsilon\colon R[X] \to \bar{R}[X]$ che manda in sé ogni elemento di X. È chiaro che anche ε è suriettivo, quindi $\bar{R}[X] \simeq R[X]/\ker\varepsilon$; dunque $\ker\varepsilon$ è un ideale primo di $\bar{R}[X]$. Gli elementi di $\ker\varepsilon$ sono i polinomi i cui coefficienti sono multipli (in R) di p, quindi $\ker\varepsilon = pR[X]$. Abbiamo così provato che $pR[X]$ è un ideale primo, dunque p è un elemento primo in $R[X]$. □

Esercizi.

5.A.1. Sia $R[X]$ un anello di polinomi sull'anello commutativo unitario R e sia $f \in R[X]$. Esiste più di un modo per estendere a f la nozione di grado di un polinomio ad una indeterminata. Uno è questo: per ogni $x \in X$ si chiama grado di f rispetto a x il grado di f riguardato come polinomio a coefficienti in $R[X \smallsetminus \{x\}]$ nell'indeterminata x, utilizzando dunque l'isomorfismo tra $R[X]$ e $(R[X \smallsetminus \{x\}])[x])$. Altrettanto utile è la nozione di grado totale. Ogni $\ell = \prod_{x\in X} x^{\lambda_x} \in \operatorname{Mon} X$ ha per grado totale il numero naturale $\sum_{x\in X} \lambda_x$ (ben definito, come al solito, perché solo un numero finito di addendi è non nullo). Se $f = \sum_{\ell\in\operatorname{Mon} X} a_\ell \ell \neq 0_R$, quindi $L := \{\ell \in \operatorname{Mon} X \mid a_\ell \neq 0_R\}$ è un insieme finito non vuoto e quindi è lecito definire il grado totale di f come il massimo tra i gradi totali degli elementi di L. Se $f = 0_R$ si usa definire ogni grado di f come $-\infty$.

5.A.2. Con riferimento a quanto nell'osservazione precedente, si dimostri che se R è un dominio di integrità unitario, in ogni anello di polinomi su X vale la regola di addizione dei gradi (il grado di un prodotto fg è la somma tra il grado di f e quello di g) per ciascuna delle nozioni di grado definite. (Il caso del grado totale richiede un po' di attenzione in più; può essere utile fissare un ordinamento totale in X ed usarle questo per ordinare lessicograficamente gli elementi di $\operatorname{Mon} X$.)

Utilizzare poi la regola di addizione dei gradi totali per fornire una dimostrazione alternativa della proposizione 5.1.

5.2 Fattorialità di anelli di polinomi

Il principale scopo di questa sezione è quello di provare che gli anelli di polinomi a coefficienti in un anello fattoriale sono essi stessi anelli fattoriali.

Conviene fissare delle notazioni. In questa sezione R indica (sempre) un anello fattoriale e $K = Q(R)$ un suo fissato campo dei quozienti (contenente R come sottoanello, necessariamente unitario). $K[x]$ ed il suo sottoanello unitario $R[x]$ sono anelli di polinomi nell'indeterminata x.

[1] una dimostrazione alternativa è contenuta nell'esercizio 5.A.2.

[2] qui, ad essere precisi, c'è un problema: non è detto, a priori, che X sia disgiunto da $\bar{R}$, quindi $\bar{R}[X]$ potrebbe non essere ben definito come anello di polinomi. Uno dei (tanti) modi semplici per rimediare consiste nel sostituire X con un insieme X' ad esso equipotente che sia disgiunto da $R \cup \bar{R}$, dimostrare il lemma per $R[X']$ e poi sfruttare l'isomorfismo $R[X] \simeq R[X']$ per trarre la stessa conclusione per $R[X]$.

Indicando con $|_{R[x]}$ e $|_{K[x]}$ le relazioni di divisibilità in $R[x]$ e $K[x]$, nell'ordine, definiamo la relazione binaria $\sim_R$ in $K[x]$ ponendo, per ogni $f, g \in K[x]$, $f \sim_R g$ se e solo se $g = uf$ per un opportuno $u \in \mathcal{U}(R)$. Chiaramente $\sim_R$ è una relazione di equivalenza che è più forte delle relazione 'essere elementi associati' in $K[x]$ ed estende la relazione 'essere elementi associati' in $R[x]$. Ricordando dalla proposizione 5.1 che $\mathcal{U}(R) = \mathcal{U}(R[x])$ e $K[x]$ è un dominio di integrità, osserviamo poi che, per ogni $f, g \in K[x]$, si ha $f \sim_R g$ se e solo se esistono $u, v \in R[x]$ tali che $g = uf$ e $f = vg$.

Per ogni $f \in R[x]$ si chiama *contenuto* di f (in R) ogni massimo comun divisore in R dell'insieme dei coefficienti di f. Come si riconosce facilmente, un qualsiasi elemento di R divide f in $R[x]$ se e solo se divide, in R, ogni coefficiente di f; di conseguenza, dire che c è un contenuto di f equivale a dire che c è un divisore di f in $R[x]$ che è (in $R[x]$, o equivalentemente in R) multiplo di ogni elemento di R che divida f in $R[x]$. Evidentemente l'insieme dei contenuti di f è una classe di equivalenza modulo $\sim_R$.

Un polinomio in $R[x]$ si dice *primitivo* se e solo se ha 1_R come contenuto, cioè se e solo se non è divisibile per alcun elemento non invertibile di R.

Un'osservazione semplice ma di grande rilevanza è espressa dal seguente lemma. Esso, o in alternativa il lemma 5.2 del quale è immediata conseguenza, è noto come lemma di Gauss, etichetta che del resto viene talvolta attibuita anche ad altri tra i risultati presentati in questa sezione.

Lemma 5.3. *Ogni prodotto tra polinomi primitivi in $R[x]$ è primitivo.*

Dimostrazione. Siano f e g due polinomi primitivi in $R[x]$. Se fg non è primitivo esiste un primo p in R che lo divide (in $R[x]$). Ma, essendo p primo in $R[x]$, questo comporta che p divida uno tra f e g, cosa esclusa dal fatto che f e g sono primitivi. □

Se $0_R \neq f \in R[x]$ e c è un contenuto di f, allora $f = c\hat{f}$ per un opportuno $\hat{f}$ in $R[x]$ che risulta evidentemente primitivo (se $u \in R$ e $u \mid_{R[x]} \hat{f}$ allora $cu \mid_{R[x]} f$, quindi $cu|_R c$ e $u \in \mathcal{U}(R)$). Questa osservazione si estende a polinomi in $K[x]$:

Lemma 5.4. *Sia $0_R \neq f \in K[x]$. Allora esistono $k \in K$ e $\hat{f} \in R[x]$ tali che $f = k\hat{f}$ e $\hat{f}$ è primitivo. Inoltre questa decomposizione di f è unica modulo $\sim_R$, nel senso che, scelti comunque $k' \in K$ e $f' \in R[x]$ tali che $f = k'f'$ e f' sia primitivo, allora $k' \sim_R k$ e $f' \sim_R \hat{f}$.*

Dimostrazione. Esiste certamente $a \in R \setminus 0$ tale che $g := af \in R[x]$. Come appena visto, $g = c\hat{g}$ dove c è un contenuto di g e $\hat{g}$ è primitivo. Ponendo $k = ca^{-1}$ e $\hat{f} = \hat{g}$ otteniamo la decomposizione $f = k\hat{f}$ richiesta dall'enunciato. Siano poi $k' \in K$ e f' primitivo in $K[x]$ tali che $f = k'f'$. Ponendo, come certamente lecito, $k' = st^{-1}$ per opportuni $s, t \in R \setminus 0$, abbiamo $h := ct\hat{f} = saf'$. Ora $ct \mid_{R[x]} h$, quindi, se d è un contenuto di h, $d = cte$ per un opportuno $e \in R$. Ma allora, da $h = ct\hat{f}$ e $d \mid_{R[x]} h$ segue $e \mid_{R[x]} \hat{f}$, quindi $e \in \mathcal{U}(R)$, perché $\hat{f}$ è primitivo. Pertanto ct è un contenuto di h. Ragionando allo stesso modo si verifica che anche sa è un contenuto di h. Di conseguenza $ct \sim_R as$ ed esiste $u \in \mathcal{U}(R)$ tale che $as = ctu$; se ne ricava $k' = ku$, quindi $k' \sim_R k$, e dunque anche $f' = u^{-1}\hat{f}$, quindi $f' \sim_R \hat{f}$. □

Questo risultato suggerisce di estendere la definizione di contenuto di un polinomio in $R[x]$ a polinomi in $K[x]$ in questo modo: l'unico contenuto del polinomio nullo è 0_R; se $0_R \neq f \in K[x]$ si chiama contenuto di f ogni elemento $k \in K$ tale che $f = k\hat{f}$ per un opportuno polinomio primitivo $\hat{f} \in R[x]$. Come segue dal lemma 5.4, i contenuti di f costituiscono una classe di equivalenza modulo $\sim_R$, il che mostra che per i polinomi in $R[x]$ questa nuova definizione di contenuto è equivalente alla precedente.

Se f è un polinomio primitivo in $R[x]$ e $k \in K$, allora k è un contenuto di kf. Dal lemma 5.4 si può quindi ricavare questa utile osservazione:

Corollario 5.5. *Siano f un polinomio primitivo in $R[x]$ e $k \in K$. Allora $kf \in R[x]$ se e solo se $k \in R$.*

Il passaggio chiave nella dimostrazione presentata in questa sezione è questo ulteriore corollario:

Corollario 5.6. *Sia f un polinomio primitivo in $R[x]$ e sia $g \in R[x]$. Se $f \mid_{K[x]} g$, allora $f \mid_{R[x]} g$.*

Dimostrazione. Supponiamo $f \mid_{K[x]} g$, dunque $g = fq$ per qualche $q \in K[x]$. Abbiamo $q = k\hat{q}$, dove $\hat{q}$ è un polinomio primitivo in $R[x]$ e $k \in K$. Poiché anche f è primitivo, il lemma 5.3 mostra che $f\hat{q}$ è primitivo. Ma $g = k(f\hat{q}) \in R[x]$, quindi dal corollario 5.5 segue $k \in R$ e quindi $q = k\hat{q} \in R[x]$. Pertanto $f \mid_{R[x]} g$. □

Proposizione 5.7. *Sia $f \in R[x]$. Allora f è irriducibile in $R[x]$ se e solo se o è un elemento primo di R oppure è primitivo ed è irriducibile in $K[x]$. Inoltre, se ciò accade, f è primo in $R[x]$.*

Dimostrazione. Se $f \in R$, l'asserto segue dal lemma 5.2; possiamo allora assumere $f \notin R$. Supponiamo f irriducibile in $R[x]$. Allora f è sicuramente primitivo (altrimenti il suo contenuto ne sarebbe un divisore non banale in $R[x]$), dobbiamo provare che è irriducibile in $K[x]$. Avendo grado positivo, f non è invertibile in $K[x]$. Sia g un divisore di f in $K[x]$. Abbiamo $g = k\hat{g}$ dove $k \in K$ e $\hat{g}$ è un polinomio primitivo; chiaramente $\hat{g}$ è un associato di g in $K[x]$ e quindi $\hat{g} \mid_{K[x]} f$. Ma allora $\hat{g} \mid_{R[x]} f$ per il corollario 5.6. Poiché f è irriducibile in $R[x]$ ne segue che $\hat{g}$ è un divisore banale di f in $R[x]$ e, di conseguenza, g è un divisore banale di f in $K[x]$. È così provato che f è irriducibile in $K[x]$.

Viceversa, supponiamo che f sia primitivo e irriducibile in $K[x]$. Per completare la dimostrazione basta mostrare che f è primo in $R[x]$. Ovviamente $f \notin \mathcal{U}(R) = \mathcal{U}(R[x])$. Siano $g, h \in R[x]$ tali che $f \mid_{R[x]} gh$. Dal momento che $K[x]$ è fattoriale, f è primo in $K[x]$, quindi f divide uno tra g e h in $K[x]$ e quindi anche in $R[x]$ per il corollario 5.6. Pertanto f è primo in $R[x]$; a questo punto la dimostrazione è completa. □

Teorema 5.8. *Ogni anello di polinomi a coefficienti in un anello fattoriale è fattoriale.*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che $R[x]$ è fattoriale. Sappiamo che $R[x]$ è un dominio di integrità unitario, resta da provare che ogni suo elemento non invertibile f è prodotto di primi. In $K[x]$ possiamo rappresentare un tale f nella forma $f = cf_1f_2 \cdots f_n$, dove $c \in R$, $n \in \mathbb{N}$ e, per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, f_i è un polinomio irriducibile in $K[x]$, che possiamo scrivere come $f_i = k_i\hat{f}_i$ per opportuni $k_i \in K$ e $\hat{f}_i$ primitivo in $R[x]$ (si noti: non è escluso il caso $n = 0$). Essendo $\hat{f}_i$ associato a f_i e quindi irriducibile in $K[x]$, esso è primo in $R[x]$ per la proposizione 5.7. Posto $k = ck_1k_2 \cdots k_n$, abbiamo $f = k\hat{f}_1\hat{f}_2 \cdots \hat{f}_n$; dal lemma 5.3 ed il corollario 5.5 deduciamo $k \in R$. Allora k è o invertibile in R (cioè in $R[x]$) o, per il lemma 5.2, prodotto di primi di $R[x]$. Abbiamo così provato che f è un prodotto di primi in $R[x]$, come desiderato, quindi $R[x]$ è un anello fattoriale.

Argomentando per induzione, ed utilizzando il fatto che, per ogni insieme X disgiunto da R ed ogni $x \in X$ l'anello di polinomi $R[X]$ è isomorfo a $(R[X \setminus \{x\}])[x]$ (lemma 4.21), verifichiamo rapidamente che ogni anello di polinomi su un insieme finito di indeterminate è fattoriale.

Sia infine $R[X]$ un anello di polinomi su un insieme arbitrario di indeterminate X. Allora $R[X]$ è un dominio di integrità. Sia f un suo elemento non invertibile. Esiste un sottoinsieme finito X_0 di X tale che $f \in R[X_0]$. Per quanto sopra, f è un prodotto di primi in $R[X_0]$. Ma, per il lemma 5.2 e per l'isomorfismo $R[X] \simeq (R[X_0])[X \setminus X_0]$, ogni elemento primo di $R[X_0]$ è primo anche in $R[X]$, quindi f è prodotto di primi in $R[X]$. Possiamo così concludere che $R[X]$ è un anello fattoriale. □

Limitandoci al caso dei polinomi ad una indeterminata, possiamo esaminare in maggior dettaglio le fattorizzazioni in prodotto di irriducibili (ovvero primi) dei polinomi in $R[x]$. Quello che emerge dalla dimostrazione del teorema 5.8 è che se f è un polinomio non invertibile in $R[x]$, una sua fattorizzazione in prodotto di irriducibili avrà la forma $p_1p_2\cdots p_rf_1f_2\cdots f_s$, dove $r,s\in\mathbb{N}$, gli elementi p_i sono primi di R e $f_1,f_2,\dots,f_s$ sono polinomi primitivi irriducibili in $K[x]$. Evidentemente, $c=p_1p_2\cdots p_r$ è un contenuto di f, e $(cf_1)f_2\cdots f_s$ una fattorizzazione di f in prodotto di irriducibili in $K[x]$, se f ha grado positivo (ovvero $s>0$). Dunque, nelle fattorizzazioni di f in prodotto di irriducibili in $R[x]$ ed in $K[x]$, i fattori irriducibili di grado positivo sono gli stessi a meno di associati. A questo proposito si veda l'esercizio 5.B.1: polinomi primitivi di $R[x]$ che siano associati in $K[x]$ sono necessariamente equivalenti modulo $\sim_R$.

Un'altra osservazione dello stesso genere è contenuta nell'esercizio 5.B.2: ogni fattorizzazione in $K[x]$ di un elemento di $R[X]$ dà luogo ad una fattorizzazione in $R[x]$ con fattori associati agli originali.

I risultati di questa sezione trovano immediata applicazione al caso dei polinomi sugli interi, quando cioè $R=\mathbb{Z}$ e $K=\mathbb{Q}$, o anche al caso dei polinomi su un campo. Abbiamo ad esempio, che ogni anello di polinomi su $\mathbb{Z}$ o su un campo è fattoriale (ma, ad eccezione del caso dei polinomi ad una indeterminata su un campo, questi anelli non sono principali, vedi l'esercizio 5.B.6).

Chiudiamo la sezione con un lemma che ha un'importante applicazione in teoria dei numeri:

Lemma 5.9. *Siano $f\in K[x]$ e $g\in R[x]$ polinomi monici. Se $f\mid_{K[x]} g$, allora $f\in R[x]$.*

Dimostrazione. Poniamo $f=k\hat f$, dove k è un contenuto di f e $\hat f$ è primitivo. Allora $\hat f\in R[x]$ e $\hat f\mid_{K[x]} g$, quindi $\hat f\mid_{R[x]} g$ per il corollario 5.6. Di conseguenza, essendo g monico, il coefficiente direttore di $\hat f$ è invertibile in R. Ma, poiché anche $f=k\hat f$ è monico, questo coefficiente direttore è k^{-1}, quindi $k\in R$ e così $f\in R[x]$. □

Esercizi ed osservazioni.

5.B.1. Siano f e g due polinomi primitivi in $R[x]$. Allora $f\sim_R g$ se e solo se f e g sono associati in $K[x]$.

5.B.2. Sia $f=gh$, dove $f\in R[x]$ e $g,h\in K[x]$. Allora $f=g_1h_1$ per opportuni $g_1,h_1\in R[x]$ che siano associati (in $K[x]$) rispettivamente a g e ad h.

5.B.3. Provare questa estensione del corollario 5.5 (equivalente al corollario che lo segue): se f è un polinomio primitivo in $R[x]$ e $q\in K[x]$, allora $fq\in R[x]$ se e solo se $q\in R[x]$.

5.B.4. Mostrare che nei corollari 5.5 e 5.6 l'ipotesi che f sia primitivo è essenziale; anzi: le proprietà espresse da questi corollari sono equivalenti all'essere f primitivo.

5.B.5. Fattorizzare in prodotto di irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$ il polinomio $(4x^3+4)(3x^5-6x^3+18x-9)$.

5.B.6. Provare che se R è un anello commutativo unitario ma non un campo, allora $R[x]$ non è principale. Suggerimento: certamente x è irriducibile in $R[x]$. Sia a un elemento non invertibile di R. Allora a non divide x, quindi 1_R è un massimo comun divisore tra a e x. Se $R[x]$ è principale $1_R=ag+xh$ per opportuni $g,h\in R[x]$; da ciò segue una chiara contraddizione.

In realtà questo ragionamento mostra qualcosa in più: se R non è un campo $R[x]$ non è un anello di Bézout.

5.B.7. Come si vede senza difficoltà, il lemma di Gauss si può estendere al caso di polinomi in $R[X]$, per un arbitrario insieme di indeterminate X. C'è da fare attenzione alla corretta generalizzazione della nozione di polinomio primitivo: un polinomio primitivo di $R[X]$ rispetto a R è un polinomio che non abbia come divisore alcun elemento non invertibile di R, quindi quelli che abbiamo chiamato polinomi primitivi di $R[x]$ sono i polinomi di $R[x]$ primitivi rispetto a R. Va osservato che se $f\in R[X]$ ed f è primitivo rispetto a R e $Y\subseteq X$ non è in generale vero che f sia primitivo rispetto a $R[Y]$. Questo è lampante nel caso $Y=X$; come ulteriore

esempio, se $X = \{x, y\}$ e $x \neq y$, allora $xy + y$ è un polinomio di $R[X]$ primitivo rispetto a R ma non rispetto a $R[y]$.

5.3 Invertibili, nilpotenti, divisori dello zero

Descriviamo in questa sezione, per quanto possibile, i polinomi che hanno le proprietà indicate nel titolo e, di conseguenza, traiamo informazioni sul radicale di Jacobson ed il nilradicale di un anello di polinomi.

Proposizione 5.10. *Sia $R[X]$ un anello di polinomi a coefficienti nell'anello commutativo unitario R sull'insieme di indeterminate X e sia $f \in R[X]$. Allora:*

(i) *f è invertibile in $R[X]$ se e solo se il suo termine noto è invertibile in R ed ogni suo altro coefficiente*[3] *è nilpotente.*

(ii) *Per ciascun $x \in X$ sono equivalenti:*
   a) *f è nilpotente;*
   b) *$1_R + xf$ è invertibile;*
   c) *ogni coefficiente di f è nilpotente.*

Dimostrazione. Alcune implicazioni sono ovvie: in (i), se f ha termine noto invertibile e gli altri coefficienti tutti nilpotenti, allora f è somma di un elemento invertibile ed uno nilpotente, quindi è invertibile per la proposizione 3.21; in (ii), per la stessa ragione a) implica b) e, chiaramente, c) implica a). Sono solo da provare la necessità della condizione in (i) e l'implicazione (ii.b) $\Rightarrow$ (ii.c).

Iniziamo dalla verifica di (i) nel caso $|X| = 1$ (se $X = \varnothing$ non c'è nulla da provare); poniamo dunque $X = \{x\}$. Ragionando per assurdo, supponiamo che f sia un controesempio di grado minimo, cioè un polinomio di grado minimo per la poprietà di essere invertibile ma non della forma descritta in (i). Sia $g = f^{-1}$. Posto $n = \nu f$ ed $m = \nu g$, sia $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$. Il coefficiente di fg relativo a $x^0 = 1_R$ è $a_0 b_0$, quindi da $fg = 1_R$ segue $a_0 \in \mathcal{U}(R)$ e $b_0 = a_0^{-1}$. Allora certamente $n > 0$. Ci proponiamo di dimostrare che si ha

$$a_n^{i+1} b_{m-i} = 0_R \text{ per ogni intero } i \text{ compreso tra 0 e } m. \tag{$*$}$$

Ragionando per ricorsione assumiamo che l'uguaglianza valga per ogni naturale minore di un assegnato naturale $i \leq m$ e proviamola per i. Il coefficiente di $1_R = fg$ relativo a x^{n+m-i} è $\sum_{j=0}^{i} a_{n-j} b_{m+j-i}$ (ponendo $a_\ell = 0_R$ se $\ell < 0$), che è 0_R perché $n + m - i \geq n > 0$. Dal momento che, per ipotesi ricorsiva, a_n^i annulla b_ℓ per ogni intero $\ell > m - i$, ne deduciamo $a_n^{i+1} b_{m-i} = 0_R$, che è quanto si voleva. La $(*)$ è così provata. Per $i = m$ si ottiene $a_n^{m+1} b_0 = 0_R$ che, essendo b_0 invertibile, fornisce $a_n^{m+1} = 0_R$. Abbiamo così verificato che il coefficiente direttore a_n di f è nilpotente. Ora, per la proposizione 3.21, $f_1 := f - a_n x^n \in \mathcal{U}(R[x])$. Ma $\nu f_1 < n$, quindi, per la minimalità di n i coefficienti di f_1, escluso il termine noto, sono tutti nilpotenti; ma questo vuol dire che anche f ha la stessa proprietà, e ricaviamo così una contraddizione. Dunque, la (i) è provata nel caso $|X| = 1$.

Usando quanto appena provato è facile dimostrare (ii). Bisogna solo verificare che (ii.b) implica (ii.c). Ragioniamo per induzione su $t := |X_0 \cup \{x\}|$, dove X_0 l'insieme delle indeterminate che appaiono in f. Assumiamo $1_R + xf \in \mathcal{U}(R[X])$. Se $t = 1$, cioè se $f \in R[x]$, allora la (i), già provata in questo caso, mostra che tutti i coefficienti di f sono nilpotenti, perché appaiono anche tra i coefficienti di $1_R + xf$ in posizione diversa da quella del termine noto. Sia $t > 1$ e sia $x \neq y \in X_0$. Allora possiamo scrivere $f = \sum_{i=0}^{r} f_i y^i$ per opportuni $r \in \mathbb{N}$ e $f_0, f_1, \ldots, f_r \in R[X_0 \smallsetminus \{y\}]$.

[3] quest'espressione, sintetica ma leggermente ambigua, va letta come: ciascuno dei coefficienti che sia relativo ad un elemento di $\operatorname{Mon} X$ (nelle notazioni all'apertura del capitolo) diverso da 1_R.

Sempre per il caso già dimostrato di (i), applicato per $R[X_0 \setminus \{y\}]$ al posto di R e y al posto di x, dal fatto che $1_R + xf$ è invertibile deduciamo che $1_R + xf_0$ è invertibile e ciascuno degli xf_i al variare di i tra 1 e r è nilpotente, e quindi, anche in questo caso, $1_R + xf_i \in \mathcal{U}(R[X_0 \setminus \{y\}])$. A questo punto l'ipotesi di induzione mostra che tutti i coefficienti di ciascuno dei polinomi f_i, e quindi tutti i coefficienti di f, sono nilpotenti. Con questo (ii) è completamente dimostrata.

Completiamo ora la dimostrazione di (i), ragionando ancora per induzione sulla cardinalità dell'insieme X_0 delle indeterminate che appaiono in f; possiamo assumere $|X_0| > 1$. Scelto, come sopra, $y \in X_0$ e posto ancora $f = \sum_{i=0}^{r} f_i y^i$ dove $r \in \mathbb{N}$ e $f_0, f_1, \ldots, f_r \in R[X_0 \setminus \{y\}]$, dal caso $|X| = 1$ deduciamo che f_0 è invertibile, e quindi per ipotesi di induzione ha termine noto invertibile e gli altri coefficienti nilpotenti mentre, per ogni $i > 0$, f_i è nilpotente e quindi, per (ii), ha tutti i coefficienti nilpotenti. Dal momento che il termine noto di f è il termine noto di f_0, l'asserto è provato. □

Dalla equivalenza in (ii) e dalla proposizione 3.18 segue immediatamente:

Corollario 5.11. *Con le stesse notazioni, se $X \neq \varnothing$, si ha* $\mathrm{Jac}(R[X]) = \mathrm{NilRad}(R[X])$ *e quindi, se R è un dominio di integrità,* $\mathrm{Jac}(R[X]) = 0$.

La descrizione dei polinomi divisori dello zero non è altrettanto esplicita. Si dimostra che *se un polinomio f è un divisore dello zero, esso è annullato da un polinomio costante non nullo*; più in generale:

Proposizione 5.12. *Sia $R[X]$ un anello di polinomi a coefficienti nell'anello commutativo unitario R sull'insieme di indeterminate X e sia $S \subseteq R[X]$. Se* $\mathrm{Ann}_{R[X]}(S) \neq 0$, *allora* $\mathrm{Ann}_R(S) \neq 0$.

Dimostrazione. Poiché in ciascun polinomio che annulla S appare solo un numero finito di indeterminate, esiste una parte finita Y di X, della cardinalità minima possibile per la condizione $A := \mathrm{Ann}_{R[Y]}(S) \neq 0$. Ciò che dobbiamo provare è che Y è l'insieme vuoto. Supposto $Y \neq \varnothing$, fissiamo $x \in Y$. Tra gli elementi non nulli di A se ne scelga uno, f, che abbia il minimo grado possibile, n, rispetto a x (cioè come polinomio nell'indeterminata x a coefficienti in $R[Y \setminus \{x\}]$). La scelta di Y implica $n > 0$. Allora $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$, dove, per ogni i, $f_i \in R[Y \setminus \{x\}]$ e $f_n \neq 0$. Osserviamo che ogni $h \in \mathrm{Ann}_{R[Y\setminus\{x\}]}(f_n)$ annulla f, infatti $hf \in A$ ed il grado di hf rispetto a x è minore di n, quindi, per la scelta di f, $hf = 0_R$.

Sia $0_R \neq s \in S$. Scriviamo s come polinomio a coefficienti in $R[Y]$ nell'insieme di indeterminate $X \setminus Y$: $s = \sum_{i \in I} s_i \sigma_i$ per un opportuno insieme finito $I = I_s \neq \varnothing$, dove, per ogni $i, j \in I$, $0_R \neq s_i \in R[Y]$, $\sigma_i \in \mathrm{Mon}(X \setminus Y)$ e $\sigma_i \neq \sigma_j$ se $i \neq j$. Da $sf = 0_R$ segue $s_i f = 0_R$ per ogni $i \in I$. Per ciascun tale i, scritto $s_i = \sum_{j=0}^{m_i} h_{ij} x^j$ come polinomio nell'indeterminata x (quindi $h_{ij} \in R[Y \setminus \{x\}]$) per ogni i e j) si ha allora $h_{i,m_i} f_n = 0_R$ e quindi, per un'osservazione fatta sopra, $h_{i,m_i} f = 0_R$. Allora anche $s_i - h_{i,m_i} x^{m_i}$ annulla f, quindi $h_{i,m_i-1} f_n = 0_R$ e di conseguenza $h_{i,m_i-1} f = 0_R$. Iterando il ragionamento arriviamo a concludere che f e f_n annullano ciascuno dei coefficienti h_{ij} di s_i. Ciò vale per ogni scelta di $s \in S$ e di $i \in I_s$. Ora, l'ideale generato da tutti gli elementi h_{ij} ottenuti come appena descritto al variare di $s \in S$ contiene evidentemente S, quindi $f_n \in A$. La minimalità di n comporta allora $n = 0$, vale a dire: $f \in R[Y \setminus \{x\}]$, ma questo contraddice la scelta di Y. È così provato che Y è l'insieme vuoto, e con ciò l'asserto. □

Esercizi.

5.C.1. Trovare, nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$, polinomi invertibili di grado arbitrariamente alto.

5.4 Serie formali di potenze

Sia R un anello commutativo unitario. L'insieme $R^{\mathbb{N}}$ delle succesioni di elementi di R indiciate in $\mathbb{N}$ si può dotare di due operazioni binarie, l'addizione puntuale e la moltiplicazione di convoluzione, definite da: per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $ab = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. Si verifica (chi legge è invitato a farlo) che con queste operazioni $R^{\mathbb{N}}$ risulta strutturato come anello commutativo unitario, che l'applicazione μ che a ogni $a \in R$ associa la successione che manda 0 in a ed ogni intero positivo in 0_R è un monomorfismo di anelli unitari (dunque, 0_R^μ e 1_R^μ sono lo zero e l'unità di questo anello). Inoltre, indicata con x la successione che associa 1_R a 1 e 0 ad ogni altro numero naturale, si verifica che il sottoanello generato da $\operatorname{im}\mu \cup \{x\}$ è costituito dalle successioni definitivamente nulle (cioè definitivamente costanti 0_R) ed è, a meno dell'identificazione di R con $\operatorname{im}\mu$ via μ, un anello di polinomi su R nell'indeterminata x. Quest'anello costruito su $R^{\mathbb{N}}$ si chiama *anello delle serie formali di potenze* su R e si indica abitualmente con $R[[x]]$; per quanto detto, a meno di identificazioni che d'ora in avanti assumiamo, $R[[x]]$ ha l'anello di polinomi $R[x]$ come sottoanello unitario. Come è ragionevole fare, si usa chiamare *serie formali di potenze* (o semplicemente serie di potenze, o serie formali, o serie) i suoi elementi, che vengono rappresentati con il corripondente formalismo, indicando ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R[[x]]$ come $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. Questa notazione è compatibile con quella abituale per i polinomi, a meno di convenire (come si fa) di scrivere le successioni definitivamente nulle (cioè i polinomi) come somma di un numero finito di termini, omettendo termini nulli.

Estendendo la terminologia relativa ai polinomi, per ogni $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in R[[x]]$ chiamiamo coefficienti di a gli elementi a_n e, tra questi, chiamiamo a_0 il termine noto di a. Evidentemente l'applicazione che ad ogni elemento di $R[[x]]$ associa il suo termine noto, con codominio R, è un omomorfismo suriettivo di anelli unitari; il suo nucleo è l'ideale generato da x. Di conseguenza:

Lemma 5.13. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora $R[[x]]/(x) \simeq R$.*

Proposizione 5.14. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora:*
(i) *$R[[x]]$ è un dominio di integrità se e solo se R lo è;*
(ii) *$\mathcal{U}(R[[x]])$ è costituito dalle serie di potenze con termine noto invertibile in R;*
(iii) *$\operatorname{Jac}(R[[x]])$ è costituito dalle serie di potenze con termine noto in $\operatorname{Jac}(R)$.*

Dimostrazione. Sia R un dominio di integrità e siano f e g elementi non nulli in $R[[x]]$. Esistono $n, m \in \mathbb{N}$, $f_1, g_1 \in R[[x]]$ ed elementi non nulli $a, b \in R$ tali che $f = x^n(a + xf_1)$ e $g = x^m(b + xg_1)$. Allora fg ha $ab \neq 0_R$ come coefficiente relativo a x^{n+m}, quindi $fg \neq 0_R$. Questo dimostra l'implicazione non ovvia in (i).

Occupiamoci di (ii) e di (iii). Sia $a \in \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in R[[x]]$.[4] Ovviamente $a \in \mathcal{U}(R[[x]])$ se e solo se esiste $b = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n \in R[[x]]$ tale che $ab = 1_R$, cioè $a_0 b_0 = 1_R$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0_R. \tag{E_n}$$

La prima equazione ci dice che se $a \in \mathcal{U}(R[[x]])$, allora $a_0 \in \mathcal{U}(R)$. Viceversa, supponiamo a_0 invertibile in R. Sia $b_0 = a_0^{-1}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ possiamo riscrivere (E_n) come $b_n = -b_0 \sum_{i=0}^{n-i} a_i b_{n-i}$;

[4] conveniamo che, salvo diversa indicazione, scrivendo una serie formale in questo modo sottintendiamo che gli a_n siano i suoi coefficienti, cioè che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in R$.

possiamo quindi usare queste equazioni per definire ricorsivamente una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di R in modo che tutte le (E_n) siano soddisfatte. Fatto questo, otteniamo che $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ è inverso di a in $R[[x]]$, dunque $a \in \mathcal{U}(R[[x]])$. È così provata la (ii). Proviamo infine la (iii). Dalla proposizione 3.18 e da quanto appena dimostrato sappiamo che $a \in \operatorname{Jac}(R[[x]])$ se e solo se, per ogni $f \in R[[x]]$ il termine noto di $1_R + af$ è invertibile in R. Questo, evidentemente, equivale a richiedere $1 + a_0 r \in \mathcal{U}(R)$ per ogni $r \in R$, vale a dire: $a_0 \in \operatorname{Jac}(R)$. □

Corollario 5.15. *Sia R un anello commutativo unitario locale. Allora $R[[x]]$ è un anello locale.*

Dimostrazione. Sia $M = \operatorname{Jac}(R)$ l'ideale massimale di R. Allora, $M_1 := M + xR[[x]] \lhd R[[x]]$ ed ogni elemento di $R[[x]] \setminus M_1$ è invertibile per la proposizione 5.14, quindi il corollario 3.22 porta a concludere che M_1 è l'unico ideale massimale di $R[[x]]$. □

In particolare, *se R è un campo, $R[[x]]$ è un anello locale.*

Rispetto al caso degli anelli di polinomi, le informazioni note su elementi nilpotenti e divisori dello zero in anelli di serie formali di potenze sono molto più frammentarie. Ad esempio, solo per alcune classi di anelli commutativi unitari sono pienamente descritti gli elementi nilpotenti (alcune informazioni sono tra gli esercizi che seguono) e, in contrasto con la proposizione 5.12, esistono serie di potenze che sono divisori dello zero ma hanno alcuni coefficienti invertibili. È stato comunque dimostrato (Fields, 1971) che per serie di potenze su anelli commutativi noetheriani valgono risultati analoghi a quelli che abbiamo visto valere per i polinomi: *se R è un anello commutativo unitario noetheriano e $a \in R[[x]]$, allora a è nilpotente se e solo se ogni suo coefficiente è nilpotente; inoltre a è un divisore delo zero in $R[[x]]$ se e solo se a è annullato da un elemento non nullo di R.*

Esercizi.

5.D.1. La dimostrazione della prima parte della proposizione 5.14 illustra il fatto che spesso, lavorando su serie formali di potenze, si può utilizzare il primo coefficiente non nullo di una serie non nulla in modo analogo a come, ragionando su polinomi ad una indeterminata, si utilizza il coefficiente direttore.

5.D.2. Determinare, in $\mathbb{Z}[[x]]$, l'inverso del polinomio $1 + x^2$.

5.D.3. Verificare che per ogni anello commutativo unitario R si ha $R[[x]]/\operatorname{Jac}(R[[x]]) \simeq R/\operatorname{Jac}(R)$. Quest'affermazione generalizza il corollario 5.15.

5.D.4. Verificare che, se K è un campo, ogni elemento di $K[[x]]$ si scrive, in modo unico come $x^n u$ per opportuni $n \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{U}(K[[x]])$. Segue immediatamente da ciò che $K[[x]]$ è un anello fattoriale con una sola classe di associazione di elementi irriducibili. Dedurne che $K[[x]]$ è euclideo.

5.D.5. La notazione e la terminologia usata per le serie formali di potenze potrebbe far pensare ad una nozione di convergenza e quindi ad una topologia che stia dietro la loro definizione. In effetti è possibile assumere questo punto di vista. Sia infatti R un anello commutativo unitario, e siano $a, b \in R[[x]]$. Si definisce (non è difficile verificarlo) una metrica su $R[[x]]$ ponendo la distanza tra due serie formali a e b uguale a 0 se $a = b$ ed a 2^{-n} se $a \neq b$ e n è il massimo numero naturale tale che x^n divida $a - b$. Nello spazio metrico così definito, ciascun $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ risulta essere il limite della successione dei polinomi $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$, che potremo chiamare "somme parziali" di a, e $R[[x]]$ è il completamento del suo sottospazio $R[x]$.

Si può anche adottare questo punto di vista per definire $R[[x]]$ (dopo aver introdotto una nozione di anello topologico): introdurre nell'anello $R[x]$ la metrica descritta sopra poi usare questa per definire $R[[x]]$ come completamento (come spazio metrico) dell'anello $R[x]$ prolungando a quest'ultimo le operazioni di $R[x]$.

5.D.6. Sia R un anello commutativo unitario. Provare che se a è un elemento nipotente di $R[[x]]$, tutti i coefficienti di a sono elementi nilpotenti di R.

Una possibile dimostrazione parte dal fatto che il termine noto di a è certamente nilpotente e procede per induzione per dimostrare lo stesso per tutti gli altri coefficienti, utilizzando il fatto che x è cancellabile in $R[[x]]$.

5.D.7. Si può mostrare che risultato dell'esercizio precedente non si inverte, procedendo ad esempio come segue.

Sia $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri naturali tale che $i_{n+1} > ni_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che R sia un anello commutativo unitario e che, in R, esista per ogni $n \in \mathbb{N}$ un elemento nilpotente a_n tale che $a_n^n \neq 0_R$. Verificare che la serie formale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^{i_n} \in R[[x]]$, pur avendo tutti i coefficienti nilpotenti, non è nilpotente. Costruire poi in modo esplicito un anello ed una successione di suoi elementi con le proprietà appena descritte.

5.D.8. È possibile costruire esempi più significativi di quello all'esercizio precedente, determinando, su un anello commutativo unitario R, una serie formale di potenze non nilpotente $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ tale che $a_n^2 = 0_R$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia infatti $R[X]$ un anello di polinomi a coefficienti in un anello commutativo unitario A di caratteristica 0 su un insieme numerabile X di indeterminate, scritto come $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dove, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. Sia $A = R[X]/H$, dove $H = (x_i^2 \mid i \in \mathbb{N}) \lhd R[X]$; poniamo anche $a_i = x_i + H$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora la serie $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i \in A[[x]]$ ha tutti i coefficienti a quadrato nullo ($a_i^2 = 0_A$ per ogni $i \in \mathbb{N}$), ma non è nilpotente. Per riconoscerlo, si verifichi che, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, il coefficiente $\binom{k}{2}$-esimo di f^k è $k!a_0a_1\cdots a_{k-1} \neq 0_A$.

6 Condizioni di catena per moduli e anelli

Nella teoria dei moduli e degli anelli hanno grande importanza due condizioni finitarie definite dall'imposizione di condizioni di catena (vedi sezione 14.1) all'insieme dei sotto(pre)moduli di un (pre)modulo o degli ideali di un anello.

6.1 Definizioni e prime proprietà

Per ogni (pre)modulo M un su un anello commutativo unitario R, indichiamo con $\mathcal{L}_R(M)$ l'insieme degli R-sotto(pre)moduli di M ordinato per inclusione. Si dice che M è *artiniano* se e solo se $\mathcal{L}_R(M)$ verifica la condizione minimale; M è invece *noetheriano* se e solo se $\mathcal{L}_R(M)$ verifica la condizione massimale. Questi nomi ricordano due matematici che hanno dato un enorme impulso allo sviluppo dell'algebra nella prima metà del '900: Emil Artin (1898–1962) ed Emmy Noether (1882–1935). Qualche volta useremo espressioni come R-artiniano e R-noetheriano per evidenziare il ruolo dell'anello degli scalari R, cioè come abbreviazioni di 'artiniano/noetheriano come R-(pre)modulo'. Ad esempio, rispetto alle consuete operazioni, $\mathbb{Q}$, riguardato come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ è un modulo artiniano, ma il gruppo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$, cioè $\mathbb{Q}$, riguardato come modulo su $\mathbb{Z}$, non lo è; possiamo dire allora che $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}$-artiniano ma non $\mathbb{Z}$-artiniano.

Dovrebbe risultare chiaro che tutti i (pre)moduli finiti sono sia artiniani che noetheriani; in questo senso sia la proprietà di essere artiniano che quella di essere noetheriano sono, come si dice, condizioni finitarie. Altrettanto chiaramente, ogni (pre)modulo che sia isomorfo ad un (pre)modulo artiniano o noetheriano ha la stessa proprietà.

Un anello commutativo R è, invece, artiniano (risp. noetheriano) se e solo se l'R-(pre)modulo R_R ha la corrispondente proprietà, cioè se e solo se l'insieme $\mathfrak{I}(R)$ degli ideali di R, ordinato ancora per inclusione, verifica la condizione minimale (risp. massimale).

Nel caso dei (pre)moduli le condizioni di essere artiniano o noetheriano sono chiuse per il passaggio a sotto(pre)moduli, quozienti ed estensioni,[1] come vediamo nel prossimo lemma. Il significato preciso della parola 'estensione' verrà chiarito più avanti; diciamo per ora, in modo un po' informale, che un (pre)modulo M è estensione di un (pre)modulo A mediante un (pre)modulo B se ha un sotto(pre)modulo N isomorfo ad A tale che M/N sia isomorfo a B.

Lemma 6.1. *Sia M un (pre)modulo sull'anello commutativo R, e sia $N \leq_R M$. Allora M è artiniano (risp. noetheriano), se e solo se sia N che M/N sono artiniani (risp. noetheriani).*

Dimostrazione. $\mathcal{L}_R(N)$ è un sottoinsieme di $\mathcal{L}_R(M)$; per il teorema di corrispondenza (teorema 1.12) $\mathcal{L}_R(M/N)$ è isomorfo, come insieme ordinato, al sottoinsieme $\{H \leq_R M \mid N \subseteq H\}$ di $\mathcal{L}_R(M)$. Dunque sia N che M/N sono artiniani (risp. noetheriani) se lo è M.

Viceversa, supponiamo che N e M/N siano artiniani. Sia $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di sotto(pre)moduli di M. Allora $(N \cap H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di sotto(pre)moduli di N e $(H_n + N/N)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di sotto(pre)moduli di M/N; quindi queste

[1] se $\mathcal{P}$ è un proprietà relativa a (pre)moduli, si dice che $\mathcal{P}$ è chiusa per sotto(pre)moduli (o che si eredita a sotto(pre)moduli) se tutti i sotto(pre)moduli di moduli che verificano $\mathcal{P}$ verificano anch'essi $\mathcal{P}$; si dice che $\mathcal{P}$ è chiusa per (o si eredita a) quozienti se tutti i quozienti di moduli che verificano $\mathcal{P}$ verificano anch'essi $\mathcal{P}$; si dice poi che $\mathcal{P}$ è chiusa per estensioni se ogni (pre)modulo M che abbia un sotto(pre)modulo N tale che N e M/N verifichino entrambi $\mathcal{P}$ verifica anch'esso $\mathcal{P}$.

due ultime successioni sono definitivamente costanti ed esiste così $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $t \in \mathbb{N}$, si abbia $N \cap H_{n+t} = N \cap H_n$ e $H_{n+t} + N = H_n + N$, e quindi $H_{n+t} = H_n$ per il corollario 1.9 e perché $H_{n+t} \subseteq H_n$. Dunque, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante. Abbiamo così provato che M è artiniano.

La dimostrazione per il caso dei moduli noetheriani è analoga. □

Corollario 6.2. *Siano B e C sotto(pre)moduli di un (pre)modulo A. Se A/B e A/C sono entrambi artiniani (risp. noetheriani), allora $A/(B \cap C)$ è artiniano (risp. noetheriano).*

Dimostrazione. Il secondo teorema di isomorfismo fornisce $B/(B \cap C) \simeq (B + C)/C$ e vediamo quindi, usando anche il terzo teorema di isomorfismo, che $A/(B \cap C)$ è una estensione di $(B + C)/C$, che è un sotto(pre)modulo di A/C, mediante A/B. L'asserto segue allora dal lemma precedente. □

Corollario 6.3. *Un (pre)modulo che sia la somma di un numero finito di suoi sotto(pre)moduli artiniani (risp. noetheriani) è esso stesso artiniano (risp. noetheriano).*

Dimostrazione. Basta ovviamente provare l'enunciato nel caso di un (pre)modulo che sia la somma di due sotto(pre)moduli. Poniamo $M = A + B$, dove A e B sono entrambi artiniani o entrambi noetheriani. Dal secondo teorema di omomorfismo si ha $M/A \simeq B/(A \cap B)$, quindi M è estensione di A mediante il quoziente $B/(A \cap B)$ di B e l'asserto segue ora direttamente dal lemma 6.1. □

I (pre)moduli finiti sono ovviamente artiniani e noetheriani. Questi (pre)moduli hanno una semplice caratterizzazione. Una *serie finita* di sotto(pre)moduli di un (pre)modulo M è una sequenza finita $(N_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ di sotto(pre)moduli di M tale che $N_0 = 0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n = M$. I (pre)moduli N_{i+i}/N_i si chiamano *fattori* della serie.

Proposizione 6.4. *Sia M un (pre)modulo su un anello commutativo R. Allora M è artiniano e noetheriano se e solo se ha una serie finita i cui fattori sono (pre)moduli semplici.*

Dimostrazione. I (pre)moduli semplici sono chiaramente sia artiniani che noetheriani, quindi se M ha una serie finita a fattori semplici, allora il lemma 6.1 mostra che M è sia artiniano che noetheriano. Viceversa, supponiamo M artiniano e noetheriano. Poiché M è artiniano, per ogni $N < M$ esiste un sotto(pre)modulo N' di M che sia minimale rispetto alla proprietà di contenere propriamente N. Dovrebbe essere chiaro che se N' ha questa proprietà il (pre)modulo N'/N è semplice. Si definisce ricorsivamente una successione crescente $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di sotto(pre)moduli di M ponendo $N_0 = 0$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}$, ponendo $N_{i+1} = M$ se $N_i = M$ e, su $N_i < M$, scegliendo come N_{i+1} un sotto(pre)modulo di M che sia minimale rispetto alla proprietà di contenere propriamente N_i (sicché N_{i+1}/N_i è semplice). Dal momento che M è noetheriano, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $N_n = N_{n+1}$; la definizione della successione mostra che, di conseguenza, $N_n = M$. La serie $(N_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ ha la proprietà richiesta dall'enunciato. □

Benché l'artinianità e la noetherianità di un anello commutativo R sono definite in termini dell'analoga proprietà per il (pre)modulo R_R, non è vero che valgano per gli anelli le stesse proprietà di chiusura che per i (pre)moduli artiniani e noetheriani. Ad esempio, ogni campo, avendo esattamente due ideali, è, come anello, sia artiniano che noetheriano, ma i suoi sottoanelli, anche unitari, possono non avere queste proprietà, come accade per $\mathbb{Z}$, che è un sottoanello unitario non artiniano del campo $\mathbb{Q}$, o, se R è un dominio di integrità non noetheriano,[2] per R stesso, che è un sottoanello unitario non noetheriano del suo campo dei quozienti. Si possono anche ottenere (vedi l'esempio 6.A.6) esempi in cui un anello commutativo unitario R artiniano e

[2] per un esempio esplicito si vedano ad esempio l'esempio 6.A.5 e la proposizione 5.1.

noetheriano ha un ideale H che non ha, come anello, nessuna delle due proprietà, pur dovendo essere, per il lemma 6.1, artiniano e noetheriano come R-modulo.

Si osservi in generale che, per un ideale H di un anello commutativo R, la proprietà di essere artiniano o noetheriano come anello (vale a dire: H-artiniano o H-noetheriano, come modulo) è più forte che quella di essere artiniano o noetheriano come R-(pre)modulo.

Vale comunque, con dimostrazione ovvia utilizzando il lemma 6.1, il corollario 6.2 e l'esercizio 6.A.1:

Lemma 6.5. *Siano R un anello commutativo e $H, K \lhd R$. Allora:*
(i) *se R è artiniano (risp. noetheriano), anche R/H è artiniano (risp, noetheriano);*
(ii) *se R/H, come anello, e H, come R-premodulo, sono artiniani (risp. noetheriani), allora R è artiniano (risp. noetheriano);*
(iii) *se $R = H + B$, dove B è un sottoanello di R, e sia B, come anello, che H, come R-premodulo, sono artiniani (risp. noetheriani), allora R è artiniano (risp. noetheriano);*
(iv) *se R/H e R/K sono artiniani (risp. noetheriani) anche $R/(H \cap K)$ è artiniano (risp. noetheriano).*

Abbiamo visto che, in alcuni casi, cambiare l'anello degli scalari di un (pre)modulo M da un anello commutativo R ad un anello commutativo S non altera l'insieme dei sotto(pre)moduli di M. In tali casi, ovviamente, M è R-artiniano (risp. R-noetheriano) se e solo se è S-artiniano (risp. S-noetheriano). Ad esempio, ricaviamo dal lemma 1.16 e dalla proposizione 1.34:

Lemma 6.6. *Siano R un anello commutativo e M un R-(pre)modulo.*
(i) *Se $\mathrm{Ann}_R(M) \supseteq H \lhd R$ e $M_{R/H}$ è M riguardato come (R/H)-(pre)modulo via azione mod H, allora M è artiniano (risp. noetheriano) se e solo se lo è $M_{R/H}$.*
(ii) *Se R_1 è l'anello accresciuto definito da R, e M_{R_1} è M riguardato come modulo su R_1, allora M_{R_1} è artiniano (risp. noetheriano) se e solo se lo è M.*

È poi conseguenza immediata del lemma 6.5(ii) che l'anello accresciuto definito da un anello noetheriano è anch'esso noetheriano mentre, poiché $\mathbb{Z}$ non è artiniano, l'anello accresciuto definito da un anello non è mai artiniano.

Alcuni esempi Come già osservato, i (pre)moduli (e quindi gli anelli commutativi) finiti sono sempre sia artiniani che noetheriani. Il viceversa non vale, abbiamo infatti osservato che i campi sono anelli artiniani e noetheriani.

— Generalizzando questa osservazione, se K è un campo e V è un K-modulo, cioè un K-spazio vettoriale, sono equivalenti per V le proprietà di essere artiniano, noetheriano, di dimensione finita. Infatti, se $\dim_K(V)$ è finita, V è somma diretta di un numero finito di copie di K_K, quindi è artiniano e noetheriano per il corollario 6.3. Se invece $\dim_K(V)$ è infinita, allora V è somma dirette di infinite copie di K_K, ed allora V non è né artiniano né noetheriano, come spiegato dalla prossima osservazione.
— Sia M un (pre)modulo somma diretta di una famiglia infinita di (pre)moduli non nulli. Allora M non è né artiniano né noetheriano. Infatti, posto $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, dove I è infinito e $M_i \neq 0$ per ogni $i \in I$, se $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione iniettiva a valori in I, e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si pone $A_n = \sum_{n\leq j\in\mathbb{N}} M_{i_j}$ e $B_n = \sum_{n>j\in\mathbb{N}} M_{i_j}$, allora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono, rispettivamente, una successione strettamente crescente ed una successione strettamente decrescente di sotto(pre)moduli di M.
Di conseguenza, tenendo conto del lemma 6.1, lo stesso vale per prodotti diretti di infiniti (pre)moduli non nulli, ed anche per anelli commutativi che siano somma o prodotto diretto di infiniti anelli non nulli.

— $\mathbb{Z}$, visto come gruppo (cioè come $\mathbb{Z}$-modulo), o anche come anello è noetheriano ma, come già detto, non artiniano. Infatti gli ideali dell'anello $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli i suoi sottogruppi additivi, e questi, escluso quello nullo, hanno indice finito in $\mathbb{Z}$. Se $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di ideali di $\mathbb{Z}$, $H_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ oppure esiste un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $H_n \neq 0$, nel qual caso $\mathbb{Z}/H_n$ è finito e quindi $\{H_m \mid n \leq m \in \mathbb{N}\}$ è finito; in entrambi i casi la successione $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante. Quindi $\mathbb{Z}$ è noetheriano (come gruppo e come anello). Invece, per ogni numero primo positivo p, la successione di ideali $(p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente; quindi $\mathbb{Z}$ non è artiniano.

— Fissato un numero primo positivo p, sia P un p-gruppo di Prüfer (cioè un gruppo isomorfo al gruppo $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{Q}_p = \{mp^n \mid m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Q}$). Come è noto, ogni sottogruppo proprio di P è un p-gruppo ciclico finito e l'insieme dei sottogruppi di P è totalmente ordinato per inclusione. Da ciò segue che, riguardato come $\mathbb{Z}$-modulo, P è artiniano: basta ragionare in modo duale rispetto a quanto fatto per $\mathbb{Z}$. D'altra parte P è infinito ed è l'unione insiemistica dei suoi sottogruppi propri, quindi non ha sottogruppi massimali (dunque: l'insieme dei sottogruppi propri di P non ha elementi massimali). Di conseguenza P, come $\mathbb{Z}$-modulo non è noetheriano.
Se muniamo P della moltiplicazione costante 0_P rendiamo P un anello commutativo artiniano ma non noetheriano. Notiamo che P non è unitario; dimostreremo in un capitolo successivo (nel teorema 8.6) che gli anelli (commutativi) unitari artiniani sono tutti noetheriani.

Generalizzando quanto osservato sopra a proposito degli spazi vettoriali verifichiamo ora che se un modulo è annullato da un prodotto tra un numero finito di ideali, per esso sono equivalenti le proprietà di essere artiniano o noetheriano.

Lemma 6.7. *Sia M un modulo sull'anello commutativo unitario R e supponiamo che esistano $n \in \mathbb{N}^+$ e ideali massimali $H_1, H_2, \ldots, H_n$ di R tali che $H_1H_2\cdots H_n \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. Allora M è artiniano se e solo se è noetheriano.*

Dimostrazione. Poniamo $M_0 = M$ e, per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $M_i = MH_1H_2\cdots H_i$. Abbiamo così una catena finita di sottomoduli:

$$0 = M_n \subseteq M_{n-1} \subseteq M_{n-2} \subseteq \cdots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M.$$

Applicando ripetutamente il lemma 6.1 vediamo che M è artiniano (risp. noetheriano) se e solo se lo è ciascuno dei quozienti $F_i := M_{i-1}/M_i$ al variare di $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Inoltre, per ogni i abbiamo $M_i = M_{i-1}H_i$, dunque $H_i \subseteq \mathrm{Ann}_R(F_i)$. Possiamo così riguardare F_i anche come R/H_i-modulo. Per il lemma 6.6, F_i è R/H_i-artiniano (risp. R/H_i-noetheriano) se e solo se è R-artiniano (risp. R-noetheriano). Ma R/H_i è un campo, quindi, per le osservazioni fatte sopra a proposito degli spazi vettoriali, F_i è R/H_i-artiniano se e solo se è R/H_i-noetheriano. In definitiva, otteniamo che ciascuno degli F_i è R-artiniano se e solo se è R-noetheriano. Avevamo però anche detto che M verifica una delle due condizioni di catena che consideriamo se e solo se ciascuno dei moduli F_i la verifica; concludiamo, come richiesto, che M è artiniano se e solo se è noetheriano. □

Esercizi.

6.A.1. Se R è un anello commutativo e $H \lhd R$, allora R/H è artiniano (risp. noetheriano) come anello se e solo se lo è come R-premodulo.

6.A.2. Le dimostrazione del corollario 6.3 mostra che ogni proprietà di (pre)moduli che sia invariante per isomorfismi e sia chiusa per quozienti ed estensioni è, nel senso ovvio, chiusa per somme finite.

6.A.3. Si verifichi che per (pre)moduli su un fissato anello commutativo R la proprietà di essere finitamente generato è chiusa per estensioni (la chiusura per quozienti è stata già osservata nell'esercizio 1.G.1), ma non, in generale, per sotto(pre)moduli (come seguirà dalla proposizione 6.8, questo accade se e solo se R è noetheriano).

6.A.4. Siano R un anello commutativo e M un R-(pre)modulo. Dimostrare che se M ha un sotto(pre)modulo proprio $M_1 \simeq_R M$, allora M non è artiniano. (Suggerimento: essendo $M_1 \simeq M$, anche M_1 avrà un sotto(pre)modulo proprio isomorfo a sé stesso ...). Dimostrare per questa via che $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ non è artiniano.

Dualmente, dimostrare che se M ha un sotto(pre)modulo $M_1 \neq 0$ tale che $M \simeq_R M/M_1$, allora M non è noetheriano.

Le negazioni delle proprietà qui usate come ipotesi hanno un nome: un (pre)modulo si dice hopfiano se e solo se non ha quozienti propri (cioè quozienti modulo un sotto(pre)modulo non nullo) isomorfi a sé stesso; cohopfiano se non ha sotto(pre)moduli propri isomorfi a sé stesso. L'esercizio potrebbe quindi essere riformulato così: i (pre)moduli noetheriani sono hopfiani, quelli artiniani sono cohopfiani.

Enunciare e verificare le analoghe proprietà per gli anelli.

6.A.5. Sia $R[X]$ un anello di polinomi su un insieme infinito X di indeterminate, a coefficienti su un arbitario anello commutativo unitario $R \neq 0$. Allora $R[X]$ non è noetheriano. Lo si può vedere come conseguenza dell'esercizio precedente; infatti sappiamo dal lemma 4.22 che, scelto comunque $x \in X$, $R[X]/(x) \simeq R[X \smallsetminus \{x\}]$, ma, essendo $|X \smallsetminus \{x\}| = |X|$, $\simeq R[X \smallsetminus \{x\}] \simeq R[X]$, quindi $R[X]$ non è hopfiano come anello.

6.A.6. Siano K un campo e $R = K[x]/(x^2)$, dove $K[x]$ è un anello di polinomi ad una indeterminata, x, su K. Allora R è artiniano e noetheriano; il suo ideale $H = (x)/(x^2)$, come anello ha questa struttura: il suo gruppo additivo è isomorfo a quello di K, la sua moltiplicazione è costante nulla. Se, ad esempio, $K = \mathbb{Q}$ (basta in effetti che K sia infinito) allora H, come anello, non è né artiniano né noetheriano.

6.A.7. Non si può costruire un esempio come quello precedente in cui H, come anello sia unitario. Infatti, se R è un anello commutativo noetheriano e H è un suo ideale che, come anello, è unitario, allora H è un sommando diretto di R, per l'esercizio 4.C.3, quindi è un anello noetheriano.

6.2 Caratterizzazioni di moduli e anelli noetheriani

Sappiamo dal lemma 1.17 e dal corollario 1.18 del rapporto tra la proprietà di essere, per un (pre)modulo, finitamente generato da una parte e il comportamento di catene di sotto(pre)moduli e l'esistenza di sotto(pre)moduli massimali dall'altra. Questo rapporto si manifesta in modo evidente in una notissima caratterizzazione elementare della noetherianità:

Proposizione 6.8. *Per un (pre)modulo M sono equivalenti le affermazioni:*

(i) *M è noetheriano;*
(ii) *l'insieme dei sotto(pre)moduli finitamente generati di M, ordinato per inclusione, verifica la condizione massimale;*
(iii) *ogni sotto(pre)modulo di M è finitamente generato.*

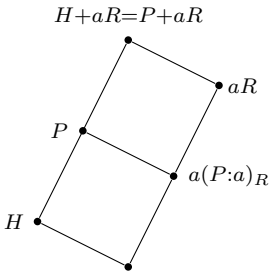
Dimostrazione. Ovviamente (i) implica (ii). Supponiamo che valga (ii) e sia $N \leq_R M$. Se N non è finitamente generato, possiamo definire ricorsivamente una successione strettamente crescente di sotto(pre)moduli finitamente generati di N in questo modo: poniamo $A_0 = 0$ e, supposto definito, per un qualche $n \in \mathbb{N}$, il sotto(pre)modulo finitamente generato A_n di N, dal momento che N

non è finitamente generato si ha $A_n \subset N$, quindi possiamo scegliere $a \in N \smallsetminus A_n$ e definire A_{n+1} come il sotto(pre)modulo generato da $A_n \cup \{a\}$, che è ancora un sotto(pre)modulo finitamente generato A_n di N e contiene propriamente A_n. L'esistenza della successione così costruita falsifica la (ii); concludiamo che N deve essere finitamente generato. Dunque (ii) implica (iii). Infine, se vale (*iii*), il lemma 1.17 mostra immediatamente che ogni catena non vuota di sotto(pre)moduli di M ha massimo, quindi M è noetheriano. □

La proposizione 6.8 fornisce immediatamente anche una caratterizzazione degli anelli commutativi noetheriani: *un anello commutativo è noetheriano se e solo se ogni suo ideale è finitamente generato*, inoltre è sufficiente per questo richiedere la condizione massimale sugli ideali finitamente generati. Nel caso degli anelli commutativi unitari basta che siano finitamente generati gli ideali primi perché lo siano anche tutti gli altri. È un primo caso in cui vediamo quanto fortemente la struttura di un anello commutativo unitario sia influenzata dai suoi ideali primi. La dimostrazione consiste essenzialmente in questo lemma:

Lemma 6.9. *Sia R un anello commutativo unitario non noetheriano. Allora l'insieme degli ideali non finitamente generati di R ha elementi massimali, e questi sono tutti ideali primi.*

Dimostrazione. L'insieme degli ideali non finitamente generati di R non è vuoto, per la proposizione 6.8, ed è induttivo per il corollario 1.20, quindi ha elementi massimali. Sia P uno di essi; poiché R è unitario (e quindi finitamente generato come ideale), $P \neq R$. Per ogni $a \in R \smallsetminus P$, l'ideale $P+aR$ è finitamente generato. Da ciò segue $P + aR = H + aR$ per un qualche ideale finitamente generato H di R contenuto in P. Infatti, esistono $n \in \mathbb{N}$ ed elementi $h_1, h_2, \dots, h_n \in P$ e $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ tali che $P + aR$ sia generato da $\{h_1 + ar_1, h_2 + ar_2, \dots, h_n + ar_n\}$; posto $H = \sum_{i=1}^{n} h_i R$ si ha ovviamente $P + aR \subseteq H + aR \subseteq P + aR$, quindi H ha le proprietà richieste. Ora, per la legge di Dedekind (lemma 1.8) e per il lemma 3.4, $P = H + (aR \cap P) = H + a(P : a)_R$. Supponiamo $P \neq (P : a)_R$, quindi $P \subset (P : a)_R$, allora $(P : a)_R$ è finitamente generato per la massimalità di P. Ma $a(P : a)_R$ è l'immagine di $(P : a)_R$ mediante l'omomorfismo (di R-moduli) $r \in R \mapsto ar \in R$, quindi è isomorfo ad un quoziente di $(P : a)_R$ ed è così finitamente generato. Ne segue che $P = H + a(P : a)_R$ è finitamente generato, una contraddizione. Dunque $(P : a)_R = P$. Concludiamo, grazie al lemma 3.5, che P è primo. □



Proposizione 6.10. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora R è noetheriano se e solo se ogni suo ideale primo è finitamente generato.*

Dimostrazione. Il lemma precedente mostra che se R non è noetheriano R ha un ideale primo non finitamente generato. □

Come molti dei risultati che mostrano l'influenza degli ideali primi per la struttura di un anello commutativo, anche quest'ultima proposizione richiede l'ipotesi che l'anello sia unitario (o, quanto meno, che R_R sia finitamnte generato; si veda l'esercizio 6.B.5). Infatti, se $(A, +)$ è un qualsiasi gruppo abeliano non finitamente generato, munito A della moltiplicazione costante nulla A si struttura come anello commutativo privo di ideali primi, ma l'insieme dei suoi ideali, che coincide con l'insieme $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(A)$ dei sottogruppi di A non è a condizione massimale (perché?).

È facile trovare esempi di (pre)moduli finitamente generati non noetheriani, ad esempio il modulo ciclico R_R se R è un anello commutativo unitario non noetheriano; ma per (pre)moduli su anelli noetheriani queste condizioni sono equivalenti.

Proposizione 6.11. *Sia M un (pre)modulo su un anello commutativo noetheriano R. Allora M è noetheriano se e solo se è finitamente generato.*

Dimostrazione. Se M è noetheriano allora M è finitamente generato, per la proposizione 6.8. Viceversa, assumiamo che M sia finitamente generato. Supponiamo che M sia un R-modulo. Allora M è isomorfo ad un quoziente di un R-modulo libero finitamente generato F, per la proposizione 4.20, ed F è somma diretta di un numero finito di copie di R_R, quindi è noetheriano per il corollario 6.3. Ne segue che anche M è noetheriano. Se invece M non è un modulo su R, comunque M è un modulo finitamente generato sull'anello accresciuto $R_1 = R \rtimes \mathbb{Z}$, che è noetheriano per il lemma 6.5(ii), quindi, per il caso precedente, M è noetheriano come R_1-modulo e dunque come R-premodulo per il lemma 6.6. □

6.3 Il teorema della base di Hilbert

Teorema 6.12 (Il teorema della base; D. Hilbert)**.** *Sia R un anello commutativo unitario noetheriano. Allora ogni anello di polinomi a coefficienti in R su un insieme finito di indeterminate è noetheriano.*

Dimostrazione. Basta provare l'asserto per un anello $R[x]$ di polinomi ad una indeterminata; il risultato segue poi da un semplice ragionamento per induzione sul numero di indeterminate. Sia dunque $H \lhd R[x]$; intendiamo dimostrare che H è finitamente generato.

Sia C l'insieme dei coefficienti direttori dei polinomi in H (ivi incluso 0_R, come coefficiente direttore di sé stesso). Verifichiamo che C è un ideale di R. Per ogni $c, d \in C$ e $r \in R$, esistono in H elementi h_c e h_d che abbiano, rispettivamente, c e d come coefficienti direttori ed γ e δ come gradi. Se $\gamma \geq \delta$, poniamo $h = h_c - x^{\gamma-\delta}h_d$, altrimenti poniamo $h = x^{\delta-\gamma}h_c - h_d$; si ha comunque $h \in H$ ed inoltre o $c - d = 0_R$ oppure $c - d$ è il coefficiente direttore di $h \in H$; in entrambi i casi $c - d \in H$. Allo stesso modo, o $cr = 0_R$ oppure cr è il coefficiente direttore di $h_c r \in H$, quindi $cr \in H$. Dunque, $C \lhd R$. Allora C è R-finitamente generato; possiamo porre $C = FR$ per un insieme finito F. Per ogni $c \in F$ sia h_c un elemento di H di cui c è il coefficiente direttore; poniamo $\lambda_c = \nu h_c$ e $\lambda = \max_{c\in F} \lambda_c$; siano poi $S = \{h_c \mid c \in F\}$ e $H_0 = SR[x]$, dunque $H_0 \subseteq H$. Proveremo: $H \subseteq A := H_0 + \{x^i \mid \lambda > i \in \mathbb{N}\}R$. A questo scopo, ragionando per assurdo, supponiamo che f sia un elemento di grado minimo n in $H \setminus A$; ovviamente $n \geq \lambda$. Il coefficiente direttore a di f appartiene a C, quindi $a = \sum_{c\in F} cr_c$ per opportuni elementi $r_c \in R$. Sia $h = \sum_{c\in F} x^{n-\lambda_c} h_c r_c$. Allora h è un elemento di H_0 con coefficiente relativo a x^n uguale a quello, a, di f. Dunque $f - h \in H \setminus A$ e $\nu(f - h) < n$, in contraddizione con la scelta di f.

Si ha dunque $H_0 \subseteq H \subseteq A$. Ora, A/H_0 è un R-modulo finitamente generato, quindi un R-modulo noetheriano per la proposizione 6.11, sicché il suo R-sottomodulo H/H_0 è finitamente generato. Ma questo implica, banalmente, che H/H_0 è finitamente generato come $R[x]$-modulo. Essendo anche H_0 finitamente generato, se ne deduce che H è $R[x]$-finitamente generato.[3] Grazie alla proposizione 6.8 la dimostrazione è ora completa. □

Corollario 6.13. *Siano R un anello commutativo unitario noetheriano e A una R-algebra unitaria finitamente generata. Allora A, come anello, è noetheriano.*

Dimostrazione. Per la proprietà universale degli anelli di polinomi, A è, come R-algebra e quindi come anello, isomorfo ad un quoziente di un anello di polinomi in R su un insieme finito di indeterminate, quindi è noetheriano. □

[3] Questo segue dell'esercizio 6.A.3, oppure, in alternativa, dal fatto che $H = H_0 + (A \cap H)$ e $A \cap H$ è finitamente generato come R-modulo.

L'ipotesi che A sia unitaria è qui essenziale (si veda l'esempio 6.B.1).

Anche per gli anelli di serie formali di potenze vale l'analogo del teorema della base:

Teorema 6.14. *Sia R un anello commutativo unitario noetheriano. Allora anche l'anello $R[[x]]$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Come mostra la proposizione 6.10, basterà provare che ogni ideale primo H di $R[[x]]$ è finitamente generato. Fissato $H \in \operatorname{Spec}(R[[x]])$, supponiamo innanzitutto $x \in H$. Dal momento che $R[[x]]/xR[[x]] \simeq R$ è noetheriano (lemma 5.13), il suo ideale $H/xR[[x]]$ è finitamente generato e quindi anche H è finitamente generato (se $H/xR[[x]]$ è generato da elementi $h_1+xR[[x]]$, $h_2+xR[[x]], \dots, h_n+xR[[x]]$, allora $H = (h_1, h_2, \dots, h_n, x)$). Possiamo dunque assumere $x \notin H$.

Indichiamo con $\varepsilon\colon R[[x]] \to R$ l'omomorfismo di anelli unitari che ad ogni serie associa il suo termine noto; sia poi C l'immagine di H mediante ε. Ovviamente C è un ideale di R, esiste dunque un sottoinsieme finito F di R tale che $C = FR$. Per ogni $c \in C$ si fissi un $g_c \in H$ di cui c sia il termine noto, vale a dire: $c = g_c^\varepsilon$. Proveremo che H è generato da $\{g_c \mid c \in F\}$. A questo scopo, sia $h \in H$. Allora $h^\varepsilon \in C$, quindi $h^\varepsilon = \sum_{c\in F} cr_{c,0}$ per opportuni elementi $r_{c,0}$ di R. Evidentemente, se $s_0 = \sum_{c\in F} g_c r_{c,0}$ si ha $h^\varepsilon = s_0^\varepsilon$, quindi $h - s_0 \in \ker\varepsilon = xR[[x]]$ (detto diversamente, h ed s_0 hanno lo stesso termine noto, quindi $h - s_0$ è multiplo di x). Esiste allora $h_1 \in R[[x]]$ tale che $h = s_0 + xh_1$. Ora, chiaramente $s_0 \in H$, quindi $xh_1 = h - s_0 \in H$; poiché H è primo e $x \notin H$ ne segue $h_1 \in H$. Possiamo allora ripetere il procedimento per h_1, mostrando così che esistono elementi $r_{c,1}$ di R, uno per ogni $c \in F$, ed $h_2 \in H$ tali che, ponendo $s_1 = \sum_{c\in F} g_c r_{c,1}$, si abbia $h_1 = s_1 + xh_2$, e quindi $h = s_0 + xs_1 + x^2h_2$. Procedendo in maniera analoga definiamo ricorsivamente $|F|$ successioni $(r_{c,n})_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di R, una per ciascun $c \in C$, ed una successione $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ di elementi di $R[[x]]$ con la proprietà che, ponendo $s_i = \sum_{c\in F} g_c r_{c,i}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, si abbia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $h = x^{n+1}h_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x^i s_i$, vale a dire:

$$h = \sum_{c\in F} \left(g_c \sum_{i=0}^{n} r_{c,i} x^i \right) + x^{n+1} h_{n+1}.$$

Per ogni $c \in F$ poniamo $r_c = \sum_{i\in\mathbb{N}} r_{c,i} x^i$. Quanto appena visto mostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la differenza $h - \sum_{c\in F} g_c r_c$ è divisibile per x^{n+1}; da ciò segue che questa differenza è 0_R, quindi $h = \sum_{c\in F} g_c r_c$ appartiene a $(g_c \mid c \in F)$. Pertanto $H = (g_c \mid c \in F)$ è finitamente generato, come si voleva dimostrare. □

Esercizi, osservazioni, esempi.

6.B.1. Sia $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \langle a_i \rangle$ un gruppo abeliano libero di base $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, dove $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. Si strutturi A come modulo sull'anello di polinomi ad una indeterminata $\mathbb{Z}[x]$ tramite l'omomorfismo di anelli unitari $\mathbb{Z}[x] \to \operatorname{End}(A, +)$ che ad x associa l'endomorfismo di A definito da $a_i \mapsto a_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Munito poi A del prodotto costante nullo, A diventa una $\mathbb{Z}[x]$-algebra non unitaria. Verificare che, come $\mathbb{Z}[x]$-algebra, A è generata da un elemento, ma, benché $\mathbb{Z}[x]$ sia noetheriano, A non è un anello noetheriano.

6.B.2. Tra questi anelli, quali sono noetheriani? E quali sono artiniani? $\mathbb{Z}_8[x]$; $\mathbb{Q}[x]/(x^{10})$; il sottoanello del campo complesso $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (questo è l'anello degli interi di Gauss); $\mathbb{Z}[X]/(x^2 \mid x \in X)$ per un insieme infinito X di indeterminate; $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$.

6.B.3. Sia K un campo e sia $K[X]$ l'anello dei polinomi su un insieme infinito di indeterminate. Individuare un ideale di $K[X]$ che sia massimale tra quelli non finitamente generati. Ripetere l'esercizio dopo aver sostituito $\mathbb{Z}$ a K.

6.B.4. Il teorema della base di Hilbert ha una importante applicazione geometrica. In sostanza: ogni sistema di equazioni polinomiali su un campo, in cui sia coinvolto solo un numero finito di indeterminate, ha lo stesso insieme di soluzioni di un sistema con un numero finito di equazioni.

Più esplicitamente: fissati un campo K, un intero positivo n ed un anello di polinomi $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ad n indeterminate su K, ogni parte S di R definisce, nello spazio vettoriale numerico K^n, l'insieme $V(S) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n \mid \forall (f \in S)(f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0_K)\}$ delle soluzioni comuni a tutte le equazioni $f = 0_K$ al variare di f in S; questo insieme è la cosiddetta varietà algebrica (o insieme algebrico; alcuni autori riservano l'espressione varietà algebrica ad insiemi che verificano un'ulteriore proprietà di irriducibilità) definito da S in K^n. È facile rendersi conto del fatto che $V(S) = V(H)$ se $H = SR$ è l'ideale generato da S in $R[X]$. Ora, per il teorema della base, H è finitamente generato; se F è un suo insieme finito di generatori si ha $V(S) = V(F)$, e questo giustifica la frase con cui abbiamo aperto questa osservazione. Un insieme F di polinomi tale che $V(S) = V(F)$ veniva (e certi contesti viene ancora) chiamato 'base' di $V(H)$ (o di H) e questo spiega il nome che ha ricevuto il teorema: ogni ideale di R, ovvero ogni varietà algebrica in K^n, ha una base finita.

A questo proposito, menzioniamo un altro teorema dovuto a David Hilbert che ha grande importanza in geometria algebrica, il teorema degli zeri (o *Nullstellensatz*): con le notazioni qui introdotte, nel caso in cui il campo K sia algebricamente chiuso, l'insieme degli $f \in R$ tali che ogni elemento di $V(S)$ sia soluzione dell'equazione $f = 0_K$ è il radicale di H in R.

6.B.5. Modificare la dimostrazione del lemma 6.9 per provare che l'ipotesi che R sia unitario può essere sostituita dalla più debole ipotesi che R sia finitamente generato come ideale e dedurne una versione più generale della proposizione 6.10: se R è un anello commutativo in cui ogni ideale che sia primo o R è finitamente generato, allora R è noetheriano.

7 Decomposizione primaria

La nozione di ideale primario è una ampia ed utile generalizzazione di quella di ideale primo. Esiste una classica teoria della decomposizione primaria di ideali, cioè della maniera in cui un ideale di un anello commutativo unitario può essere rappresentato come intersezione di un numero finito di ideali primari, che ha particolare rilevanza per lo studio degli anelli noetheriani.

7.1 Ideali primari

Sia R un anello commutativo. Un ideale H di R si dice *primario* (in R) se e solo se $H \neq R$ e, nell'anello quoziente R/H, ogni divisore dello zero è un elemento nilpotente. Come sappiamo, dire che un elemento $a + H$ di R/H è nilpotente equivale a dire che $a \in \sqrt{H}$. Dire invece che $a + H$ è un divisore dello zero in R/H equivale a dire che esiste $b \in R \smallsetminus H$ tale che $ab \in H$, ovvero $b \in (H : a)_R$ o, ancora, $a \in (H : b)_R$. Tenendo conto che in ogni caso si ha $H \subseteq (H : a)_R$, abbiamo così:

Lemma 7.1. *Siano R un anello commutativo e $H \lhd R$. Per ogni $a \in R$ sono equivalenti:*
(i) *$a + H$ è un divisore dello zero in R/H;*
(ii) *$(H : a)_R \neq H$;*
(iii) *$a \in \bigcup\{(H : b)_R \mid b \in R \smallsetminus H\}$.*

Definizioni alternative sono suggerite da questo semplice lemma:

Lemma 7.2. *Siano R un anello commutativo e H un suo ideale proprio. Sono allora equivalenti:*
(i) *H è primario in R;*
(ii) *per ogni $r \in R \smallsetminus \sqrt{H}$, $(H : r)_R = H$;*
(iii) *per ogni $r \in R \smallsetminus H$, $(H : r)_R \subseteq \sqrt{H}$;*
(iv) *per ogni $r, s \in R$ tali che $rs \in H$, o $r \in H$ oppure $s \in \sqrt{H}$.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra (i) e (ii) e quella tra (i) e (iii) seguono subito dalle equivalenze tra le corrispondenti affermazioni in lemma 7.1. La (iv) è una riformulazione di (iii): essa afferma che se $r, s \in R$ e $s \in (H : r)_R$, allora $r \in H$ o $s \in \sqrt{H}$. □

È evidente che tutti gli ideali primi sono primari (ed è anche vero che tutti gli ideali massimali sono primari, in conseguenza del lemma 3.7). Il viceversa non vale; ad esempio è facile verificare (segue immediatamente dal lemma 7.5) che per ogni primo p e ogni numero intero positivo n, l'ideale $p^n\mathbb{Z}$ è primario in $\mathbb{Z}$, ma non primo se $n > 1$. Più in generale, si ha infatti:

Lemma 7.3. *In un anello commutativo unitario R sia p un elemento cancellabile tale che pR sia un ideale primo. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, p^nR è un ideale primario in R.*[1]

Dimostrazione. Certamente $p^nR = (pR)^n \subseteq pR \subset R$, e $pR = \sqrt{p^nR}$ per l'esercizio 3.C.6. Supponiamo n minimo possibile per la proprietà che p^nR non sia primario. Allora $n > 1$ ed esistono $a, b \in R$ tali che $ab \in p^nR$, $a \notin p^nR$ e $b \notin pR$. Dal momento che pR è primo, $a \in pR$; esiste dunque $c \in R$ tale $a = pc$. Da $p^n \mid ab = pcb$ e dalla cancellabilità di p deduciamo $p^{n-1} \mid cb$, ovvero $cb \in p^{n-1}R$. Per la minimalità di n, $p^{n-1}R$ è primario e quindi da $b \notin pR = \sqrt{p^{n-1}R}$ segue $c \in p^{n-1}R$. Questo comporta $a = pc \in p^nR$, una contraddizione. □

[1] l'esercizio 3.B.5 mostra che l'ipotesi che R sia unitario si potrebbe eliminare, visto che è conseguenza delle altre.

Abbiamo però:

Lemma 7.4. *Se Q è un ideale primario di un anello commutativo R, il radicale $P = \sqrt{Q}$ di Q in R è R o un suo ideale primo.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in R$ tali che $ab \in P$, quindi $a^n b^n \in Q$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}^+$, e $a \notin P$ dunque, di conseguenza, $a^n \notin Q$. Poiché Q è primario si ha allora $b^n \in P$, e quindi $b \in \sqrt{P} = P$, il che prova l'asserto. □

Come sappiamo dal lemma 3.13, se R è unitario il caso $\sqrt{Q} = R$ non si può verificare, quindi *ogni ideale primario in un anello commutativo unitario ha radicale primo.* Se Q è un ideale primario di un anello commutativo e $P = \sqrt{Q}$, si dice anche che Q è un ideale P-primario.

Sono ovviamente primari tutti gli ideali propri di un anello commutativo R che abbiano R come radicale, caso che si può presentare solo se R non è unitario. Nel caso degli anelli commutativi unitari si verifica invece che sono primari gli ideali con radicale massimale. Questo risultato fornisce un gran numero di esempi interessanti di ideali primari.

Lemma 7.5. *Siano R un anello commutativo unitario e $Q \lhd R$. Se $P := \sqrt[R]{Q} \lhd\cdot R$, allora Q è un ideale primario in R.*

Dimostrazione. L'ipotesi comporta che $\bar{P} := P/Q$ è l'unico ideale primo di $\bar{R} := R/Q$, che è quindi un anello locale con ideale massimale $\bar{P}$. Allora $\bar{R} \setminus \bar{P} = \mathcal{U}(\bar{R})$, per il corollario 3.22. Dunque, i divisori dello zero in $\bar{R}$ sono tutti contenuti in $\bar{P} = \mathrm{NilRad}(\bar{R})$ e sono quindi nilpotenti, sicché Q è primario. □

Il risultato analogo non vale nel caso degli anelli non unitari; lo si può verificare con l'esempio 7.A.2.

Altri due semplici risultati che forniscono ideali primari sono:

Lemma 7.6. *Sia R un anello commutativo e siano Q un suo ideale primario e $P = \sqrt{Q}$. Allora, per ogni $a \in R \setminus Q$, $(Q : a)_R$ è R oppure un ideale P-primario di R.*

Dimostrazione. Come segue dal lemma 7.2, valgono le inclusioni $Q \subseteq (Q : a)_R \subseteq P$. Di conseguenza, $P = \sqrt{(Q : a)_R}$. Siano ora $r, s \in R$ tali che $rs \in (Q : a)_R$ e $r \notin (Q : a)_R$. Allora $ars \in Q$ e $ar \notin Q$, quindi $s \in \sqrt{Q} = P = \sqrt{(Q : a)_R}$. Concludiamo che, se è proprio, $(Q : a)_R$ è P-primario. □

Lemma 7.7. *Siano R un anello commutativo e H, K due ideali primari di R con lo stesso radicale P. Allora anche $H \cap K$ è un ideale P-primario in R.*

Dimostrazione. Il lemma 3.13 fornisce $\sqrt{H \cap K} = \sqrt{H} \cap \sqrt{K} = P$; si tratta dunque solo di provare che $H \cap K$ è primario. Ovviamente $H \cap K \subset R$. Siano $a, b \in R$ tali che $ab \in H \cap K$ e $a \notin \sqrt{H \cap K} = P$. Poiché H è P-primario, e $ab \in H$, allora $b \in H$; per l'analogo motivo $b \in K$. Dunque $b \in H \cap K$, sicché $H \cap K$ è primario. □

Due esempi importanti Abbiamo detto che gli ideali primari di $\mathbb{Z}$ sono tutte e sole le potenze (ad esponente intero positivo) di ideali primi (lo stesso è vero per tutti gli anelli principali: esercizio 7.A.1) e che, negli anelli commutativi unitari, tutti gli ideali con radicale massimale sono primari. Questo potrebbe far supporre che, in ogni anello commutativo unitario, tutti gli ideali con radicale primo siano primari, o magari che la proprietà di essere un ideale primario implichi o sia implicata dalla proprietà di essere potenza di un ideale primo. Nulla di tutto ciò è vero.

Iniziamo da un esempio molto semplice.[2] Siano K un campo, $R = K[x, y]$ un anello di polinomi su K nelle indeterminate x e y ed infine $M = (x, y)$ l'ideale generato in R dalle due indeterminate. Poiché $R/M \simeq K$, certamente $M \lhd\cdot R$. Sia H un ideale di R strettamente compreso tra $M^2 = (x^2, xy, y^2)$ ed M, ad esempio: $H = (x, y^2)$. Allora, poiché $M^2 \subseteq H$, si ha $M \subseteq \sqrt{H}$, ma $M \lhd\cdot R$ e $\sqrt{H} \neq R$ per il lemma 3.13, quindi $\sqrt{H} = M$ e H è M-primario, per il lemma 7.5. Infine, dal fatto che $M^2 \subset H \subset M$ segue che H non è una potenza di M, quindi non è una potenza di un ideale primo (non solo perché M è l'unico ideale primo contentente H: se un ideale è potenza di un ideale primo, abbiamo già visto che quest'ultimo è il suo radicale.)

Il secondo esempio è più elaborato. Intendiamo costruire un anello commutativo unitario R ed un suo ideale primo P tali che, per un certo intero $n > 1$, l'ideale P^n non sia primario in R. Piuttosto che limitarci a fornire un esempio 'già pronto', proviamo qui a mostrare in che modo si può procedere per costruirne uno; le stesse tecniche potranno essere adottate in situazioni analoghe per produrre controesempi di altro genere.

Quando si cerca di costruire esempi che soddisfino specifiche condizioni un possibile approccio è quello di considerare la situazione più generale possibile, esaminando le conseguenze delle condizioni richieste in modo da restringere il campo dei possibili esempi a quegli oggetti per i quali queste conseguenze siano soddisfatte. Può anche capitare di osservare che se un esempio del tipo desiderato esiste, ne esiste necessariamente anche uno che verifichi delle proprietà aggiuntive; in questo caso possiamo, come si dice, ridurre il problema limitandoci a considerare solo i potenziali esempi per i quali valgano queste ulteriori proprietà, il che può risultare vantaggioso se (e non è scontato) questa assunzione semplifica la nostra ricerca.

Vediamo cosa significa tutto ciò nel nostro caso. Stiamo cercando un anello commutativo unitario R, un suo ideale primo P e un intero $n > 1$ con le proprietà sopra specificate; ricordando che in questa situazione si ha certamente $P = \sqrt{P^n}$, servono dunque in R elementi a, b tali che $ab \in P^n$, $a \notin P$ e $b \notin P^n$. Essendo P primo, necessariamente si deve avere anche $b \in P$. Inoltre, se supponiamo che un esempio siffatto esista, allora il sottoanello unitario di R generato da $P \cup \{a, b\}$ ha le stesse proprietà richieste per R. Meglio ancora: come è facile verificare, se $ab \in P^n$, esiste un insieme finito $F \subseteq P$ tale che $ab \in F^n$. Se R_1 è il sottoanello unitario di R generato da $F \cup \{a, b\}$ e $P_1 = P \cap R_1$, allora $P_1 \in \operatorname{Spec}(R_1)$, $ab \in P_1^n$, $a \notin P_1$ e $b \notin P_1^n$, quindi R_1 e P_1 (ed n) forniscono un esempio con le proprietà richieste in partenza. Abbiamo così una vantaggiosa riduzione: possiamo limitarci a considerare anelli commutativi unitari R che siano finitamente generati. Ogni tale R è, come sappiamo, isomorfo ad un quoziente di un anello di polinomi su $\mathbb{Z}$ in un insieme finito di indeterminate, quindi ci riduciamo a ragionare su anelli di questo tipo.

D'altra parte, anche dopo le eventuali riduzioni la situazione potrebbe essere considerata ancora troppo complicata. È spesso conveniente cercare un compromesso tra l'analisi della situazione generale e la considerazione di specifici casi particolari in cui il problema assuma una forma semplificata: la generalità garantirebbe che l'esempio, se esiste, non possa sfuggire dalla rete; ma la semplificazione ci può aiutare a trovarlo e riconoscerlo effettivamente.

Tornando al nostro problema specifico, una difficoltà che incontriamo è data dalla condizione $ab \in P^n$: potrebbe essere non facilissimo stabilire se, in un dato anello, un assegnato elemento è o non è somma di un numero non specificato di prodotti di n elementi in un prefissato ideale. Il compromesso che ci permette di semplificare la situazione può essere questo: tentare di costruire un esempio in cui $n = 2$ e ab sia il prodotto di due elementi di P; se ci riusciamo abbiamo risolto il problema, se non ci riusciamo possiamo riprovare con un'assunzione più debole.

Riassumendo, a questo punto stiamo cercando un anello commutativo unitario R ed un suo ideale primo P costruiti in modo che esistano in R elementi a, b, c, d tali che $a \notin P$ ma $b, c, d \in P$

[2] Si veda anche l'esercizio 7.A.3.

ed inoltre $ab = cd$ e $b \notin P^2$. Per la riduzione vista sopra, possiamo anche assumere che, come anello unitario, R sia generato da $\{a, b, c, d\}$.

A questo punto R deve essere isomorfo ad un quoziente dell'anello di polinomi a quattro indeterminate $S := \mathbb{Z}[x, y, z, t]$. Possiamo dunque provare a porre $R = S/H$ per un opportuno $H \lhd S$ e, detto $\varepsilon\colon S \twoheadrightarrow R$ l'epimorfismo canonico, porre $a = x^\varepsilon$, $b = y^\varepsilon$, $c = z^\varepsilon$ e $d = t^\varepsilon$. Imporre $ab = cd$ significa imporre $xy \equiv_H zt$, ovvero $xy - zt \in H$. Dobbiamo quindi richiedere che valga questa condizione. Serve anche fissare un ideale primo P di R, vale a dire: scegliere un ideale primo L di S contenente H e porre $P = L/H$. Come sopra, la condizione $b, c, d \in P$ si traduce nella richiesta $y, z, t \in L$. Dunque, sicuramente servono in S un ideale H tale che $(xy - zt) \subseteq H$ ed un ideale primo L tale che $H + (y, z, t) \subseteq L$; scelti in qualche modo tali H ed L si tratta poi di verificare se le ulteriori condizioni richieste per il nostro esempio sono o meno verificate. È abbastanza ragionevole provare per prima la scelta più semplice: $H = (xy - zt)$ e $L = (y, z, t)$; qui abbiamo tenuto conto di due fatti piuttosto evidenti: $(xy - zt) \subseteq (y, z, t)$ e $S/(y, z, t) \simeq \mathbb{Z}[x]$ è un dominio di integrità, quindi (y, z, t) è primo. Risulta che questa scelta è fortunata: tutte le condizioni richieste sono soddisfatte. Abbiamo infatti:

Proposizione 7.8. *Sia $S = \mathbb{Z}[x, y, z, t]$ un anello di polinomi su $\mathbb{Z}$ nelle quattro indeterminate x, y, z, t, siano $H = (xy - zt) \lhd S$ e $R = S/H$. Allora $P := (y, z, t)/H$ è un ideale primo di R e P^2 non è primario in R.*

Dimostrazione. Palesemente $(y, z, t) \supseteq H$, quindi l'ideale P è ben definito, e $R/P \simeq S/(y, x, t) \simeq \mathbb{Z}[x]$ è un dominio di integrità e così P è primo in R. Sia ε l'epimorfismo canonico $S \twoheadrightarrow R$ e siano $a = x^\varepsilon$, $b = y^\varepsilon$, $c = z^\varepsilon$ e $d = t^\varepsilon$. Allora $c, d \in P$ e $ab - cd = (xy - zt)^\varepsilon = 0_R$, quindi $ab = cd \in P^2$. D'altra parte $x \notin (y, z, t)$, quindi $a \notin P$. Inoltre, posto $I = (y, z, t)^2 + H$, in modo che $P^2 = I/H$, è chiaro che tutti gli elementi non nulli di I sono polinomi di grado totale (nel senso dell'osservazione 5.A.1) maggiore di 1, quindi $y \notin I$, ovvero $b \notin P^2$. A questo punto è dimostrato che P^2 non è un ideale primario di R. □

Esercizi.

7.A.1. Verificare che in un anello principale gli ideali primari sono tutte e sole le potenze ad esponente positivo degli ideali primi.

7.A.2. Sia M un anello non nullo con moltiplicazione costante nulla. Allora nell'anello prodotto diretto $R = M \times \mathbb{Z}_2$ si ha che $M = \mathrm{NilRad}(R)$ è massimale e primo in R, ma l'ideale nullo, pur avendo M come radicale, non è primario. Verificarlo.

È anche chiaro che M è l'unico ideale primo di R e, se M è scelto in modo che il suo gruppo additivo sia privo di sottogruppi massimali (ad esempio, il gruppo additivo razionale ha questa proprietà), allora M è anche l'unico ideale massimale di R.

7.A.3. Si verifichino in dettaglio tutti i passaggi omessi nella discussione del primo degli esempi in "Due esempi importanti" (ad esempio, il fatto che tutte le inclusioni indicate come strette lo siano).

Con riferimento alle notazioni usate per quell'esempio, si osservi anche che M/M^2 può essere riguardato, a meno di cambio degli scalari, come spazio vettoriale su R/M, ovvero su K, di dimensione 2 e che l'applicazione $I \mapsto I/M^2$ dall'insieme degli ideali di R strettamente compresi tra M e M^2 all'insieme dei K-sottospazi di dimensione 1 di M/M^2 è biettiva, il che permette di descrivere facilmente questi ideali.

7.A.4. In un certo senso l'esempio presentato nella proposizione 7.8 non è ottimale: ne si può ottenere uno come quoziente di un anello di polinomi su $\mathbb{Z}$ con tre indeterminate. Si arriva ad un esempio di questo tipo se, seguendo la procedura discussa prima della proposizione, anziché richiedere che ab sia il prodotto tra due arbitrari elementi di P si assume la condizione più forte

che ab sia il quadrato di un elemento di P. Effettuare la costruzione fino a costruire l'esempio richiesto.

Osservare, inoltre, che $\mathbb{Z}$ può essere sostituito in questa costruzione da un qualsiasi dominio di integrità unitario.

7.A.5. Chiamiamo pseudoprimario ogni ideale proprio H di un anello commutativo R che abbia questa proprietà: per ogni $a, b \in R$, se $ab \in H$ allora uno tra a e b appartiene a $\sqrt{H}$. Trovare un esempio di ideale pseudoprimario ma non primario in un anello commutativo unitario.

7.2 Decomposizioni primarie e decomposizioni primarie minimali

Sia R un anello commutativo e sia $H \lhd R$. Informalmente si dice che una decomposizione primaria di H è una rappresentazione

$$H = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$$

di H come intersezione di un numero finito ideali primari di R. In modo più preciso, chiamiamo *decomposizione primaria* di H un insieme finito e non vuoto $\mathcal{D}$ di ideali primari di R tale che $H = \bigcap \mathcal{D}$. Si dice che H è *decomponibile* (o decomponibile in ideali primari) se e solo se H ha una decomposizione primaria. Sono ovviamente decomponibili gli ideali primari, e vedremo che in un anello noetheriano tutti gli ideali propri sono decomponibili, ma esistono anelli con ideali propri non decomponibili; alcuni esempi sono tra gli esercizi al termine di questa sezione.

Sono di particolare interesse le decomposizioni di un assegnato ideale con la minima cardinalità possibile. Fissati un anello commutativo R ed un suo ideale decomponibile H, diciamo che una decomposizione primaria $\mathcal{D}$ di H (in R) è irridondante se e solo se nessuna parte propria di $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria di H, vale a dire: o $|\mathcal{D}| = 1$ oppure $H \subset \bigcap(\mathcal{D} \smallsetminus \{Q\})$ per ogni $Q \in \mathcal{D}$. Equivalentemente, $\mathcal{D}$ è irridondante se e solo se $|\mathcal{D}| = 1$ oppure, per ogni $Q \in \mathcal{D}$, si ha $\bigcap(\mathcal{D} \smallsetminus \{Q\}) \not\subseteq Q$. Si dice poi che $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria minimale di H quando $\mathcal{D}$ è irridondante e l'applicazione $Q \in \mathcal{D} \mapsto \sqrt{Q} \in \mathfrak{I}(R)$ è iniettiva.

Lemma 7.9. *Siano R un anello commutativo e H un suo ideale decomponibile. Allora H ha una decomposizione primaria minimale in R.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D}$ una decomposizione primaria di H di cardinalità minima possibile. È chiaro che $\mathcal{D}$ deve essere irridondante. Se esistono $I, J \in \mathcal{D}$ tali che $P := \sqrt{I} = \sqrt{J}$, allora, per il lemma 7.7, anche $I \cap J$ è P-primario, quindi $(\mathcal{D} \smallsetminus \{I, J\}) \cup \{I \cap J\}$ è una decomposizione primaria di H di cardinalità minore di $|\mathcal{D}|$, contraddicendo la scelta di $\mathcal{D}$. Questa contraddizione mostra che $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria minimale di H. □

Consideriamo, ad esempio, le decomposizioni primarie minimali per ideali di $\mathbb{Z}$. Sia $\mathcal{D}$ un insieme non vuoto di ideali primari di $\mathbb{Z}$, dunque $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria di $H := \bigcap \mathcal{D}$. Tralasciando il caso banale in cui $\{0\} \in \mathcal{D}$ (in questo caso $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria di $\{0\}$, ed è minimale se e solo se $\mathcal{D} = \{0\}$) abbiamo $\mathcal{D} = \{p_1^{\lambda_1}\mathbb{Z}, p_2^{\lambda_2}\mathbb{Z}, \ldots, p_n^{\lambda_n}\mathbb{Z}\}$ per opportuni $n \in \mathbb{N}^+$, numeri primi positivi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e interi positivi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Allora $H = m\mathbb{Z}$, dove m è un minimo comune multiplo di $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \ldots, p_n^{\lambda_n}$; è chiaro che $\mathcal{D}$ è una decomposizione irridondante di H se e solo se i primi p_i sono a due a due distinti, nel qual caso $m = \prod_{i=1}^n p_i^{\lambda_i}$ e $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria minimale di $m\mathbb{Z}$. Da queste considerazioni e dal teorema fondamentale dell'aritmetica segue molto facilmente che, in $\mathbb{Z}$, ogni ideale ha una ed una sola decomposizione primaria minimale.

La teoria della decomposizione primaria consiste essenzialmente nel discutere fino a che punto questa proprietà di $\mathbb{Z}$, o qualche sua versione più debole, si estende al caso di anelli più generali.

7.2.1 Ideali irriducibili per intersezione e decomposizioni primarie in anelli noetheriani

Un ideale H di un anello commutativo R si dice irriducibile per intersezione (o $\cap$-irriducibile) se e solo se $H \subset R$ e H non è intersezione di due ideali che lo contengano propriamente. Un'argomentazione simile a quella svolta per la dimostrazione del lemma 2.4 mostra:

Lemma 7.10. *Sia R un anello commutativo noetheriano. Allora ogni ideale proprio di R è intersezione di un insieme finito di ideali $\cap$-irriducibili in R.*

Dimostrazione. Supponiamo l'asserto falso; allora l'insieme $\mathcal{S}$ degli ideali propri di R che non sono intersezione di un insieme finito di ideali $\cap$-irriducibili non è vuoto ed ha quindi un elemento massimale H. Poiché H stesso non è allora $\cap$-irriducibile, si ha $I \cap J = H \subset I, J$ per opportuni $I, J \lhd R$. Per la massimalità di H, ora, $I, J \notin \mathcal{S}$, quindi I e J sono entrambi intersezioni di un numero finito di ideali $\cap$-irriducibili in R, e dunque H ha la stessa proprietà, contraddicendo la definizione di $\mathcal{S}$. □

La rilevanza del lemma appena provato nel contesto di questo capitolo è resa evidente dalla proposizione che segue.

Proposizione 7.11. *Siano R un anello commutativo noetheriano e H un suo ideale $\cap$-irriducibile. Allora H è primario in R.*

Dimostrazione. Per definizione, $H \neq R$. Sia $a \in R \setminus H$ un divisore dello zero modulo H, valga cioè $H \subset I := (H : a)_R$. Basterà provare che a è nilpotente modulo H, ovvero $a \in \sqrt{H}$. Sia R_1 l'anello accresciuto definito da R; ricordiamo che R_1 è noetheriano, in conseguenza del lemma 6.5, inoltre $H \lhd R_1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, poniamo $K_n = (H : a^n)_{R_1}$. Allora $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di ideali di R_1, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $K_n = K_{n+1}$. Sia $J = H + a^n R_1$, l'ideale di R generato da $H \cup \{a^n\}$. Evidentemente $H \subseteq I \cap J$; vogliamo provare che vale l'uguaglianza. Sia $b \in I \cap J$. Allora $b = h + a^n r$ per un opportuno $r \in R_1$. Poiché $b \in I$, si ha $ab \in H$, ovvero $ah + a^{n+1}r \in H$. Ma allora $a^{n+1}r \in H$, dunque $r \in K_{n+1} = K_n$; pertanto $a^n r \in H$ e quindi $b \in H$. Abbiamo dunque $H = I \cap J$; poiché H è $\cap$-irriducibile e $H \subset I$, allora $H = J$, vale a dire: $a^n \in H$. Pertanto $a \in \sqrt{H}$, come si voleva. □

L'esempio 7.B.10 mostra che questo risultato non si estende al caso degli anelli, anche unitari, non noetheriani.

Teorema 7.12. *Negli anelli commutativi noetheriani ogni ideale proprio è decomponibile.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dai due enunciati precedenti. □

Esempi, Osservazioni, Esercizi.

7.B.1. Se K è un campo e $R = K[x, y]$ un anello di polinomi su K a due indeterminate, in R l'insieme $\{(x^2, y), (x, y^2)\}$ è una decomposizione primaria irridondante ma non minimale di $(x, y)^2$.

7.B.2. Verificare che se H è un ideale di un anello commutativo R e R/H è noetheriano, allora H è decomponibile in R.

7.B.3. Variazioni nella terminologia: alcuni autori chiamano *ridotte* le decomposizioni primarie minimali; talvolta, con terminologia che ha origine nella geometria, gli elementi di una decomposizione primaria minimale di un ideale H sono chiamati *componenti* di H, e dei loro radicali si dice che appartengono (!) ad H.

7.B.4. Provare che, per ogni insieme S, nell'anello delle parti di S gli ideali primari sono tutti e soli gli ideali di indice 2, e quindi sono tutti massimali. (Suggerimento: tutti gli elementi dell'anello sono idempotenti. Questo enunciato si estende a tutti gli anelli booleani)

Di conseguenza, gli ideali decomponibili di $\mathcal{P}(S)$ hanno indice finito. Se S è infinito si ottengono così vari esempi di ideali propri non decomponibili, come l'ideale nullo e quello costituito dalle parti finite di S.

7.B.5. Sia $R = \bigoplus_{i\in I} H_i$ un anello commutativo, somma diretta di una famiglia $(H_i)_{i\in I}$ di suoi ideali che siano tutti unitari. Provare che gli ideali primari di R sono tutti e soli quelli della forma $Q \oplus \bigoplus_{i\neq j\in I} H_j$ al variare di i in I e di Q tra gli ideali primari di H_i.

Dedurne che se l'insieme degli $i \in I$ tali che $H_i \neq 0$ è infinito, allora l'ideale nullo di R non è decomponibile.

7.B.6. Sia $(R_i)_{i\in I}$ una famiglia di anelli commutativi unitari non nulli, e sia $R = \prod_{i\in I} R_i$. Dimostrare che se Q è un ideale primario di R e per qualche $i \in I$ l'i-esimo idempotente canonico e_i di R non appartiene a Q, allora Q contiene $\prod_{i\neq j\in I} R_j$. Anche in questo caso, dedurre che se l'insieme degli $i \in I$ tali che $R_i \neq 0$ è infinito, allora l'ideale nullo di R non è decomponibile.

7.B.7. Sia C l'anello delle funzioni continue dall'intervallo reale $I = [0, 1]$ a $\mathbb{R}$. Ricordando dall'esercizio 4.B.1 che gli ideali massimali di C sono tutti e soli gli ideali $M_i = \{f \in C \mid i^f = 0\}$ al variare di i in I, dopo aver osservato che per ogni $i, j \in I$, se $i \neq j$ esistono $f \in C \setminus M_i$ e $g \in C \setminus M_j$ tali che $fg = 0$, concludere che ogni ideale primario di C è contenuto in esattamente un ideale massimale e che quindi, in C, l'ideale nullo non è decomponibile.

7.B.8. Verificare che tutti gli ideali primi sono $\cap$-irriducibili.

7.B.9. Costruire, in un anello commutativo unitario noetheriano, un esempio di ideale primario che non sia $\cap$-irriducibile.

7.B.10. Fissato un numero primo positivo p, sia P un p-gruppo di Prüfer, riguardato come modulo su $\mathbb{Z}$, e sia $R = P \mathbin{{}_0\!\ltimes} \mathbb{Z}$ la sua idealizzazione. È facile verificare (farlo!) che ogni ideale di R che non contenga P è contenuto in P ed è di conseguenza $\cap$-irriducibile, ma non è primario.

Si noti che R non è lontanissimo dall'essere noetheriano: R_R è estensione di un R-modulo artiniano, P, mediante un R-modulo noetheriano, $R/P \simeq \mathbb{Z}$.

7.B.11. Scrivere una decomposizione primaria minimale dell'ideale $(12(x + 1)^3) \cap (8, x^2)$ nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$.

7.B.12. Sia R un anello commutativo unitario e sia M un suo ideale massimale. Per ogni intero positivo n, l'anello $\bar{R} = R/M^n$ ha $\bar{M} = M/M^n$ come ideale massimale che è però anche nilpotente, quindi $\bar{M} = \mathrm{NilRad}(\bar{R})$ e $\bar{R}$ è locale. Ne segue che ogni ideale proprio di $\bar{R}$ ha $\bar{M}$ come radicale ed è così primario.

Scegliendo, ad esempio, come R un anello di polinomi $K[X]$ con un insieme infinito X di indeterminate su un campo K e $M = XR$, per ogni intero $n > 1$ abbiamo che R/M^n è un anello commutativo unitario non noetheriano i cui ideali propri sono tutti decomponibili.

7.3 Teoremi di unicità

A differenza di quanto accade per gli ideali di $\mathbb{Z}$, in generale, anche in un anello commutativo unitario noetheriano, un ideale decomponibile può avere più decomposizioni primarie minimali, come mostrato dall'esempio 7.C.1. Valgono però due teoremi, noti come primo e secondo teorema di unicità per decomposizioni primarie minimali, che esprimono forme deboli ma comunque molto utili di unicità. Il primo garantisce che il numero degli ideali primari in una decomposizione

primaria minimale di un fissato ideale è indipendente dalla decomposizione, così come l'insieme dei radicali degli ideali primari che vi appaiono.

Teorema 7.13 (Primo teorema di unicità)**.** *Siano R un anello commutativo, H un suo ideale decomponibile e $\mathcal{D}$ una decomposizione primaria minimale di H. Allora, ponendo* $\operatorname{Spec}'(R) = \{R\} \cup \operatorname{Spec}(R)$,

$$\{\sqrt{Q} \mid Q \in \mathcal{D}\} = \{P \in \operatorname{Spec}'(R) \mid (\exists a \in R \setminus H)\big(P = \sqrt{(H : a)_R}\big)\}. \tag{$*$}$$

Se $\mathcal{D}'$ è un'altra decomposizione primaria minimale di H, allora $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$ e $\{\sqrt{Q} \mid Q \in \mathcal{D}\} = \{\sqrt{Q} \mid Q \in \mathcal{D}'\}$.

Dimostrazione. Sia $a \in R \setminus H$, allora $\mathcal{D}_a := \{Q \in \mathcal{D} \mid a \notin Q\} \neq \varnothing$. Utilizzando il lemma 1.15 abbiamo $(H : a)_R = (\bigcap \mathcal{D} : a) = \bigcap_{Q\in\mathcal{D}} (Q : a) = \bigcap_{Q\in\mathcal{D}_a} (Q : a)$ e quindi $\sqrt{(H : a)} = \bigcap_{Q\in\mathcal{D}_a} \sqrt{(Q : a)}$ per il lemma 3.13. Dal momento che $\sqrt{Q} = \sqrt{(Q : a)} \in \operatorname{Spec}'(R)$ per ogni $Q \in \mathcal{D}$, come mostra il lemma 7.6, e che gli ideali primi sono $\cap$-irriducibili (esercizio 7.B.8), è facile concludere che $\sqrt{(H : a)} \in \operatorname{Spec}'(R)$ se e solo se esiste $Q \in \mathcal{D}_a$ tale che $\sqrt{(H : a)} = \sqrt{(Q : a)} = \sqrt{Q}$. D'altra parte, per ogni $Q \in \mathcal{D}$ esiste $a \in (\bigcap(\mathcal{D} \setminus \{Q\})) \setminus Q$, perché $\mathcal{D}$ è irridondante. Per un tale a si ha $\mathcal{D}_a = \{Q\}$ e quindi $\sqrt{(H : a)} = \sqrt{(Q : a)} = \sqrt{Q}$, per quanto visto sopra. A questo punto è provata la (*). Il resto dell'enunciato segue facilmente: $(*)$ mostra che l'insieme $\{\sqrt{Q} \mid Q \in \mathcal{D}\}$ non dipende dalla particolare decomposizione primaria minimale $\mathcal{D}$ scelta, e dalla definizione di decomposizione primaria minimale segue che la sua cardinalità è $|\mathcal{D}|$. □

Nelle notazioni del teorema appena dimostrato, l'insieme $\{\sqrt{Q} \mid Q \in \mathcal{D}\}$ è indicato con $\operatorname{Ass}(H)$ (o $\operatorname{Ass}_R(H)$ se un riferimento all'anello ambiente è necessario) ed i suoi elementi vengono chiamati gli ideali associati all'ideale decomponibile H. Nel caso, importante, in cui R sia un anello commutativo noetheriano (ma non in generale, si veda l'esercizio 7.C.6) la descrizione degli associati ad un ideale H di R è ancora più esplicita di quanto mostrato dal teorema 7.13, infatti in questo caso gli ideali associati ad H sono gli elementi di $\operatorname{Spec}'(R)$ della forma $(H : a)_R$ per un opportuno $a \in R \setminus H$; questo segue dall'esercizio 7.C.5 e suggerisce una parziale estensione a moduli della nozione di ideale primo associato, brevemente discussa nell'osservazione 7.C.7.

Tra gli ideali associati ad un ideale decomponibile H di un anello commutativo R si distinguono quelli minimali per inclusione, che vengono chiamati *ideali isolati* associati ad H; gli altri sono anche noti come ideali *immersi*, questa curiosa terminologia proviene dalla geometria. Evidentemente l'unico caso in cui R sia isolato è quello in cui $\operatorname{Ass}_R(H) = \{R\}$, ovvero $R = \sqrt{H}$, dunque R non è unitario e l'unica decomposizione primaria minimale di H in R è $\{H\}$.

Ricordiamo che, in conseguenza dell'esercizio 3.B.4, per ogni ideale proprio H di un anello commutativo R, se non è vuota (cosa che non accade mai se R è unitario), $\operatorname{Var}(H)$ ha elementi minimali. Se H è decomponibile questi sono precisamente i primi isolati associati ad H. Infatti:

Lemma 7.14. *Siano R un anello commutativo e H un suo ideale decomponibile. Allora ogni ideale in $\operatorname{Var}_R(H)$ contiene un ideale primo isolato associato ad H. Di conseguenza gli elementi minimali di $\operatorname{Var}_R(H)$ sono i primi isolati associati ad H e sono così in numero finito.*

Dimostrazione. Sia $P \in \operatorname{Var}(H)$, e sia $\mathcal{D}$ una decomposizione primaria minimale di H. Dal momento che P è primo e $H = \bigcap \mathcal{D} \subseteq P$, esiste $Q \in \mathcal{D}$ tale che $Q \subseteq P$ e quindi $\sqrt{Q} \subseteq P$. Ovviamente $\sqrt{Q} \neq R$, perché $P \neq R$, e poiché $\sqrt{Q} \in \operatorname{Ass}(H)$ è chiaro che $\sqrt{Q}$ contiene un ideale primo isolato associato ad H. La prima parte dell'enunciato è così provata, la seconda segue senza difficoltà. □

L'unione e l'intersezione tra gli ideali associati ad un ideale decomponibile H descrivono, rispettivamente l'insieme degli elementi di R nilpotenti modulo H e quello degli elementi che sono divisori dello zero modulo H, discussi anche nel lemma 7.1. Infatti:

Proposizione 7.15. *Siano R un anello commutativo e H un suo ideale decomponibile. Allora $\bigcap \mathrm{Ass}_R(H) = \sqrt{H}$ e $\bigcup \mathrm{Ass}_R(H) = \bigcup\{(H : a)_R \mid a \in R \setminus H\}$ è l'insieme dei elementi di R che sono divisori dello zero modulo H.*

Dimostrazione. Che valga $\bigcap \mathrm{Ass}_R(H) = \sqrt{H}$ segue dal fatto che ogni ideale primo in $\mathrm{Var}(H)$ contiene un primo associato ad H. Proviamo la seconda uguaglianza. Sia $a \in R \setminus H$. Se $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria minimale di H, esiste $Q \in \mathcal{D}$ tale che $a \notin Q$ e $(H : a)_R \subseteq (Q : a)_R \subseteq \sqrt{Q} \in \mathrm{Ass}_R(H)$. Dunque $\bigcup\{(H : a)_R \mid a \in R \setminus H\} \subseteq \bigcup \mathrm{Ass}_R(H)$. Viceversa, sia $b \in \bigcup \mathrm{Ass}_R(H)$. Allora, per il teorema 7.13, esiste $r \in R \setminus H$ tale che $b \in \sqrt{(H : r)_R}$, quindi $rb^n \in H$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}^+$. Fissato un tale r, sia n minimo per la proprietà richiesta; allora $a := rb^{n-1} \notin H$ e $b \in (H : a)_R$. Con questo la dimostrazione è completa. □

Veniamo infine al secondo teorema di unicità. Essenzialmente questo teorema garantisce che, nel passaggio da una decomposizione primaria all'altra di uno stesso ideale decomponibile, a poter variare sono solo gli ideali primari il cui radicale sia un ideale immerso. Questa situazione sarà poi anche illustrata dall'esempio 7.C.1. Stabiliamo ancora un po' di terminologia ed una notazione. Se $\mathcal{D}$ è una decomposizione primaria minimale di un ideale decomponibile H in un anello commutativo R e $P \in \mathrm{Ass}_R(H)$, indichiamo con $\mathcal{D}(P)$ l'unico ideale appartenente a $\mathcal{D}$ che abbia P come radicale. Questo ideale $\mathcal{D}(P)$ è anche noto come la *P-componente* di H.

Teorema 7.16 (Secondo teorema di unicità)**.** *Siano R un anello commutativo, H un suo ideale decomponibile e $P \in \mathrm{Ass}_R(H)$. Se P è isolato (tra gli ideali associati ad H), allora, scelte comunque due decomposizioni primarie minimali $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ di H, si ha $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}'(P)$.*

Dimostrazione. Se $\mathrm{Ass}_R(H) = \{P\}$, allora $\{H\}$ è l'unica decomposizione primaria minimale di H ed in questo caso non c'è nulla da dimostrare. Possiamo allora supporre $\mathcal{J} := \mathrm{Ass}_R(H) \setminus \{P\} \neq \varnothing$. In questo caso, $P \neq R$, quindi P è primo. Poiché P è isolato, cioè minimale in $\mathrm{Ass}_R(H)$, per ogni $I \in \mathcal{J}$ si ha $I \not\subseteq P$, possiamo quindi fissare $a_I \in I \setminus P$. Posto $a = \prod_{I \in \mathcal{J}} a_I$ si ha allora $a \in \left(\bigcap \mathcal{J}\right) \setminus P$. Sia $\mathcal{D}$ una decomposizione primaria minimale di H in R. Allora $H = \mathcal{D}(P) \cap \left(\bigcap\{\mathcal{D}(I) \mid I \in \mathcal{J}\}\right)$. Poiché $\mathcal{J}$ è finito ed a appartiene ad ogni $I \in \mathcal{J}$, esiste $\lambda = \lambda(\mathcal{D})$ tale che $a^\lambda \in \mathcal{D}(I)$ per ogni $I \in \mathcal{J}$. Se n è un intero maggiore di λ si ha allora $(H : a^n)_R = (\mathcal{D}(P) : a^n)_R \cap \left(\bigcap\{(\mathcal{D}(I) : a)_R \mid I \in \mathcal{J}\}\right) = (\mathcal{D}(P) : a^n)_R \cap R = (\mathcal{D}(P) : a^n)_R$. Ma $a^n \notin P$, perché $a \notin P$, quindi il lemma 7.2 fornisce $(H : a^n)_R = (\mathcal{D}(P) : a^n)_R = \mathcal{D}(P)$. Se ora $\mathcal{D}'$ è un'altra decomposizione primaria minimale di H in R, scelto n maggiore sia di $\lambda(\mathcal{D})$ che di $\lambda(\mathcal{D}')$, applicando quanto appena provato sia a $\mathcal{D}$ che a $\mathcal{D}'$, abbiamo $\mathcal{D}(P) = (H : a^n) = \mathcal{D}'(P)$, il che completa la dimostrazione. □

Esercizi, osservazioni, esempi.

7.C.1. Siano K un campo e $R = K[x, y]$ un anello di polinomi su K. In R si considerino gli ideali $P = (x)$, $M = (x, y)$ e, per ogni $n, m \in \mathbb{N}^+$, $Q_{n,m} = (x^n, xy, y^m)$. Come è chiaro, P è primo ed M è massimale; inoltre M è il radicale di ciascuno degli ideali $Q_{n,m}$, che sono così M-primari. Per fissati $n, m \in \mathbb{N}^+$ si ha poi $Q_{n,m} \cap P = \big((x^n, xy) + (y^m)\big) \cap P = (x^n, xy) + \big((y^m) \cap P\big)$, per il lemma 1.8. Ora, evidentemente $(y^m) \cap P = (xy^m) \subseteq (xy)$, quindi $Q_{n,m} \cap P = (x^n, xy) =: H_n$ è indipendente dalla scelta di m. Se $n > 1$, gli ideali (primari) $Q_{n,m}$ e P non sono confrontabili ed hanno ovviamente radicali distinti (M e P), quindi, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$, $\{Q_{n,m}, P\}$ è una decomposizione primaria minimale di H_n. È anche chiaro che se m e ℓ sono interi positivi distinti si ha $Q_{n,m} \neq Q_{n,\ell}$ (ad esempio perché nell'ovvio isomorfismo tra R/P e $K[y]$ gli ideali $Q_{n,m} + P/P$ e $Q_{n,\ell} + P/P$ corrispondono a $y^m K[y]$ e $y^\ell K[y]$). Dunque, in R, per ogni intero $n > 1$ l'ideale H_n ha infinite decomposizioni primarie minimali.

In questo esempio gli ideali associati all'ideale H_n sono due (entrambi primi): P ed M. Come si vede, $P \subset M$, quindi P è un (l'unico, in effetti) primo isolato, M è l'unico primo immerso. Nelle decomposizioni primarie minimali di H_n qui esibite, la P-componente (cioè l'ideale primario che ha P come radicale) è P stesso. Ciò è in accordo con il secondo teorema di unicità, che garantisce anzi che P appartiene a tutte le decomposizioni primarie minimali di H_n. Invece, essendo M un primo immerso, al variare delle decomposizioni primarie minimali di H_n la M-componente può (anzi, in questo caso evidentemente deve) variare.

7.C.2. Provare che l'intersezione tra due ideali primari I e J è primario se e solo se $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ oppure I e J sono confrontabili.

7.C.3. Verificare che, per ogni ideale decomponibile H di un anello commutativo, le decomposizioni primarie minimali di H sono tutte e sole le decomposizioni primarie di H della minima cardinalità possibile.

7.C.4. Sia R un anello commutativo unitario di dimensione (di Krull) 0, oppure un dominio di integrità unitario di dimensione 1. Provare che ogni ideale di R ha al massimo una decomposizione primaria minimale.

La stessa conclusione non è necessariamente vera se l'ipotesi che R sia unitario viene rimossa. Convincersene verificando quanto segue. Sia R l'anello $M \times N$, dove, per un numero primo p, M è l'ideale massimale $p\mathbb{Q}_{p'}$ della localizzazione $\mathbb{Q}_{p'}$ di $\mathbb{Z}$ a $p\mathbb{Z}$, ed N è un anello ad elementi tutti nilpotenti. Allora (fatte le consuete identificazioni di N ed M con ideali di R) $\operatorname{Spec}(R) = \{N\}$ e, per ogni ideale non nullo Q di M, l'ideale nullo di R ha $\{N, Q\}$ come decomposizione primaria minimale.

Tornando al caso unitario, l'osservazione si applica (in modo banale) agli anelli principali, e, come si vedrà più avanti, anche al caso degli anelli artiniani ed a quello degli anelli di Dedekind.

7.C.5. Sia M un premodulo su un anello commutativo R. Verificare che ogni elemento massimale P di $\{\operatorname{Ann}_R(x) \mid 0_M \neq x \in M\}$ è o R o un ideale primo di R; se R è unitario e M è un R-modulo, allora P è primo.

Dedurne che se H è un ideale proprio di un anello commutativo noetheriano R e P è un ideale associato ad H, allora esiste $a \in R \setminus H$ tale che $P = (H : a)_R$. [*Suggerimento:* $P = \sqrt{Q}$ dove Q è un elemento di una decomposizione primaria minimale $\mathcal{D}$ di H. Applicare quanto provato prima all'R-(pre)modulo D/H, dove $D = \bigcap(\mathcal{D} \setminus \{Q\})$, tenendo presente che $P = \sqrt{(H : a)}$ per un $a \in D$.]

7.C.6. Siano K un campo, $K[X]$ un anello di polinomi nell'insieme infinito di indeterminate X ed M il suo ideale massimale (X). Scelto, per ogni $x \in X$, un intero $\lambda_x > 1$, l'ideale $Q = (x^{\lambda_x} \mid x \in X)$ è primario, ma il suo radicale M contiene propriamente $(H : a)_R$ per ogni $a \in R \setminus H$. Verificarlo.

7.C.7. Viene definita una nozione di primo associato ad un modulo, che non è sempre sovrapponibile a quella qui definita per ideali decomponibili.

Se M è un modulo su un anello commutativo unitario R, vengono chiamati primi associati ad M gli ideali primi che siano annullatori di un elemento non nullo di M. È chiara la relazione tra questa definizione ed il contenuto dell'esercizio 7.C.5: se R è noetheriano e $H \lhd R$, i primi associati ad H nel senso definito nel testo sono precisamente i primi associati all'R-modulo R/H nel senso appena definito in questa osservazione. L'esempio precedente mostra che questo non vale per ideali decomponibili di anello commutativo unitario (anche fattoriali) non noetheriani.

7.C.8. Esiste una teoria della decomposizione primaria per moduli noetheriani che corrisponde da vicino a (e nel caso noetheriano generalizza) quella della decomposizione primaria per ideali di un anello commutativo unitario. Per questa teoria si rimanda alla vastissima letteratura disponibile, ci limitiamo qui a dire che se R è un anello commutativo unitario, un R-modulo M è detto coprimario se ogni elemento di R che annulli un elemento non nullo di M appartiene al radicale di $\operatorname{Ann}_R(M)$; un sottomodulo proprio N di M tale che M/N sia coprimario è invece

detto primario. Si prova che ogni sottomodulo proprio di un modulo noetheriano è intersezione di un numero finito di sottomoduli primari, e per tali decomposizioni valgono risultati analoghi ai teoremi di unicità dimostrati in questo capitolo.

8 Anelli artiniani

La struttura degli anelli commutativi artiniani è piuttosto ristretta, in particolare nel caso degli anelli unitari che, come vedremo in questo capitolo, se artiniani si descrivono come particolari anelli noetheriani.

8.1 Ideali primi e massimali

Gli anelli commutativi artiniani hanno dimensione di Krull 0. Si ha infatti:

Lemma 8.1. *Sia R un anello commutativo artiniano. Allora:*
(i) *se R ha un elemento cancellabile a, allora R è unitario e ogni suo elemento cancellabile è invertibile;*
(ii) *se R è un dominio di integrità, allora R è un campo.*

Dimostrazione. È ovvio che (ii) segue da (i); basterà dunque provare (i). A questo scopo, sia a un elemento cancellabile di R. La successione di ideali $(a^n R)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n R = a^{n+1}R$. Per ogni $r \in R$ esiste allora $s \in R$ tale che $a^n r = a^{n+1}s$ e quindi, essendo a cancellabile, $r = as \in aR$. Abbiamo così $R = aR$ ed il lemma 1.21 mostra che R è unitario e $a \in \mathcal{U}(R)$. A questo punto la dimostrazione è completa. □

Lemma 8.2. *Sia R un anello commutativo artiniano. Allora R ha solo un numero finito di ideali di indice finito.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{J}$ l'insieme degli ideali di indice finito in R (vale a dire: degli ideali $H \lhd R$ tali che R/H sia finito). Allora $R \in \mathcal{J}$, quindi $\mathcal{J} \neq \varnothing$ ed esiste quindi in $\mathcal{J}$ un elemento L minimale rispetto all'inclusione. Per ogni $H \in \mathcal{J}$, evidentemente $R/(H \cap L)$ è finito, dunque $H \cap L \in \mathcal{J}$. Per la minimalità di L, allora $H \cap L = L$, vale a dire, $L \subseteq H$. Abbiamo così provato che $\mathcal{J}$ è l'insieme degli ideali di R contenenti L; dal momento che R/L è finito, questo insieme è finito. □

Proposizione 8.3. *Sia R un anello commutativo artiniano. Allora:*
(i) *ogni ideale primo di R è massimale;*
(ii) *l'insieme degli ideali massimali di R è finito.*

Dimostrazione. Sia $P \in \operatorname{Spec}(R)$. Allora R/P è un campo, per il lemma 8.1, quindi $P \lhd\cdot R$. Ciò prova la (i). Il lemma 3.7 mostra che ogni ideale massimale di R che non sia primo ha indice finito in R, quindi il lemma 8.2 implica che R non ha che un numero finito di tali ideali. Resta solo da verificare che $\operatorname{Spec}(R)$ è finito. Assumendo $\operatorname{Spec}(R) \neq \varnothing$, sia $\mathcal{J}$ l'insieme degli ideali che sono intersezione di un numero finito di ideali primi di R e sia H un suo elemento minimale; dunque $H = \bigcap \mathcal{P}$ per un opportuno sottoinsieme finito $\mathcal{P}$ di $\operatorname{Spec}(R)$. Per ogni $P \in \operatorname{Spec}(R)$ si ha $H \cap P \in \mathcal{J}$ e quindi, per la minimalità di H, ricaviamo $H \subseteq P$. Essendo P primo, allora, esiste $Q \in \mathcal{P}$ tale che $Q \subseteq P$, e quindi $P = Q$ perché $Q \lhd\cdot R$ per (i). Dunque $\operatorname{Spec}(R) = \mathcal{P}$, quindi anche $\operatorname{Spec}(R)$ è finito. Così è provata la (ii). □

Lemma 8.4. *Sia R un anello commutativo artiniano. Allora* $\operatorname{Jac}(R)$ *è nilpotente.*

Dimostrazione. Sia $J = \mathrm{Jac}(R)$. La successione $(J^n)_{n\in\mathbb{N}}$ di ideali di R è decrescente, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $J^n = J^{n+1}$. Ragionando per assurdo, supponiamo $J^n \neq 0$. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli ideali H di R tali che $H = HJ \neq 0$. Chiaramente $J^n \in \mathcal{S}$, quindi $\mathcal{S} \neq \varnothing$ ed esiste in $\mathcal{S}$ un elemento minimale H. Poiché $HJ^n = H \neq 0$, esiste $h \in H$ tale che $hJ^n \neq 0$. Ovviamente $hJ^n \lhd R$ e $(hJ^n)J = hJ^{n+1} = hJ^n$, quindi $hJ^n \in \mathcal{S}$. Ma $hJ^n \subseteq H$, quindi $hJ^n = H$ per la minimalità di H. Poiché $h \in H$, questo mostra in particolare che H è l'ideale generato da h; in particolare H è finitamente generato e da $HJ = H$ il lemma di Nakayama (3.23) fornisce la contraddizione $H = 0$. □

Un'ovvia conseguenza è che se R è un anello commutativo artiniano, $\mathrm{Jac}(R) \subseteq \mathrm{NilRad}(R)$ (l'inclusione può essere propria; si veda l'esempio 8.A.5). Dunque, ricordando la proposizione 3.21, abbiamo anche:

Corollario 8.5. *Sia R un anello commutativo unitario artiniano. Allora* $\mathrm{Jac}(R) = \mathrm{NilRad}(R)$.

8.2 La struttura degli anelli artiniani unitari

Arriviamo ora alla caratterizzazione degli anelli commutativi unitari artiniani annunciata all'inizio del capitolo.

Teorema 8.6. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora R è artiniano se e solo se R è noetheriano e ha dimensione di Krull* 0.

Dimostrazione. Sia R artiniano. Sappiamo dalla proposizione 8.3 che gli ideali primi di R sono tutti massimali (cioè: R ha dimensione 0) e sono in numero finito; sia J il loro prodotto.[1] Segue dal lemma 8.4 che vale $J^n = 0$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}$. Allora R è annullato da J^n, che è un prodotto di ideali massimali di R, quindi R è noetheriano per il lemma 6.7. Questo prova che la condizione è necessaria.

Viceversa, sia R un anello noetheriano di dimensione 0. Sia $\mathcal{D}$ una decomposizione primaria minimale dell'ideale nullo di R. Per ogni $Q \in \mathcal{D}$ sia $M_Q = \sqrt{Q}$; per ipotesi, $M_Q \lhd\cdot R$ ed inoltre, poiché R è noetheriano, il corollario 3.15 mostra che esiste $n_Q \in \mathbb{N}^+$ tale che $M_Q^{n_Q} \subseteq Q$. Abbiamo allora $\prod_{Q\in\mathcal{D}} M_Q^{n_Q} \subseteq \bigcap \mathcal{D} = 0$.[2] Applicando di nuovo il lemma 6.7, concludiamo da ciò che R è artiniano. □

La dimostrazione di quest'ultimo teorema ha una ulteriore conseguenza: ogni anello commutativo unitaro artiniano è, in modo unico, prodotto diretto di un numero finito di anelli locali:

Proposizione 8.7. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora R è artiniano se e solo se è isomorfo ad un prodotto diretto finito di anelli locali artiniani.*

Più precisamente, se R è un anello commutativo unitario artiniano, esiste uno ed un solo insieme finito $\mathcal{J}$ di ideali di R che, come anelli, sono locali, tale che $R = \bigoplus_{H\in\mathcal{J}} H$.

Dimostrazione. Se R è isomorfo ad un prodotto diretto del tipo descritto, è ovvio che R è artiniano. Sia, viceversa R artiniano; possiamo ovviamente assumere $R \neq 0$. Allora R è noetheriano e di dimensione zero, quindi il suo ideale nullo 0 è decomponibile e, inoltre, essendo gli ideali primi (ovvero massimali) di R a due a due non confrontabili, tutti gli ideali primi associati a 0 sono isolati. Segue dal secondo teorema di unicità che 0 ha una sola decomposizione primaria minimale in R, chiamiamola $\mathcal{D}$.

[1] anche se irrilevante per la dimostrazione, notiamo che $J = \mathrm{Jac}(R)$, dal momento che, come è ovvio, gli ideali massimali di R sono a due a due comassimali, quindi il loro prodotto ne è anche l'intersezione.

[2] probabilmente è un eccesso di scrupolo, ma specifichiamo che il simbolo $\prod$ si riferisce qui alla moltiplicazione tra ideali, non ad un prodotto diretto.

Per ogni $Q \in \mathcal{D}$, il radicale $\sqrt{Q}$ è l'unico ideale massimale di R contenente Q; pertanto R/Q è un anello locale. Inoltre, se Q_1 e Q_2 sono elementi distinti di $\mathcal{D}$, da $\sqrt{Q_1} \neq \sqrt{Q_2}$ segue che Q_1 e Q_2 sono comassimali (altrimenti $Q_1 + Q_2$ sarebbe contenuto in un ideale massimale contenente entrambi). Da questo fatto e da $\bigcap \mathcal{D} = 0$ segue che l'omomorfismo $r \in R \mapsto (r + Q)_{Q\in\mathcal{D}} \in \prod_{Q\in\mathcal{D}}(R/Q)$ descritto nel lemma 4.10 è un isomorfismo, sicché R è, come richiesto, un prodotto diretto di un numero finito di anelli (unitari) artiniani locali.

Resta da provare che, interpretata come somma diretta interna di ideali (locali), questa decomposizione diretta di R è unica. Sia $R = \bigoplus_{H\in\mathcal{J}} H$, dove $\mathcal{J}$ è un insieme finito di ideali di R e ogni $H \in \mathcal{J}$ è un anello locale. Per ogni $H \in \mathcal{J}$ siano J_H l'ideale massimale di H e $Q_H = \sum_{H\neq K\in\mathcal{J}} K$. Dal momento che $J_H = \operatorname{Jac}(H)$ è nilpotente per il lemma 8.4 e $M_H := Q_H + J_H \lhd R$ (ad esempio, perché $R/M_H \simeq H/J_H$), abbiamo $M_H = \sqrt{Q_H}$ e quindi il lemma 7.5 mostra che Q_H è primario in R. Sia $\mathcal{D}' = \{Q_H \mid H \in \mathcal{J}\}$; è chiaro che $\bigcap \mathcal{D}' = 0$, quindi $\mathcal{D}'$ è una decomposizione primaria di 0. Notiamo anche l'uguaglianza $H = \bigcap(\mathcal{D}' \smallsetminus \{Q_H\})$, per ogni $H \in \mathcal{J}$. Essa mostra, da una parte, che $\mathcal{J}$ è univocamente determinato da $\mathcal{D}'$, perché $\mathcal{J}$ risulta essere l'insieme di tutti gli ideali della forma $\bigcap(\mathcal{D}' \smallsetminus \{Q_H\})$ al variare di Q in $\mathcal{D}'$; dall'altra parte, la stessa uguaglianza mostra che $\mathcal{D}'$ è irridondante e quindi, evidentemente, minimale. Dunque $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, per quanto osservato all'inizio di questa dimostrazione, sicché $\mathcal{D}'$ è univocamente determinato da R e quindi lo stesso vale per $\mathcal{J}$. La proposizione è ora dimostrata. □

Un'estensione di questa proposizione al caso non unitario è riportata nell'osservazione 8.A.9.

Esercizi, Osservazioni, Esempi.

8.A.1. Duplicandone la dimostrazione, generalizzare il lemma 8.2 provando che ogni premodulo artiniano ha solo un numero finito di sottopremoduli di indice finito.

8.A.2. L'ipotesi che R sia unitario è essenziale per il teorema 8.6. Ad esempio, un anello che abbia un gruppo abeliano artiniano infinito (come un gruppo di Prüfer) come gruppo additivo e prodotto costante nullo è artiniano ma non noetheriano. Lo stesso discorso vale per l'implicazione inversa: in un anello con prodotto costante nullo non esistono ideali primi; se un tale anello R è infinito ma il suo gruppo additivo è finitamente generato (ad esempio, se è ciclico infinito), allora R è noetheriano e tutti gli ideali primi di R sono massimali, ma R non è artiniano.

8.A.3. Sempre in relazione al teorema 8.6, va menzionato il fatto che l'ipotesi di commutatività è invece meno rilevante. Infatti questo teorema ha un analogo nella teoria degli anelli unitari non necessariamente commutativi, il teorema di Hopkins-Levitzki che caratterizza gli anelli unitari artiniani come particolari anelli noetheriani (qui gli aggettivi 'artiniano' e 'noetheriano' sono riferiti a condizioni di catena sugli ideali destri).

8.A.4. Dedurre dal teorema 8.6 che ogni dominio di integrità unitario noetheriano di dimensione 1 (ad esempio, ogni anello principale) ha tutti i quozienti propri artiniani.

8.A.5. Come osservato, in un anello (commutativo) artiniano non unitario, il radicale di Jacobson è sempre contenuto nel nilradicale. Se R è un anello finito non nullo con prodotto costante nullo, allora $\operatorname{Jac} R \subset \operatorname{NilRad} R = R$.

8.A.6. Estendere il lemma 8.4 dimostrando che in ogni anello commutativo artiniano R il nilradicale è nilpotente. [Suggerimento: assumendo l'asserto falso, ragionando come nella dimostrazione del lemma 8.4, si può trovare un ideale finitamente generato H di R tale che $HN = H \neq 0$, dove $N = \operatorname{NilRad}(R)$. Il lemma 3.26 fornisce un elemento di N che agisce come l'identità su H; usarlo per ottenere $H = 0$.]

8.A.7. L'anello $\mathbb{Q}_{2'}$ è un anello commutativo unitario noetheriano con un solo ideale massimale e spettro finito, ma non è artiniano. Il suo radicale di Jacobson è ovviamente il suo ideale

massimale, e non coincide col nilradicale (in particolare, non è nilpotente), che è l'ideale nullo. Tutti gli anelli locali noetheriani che non siano campi verificano queste stesse proprietà.

8.A.8. La proposizione 8.7 riduce lo studio degli anelli commutativi unitari artiniani al caso degli anelli locali. Semplice esempi di anelli commutativi unitari artiniani locali sono i quozienti $K[x]/(x^n)$ dell'anello dei polinomi ad una indeterminata x su un campo K, dove n è un arbitrario intero positivo. (Perché questi anelli sono artiniani e locali?). Questo esempio mostra che, nella situazione in cui R sia un anello commutativo unitario artiniano locale con ideale massimale M il minimo intero positivo n tale che $M^n = 0$ può assumere valori arbitrari.

8.A.9. La proposizione 8.7 si generalizza al caso non unitario come segue: *sia R un anello commutativo artiniano. Allora R è, in modo unico a meno dell'ordine degli addendi, somma diretta tra un ideale che è nilpotente come anello ed il cui gruppo additivo è a condizione minimale ed un numero finito di anelli artiniani locali.*

In questi anelli, come è agevole verificare, ogni ideale proprio ha una ed una sola decomposizione primaria minimale.

8.3 Il teorema dell'intersezione di Krull e gli anelli locali noetheriani

Inseriamo qui un classico risultato dovuto a Krull. Benché esso non abbia applicazione diretta agli anelli artiniani, una delle sue conseguenza è che una proprietà di questi, la nilpotenza del radicale di Jacobson, si estende in forma indebolita agli anelli noetheriani.

Iniziamo da un lemma che ha per conseguenza il fatto che, nello studio dei premoduli noetheriani, a meno di effettuare un cambio di scalari ci si può spesso ridurre al caso in cui anche l'anello di scalari sia noetheriano.

Lemma 8.8. *Sia M un premodulo noetheriano sull'anello commutativo R. Allora $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Certamente M è generato, come R-premodulo, da un suo sottoinsieme finito F. Come mostra la proposizione 1.22, per ogni $x \in F$ abbiamo $R_R/H_x \simeq_R xR \leq_R M$, dove $H_x = \operatorname{Ann}_R(x)$, quindi R/H_x è noetheriano come R-premodulo e dunque come anello. Ma $\operatorname{Ann}_R(M) = \operatorname{Ann}_R(F) = \bigcap_{x\in F} H_x$, quindi segue dal lemma 6.5 che $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ è noetheriano. □

Teorema 8.9 (Teorema dell'intersezione di Krull)**.** *Siano R un anello commutativo, M un R-premodulo noetheriano, $H \lhd R$. Allora, se $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} MH^n$, si ha $IH = I$.*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare il teorema nel caso particolare in cui R sia noetheriano ed M sia un suo ideale. Supponiamo, per assurdo, $IH \subset I$, e sia $a \in I \setminus IH$. Sia $\mathcal{D}$ una decomposizione primaria minimale di IH in R. Poiché $a \notin IH$, esiste $Q \in \mathcal{D}$ tale che $a \notin Q$ (quindi $Q \neq R$). Ma $aH \subseteq IH \subseteq Q$, quindi $H \subseteq (Q : a)_R$. Dal momento che Q è primario, il lemma 7.2 prova $H \subseteq \sqrt{Q}$ e quindi, per il corollario 3.15, vediamo che esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $H^n \subseteq Q$. Ma allora $a \in I \subseteq MH^n \subseteq H^n \subseteq Q$, una contraddizione. Il teorema è così provato in questo primo caso.

Passiamo al caso generale. Il lemma 8.8 mostra che l'anello $\bar{R} := R/\operatorname{Ann}_R(M)$ è noetheriano. Come sappiamo, possiamo riguardare M come premodulo su $\bar{R}$ e, per il lemma 1.16, i suoi $\bar{R}$-sottopremoduli sono precisamente i suoi R-sottopremoduli. Sia ora $S = M \,{}_0{\ltimes}\, \bar{R}$ l'idealizzazione di M (si veda il teorema 1.37). Dunque, $S = M + \bar{R}$, dove $\bar{R}$ è un sottoanello di S e $M \lhd S$, inoltre $M^2 = 0$ e la moltiplicazione interna di S induce, per restrizione e riduzione, la moltiplicazione

esterna $M \times \bar{R} \to M$. Gli ideali di S contenuti in M sono esattamente gli $\bar{R}$- (ovvero gli R-) sottopremoduli di M, dunque M è S-noetheriano. Essendo $S/M \simeq \bar{R}$, concludiamo che anche S è noetheriano.

Sia $\bar{H} = (H + \operatorname{Ann}_R(M))/\operatorname{Ann}_R(M)$. Evidentemente $\bar{H} \lhd \bar{R}$ e quindi $H_1 := \bar{H} + M \lhd S$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $MH^n = M\bar{H}^n$; allora da $\bar{H}^n \subseteq H_1^n \subseteq \bar{H}^n + M$ e $MM = 0$ segue $MH_1^n = M\bar{H}^n = MH^n$. Di conseguenza $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} MH_1^n$. Applicando a S e ad i suoi ideali M e H_1 quanto provato nella prima parte della dimostrazione, abbiamo allora $I = IH_1$. Ma $IH_1 = I(\bar{H} + M) = I\bar{H} = IH$, quindi $I = IH$, come richiesto dall'enunciato. □

Osserviamo che il teorema dell'intersezione di Krull non vale per moduli non noetheriani, neanche nel caso in cui l'anello degli scalari sia noetheriano; l'esempio 8.B.2 fornisce un controesempio in cui questo anello è quello degli interi.

Proposizione 8.10. *Sia R un anello commutativo noetheriano, e sia $J = \operatorname{Jac}(R)$. Allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} J^n = 0$ ed R è isomorfo ad un sottoanello di $\prod_{n\in\mathbb{N}^+}(R/J^n)$ (ad un sottoanello unitario se R è unitario).*

Dimostrazione. Segue subito dal teorema 8.9 che se $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} J^n$ allora $IJ = I$. Ma allora il lemma di Nakayama fornisce $I = 0$. Il lemma 4.10 produce ora un monomorfismo $R \rightarrowtail \prod_{n\in\mathbb{N}^+}(R/J^n)$ di anelli (di anelli unitari se R è unitario). □

Il caso più importante della proposizione precedente è quello in cui R è un anello locale; in questo caso $M = \operatorname{Jac}(R)$ è il suo ideale massimale e si hanno due possibilità: o $M^n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, nel qual caso R non è artiniano, oppure M è nilpotente, nel qual caso, in conseguenza del lemma 6.7, R è un anello artiniano. Una versione più generale di questa situazione è suggerita nell'esercizio 8.B.3.

Esercizi.

8.B.1. Dimostrare che se R è un anello commutativo unitario artiniano infinito, allora R ha un ideale massimale di indice infinito.

8.B.2. Nel teorema dell'intersezione di Krull (teorema 8.9) è essenziale l'ipotesi che il modulo M sia noetheriano. Un esempio a riguardo si può ottenere come segue.

Siano p un numero primo e $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} \langle a_i\rangle$ un gruppo abeliano, dove, per ogni $i \in \mathbb{N}^+$, $\langle a_i\rangle$ è un sottogruppo ciclico di ordine p^i. È facile riconoscere che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n A = 0$; ad esempio perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $p^n A \subseteq \bigoplus_{n<i\in\mathbb{N}} \langle a_i\rangle$. Sia $\Omega = \langle p^{i-1}a_i \mid i \in \mathbb{N}^+\rangle \leq A$. Non è difficile (ma neanche essenziale) vedere che Ω è precisamente l'insieme degli elementi di A di periodo al più p. Ora,

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} \langle a_i\rangle}{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} \langle p^{i-1}a_i\rangle} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{\langle a_i\rangle}{\langle p^{i-1}a_i\rangle}\right)$$

e ciascuno dei gruppi $\langle a_i\rangle/\langle p^{i-1}a_i\rangle$ è ciclico di ordine p^{i-1}. Dunque $A/\Omega \simeq A$. Sia ora $B = \langle a_1 - p^{i-1}a_i \mid i \in \mathbb{N}^+\rangle$. È chiaro che $\Omega = B + \langle a_1\rangle$; inoltre $a_1 \notin B$ (gli elementi di B sono combinazioni lineari dei generatori $a_1 - p^{i-1}a_i$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$, dunque, se $a_1 \in B$ allora $a_1 = \sum_{i\in F} \lambda_i(a_1 - p^{i-1}a_i)$ per una parte finita F di $\mathbb{N}^+ \smallsetminus \{1\}$ e interi λ_i, ma dalla decomposizione di A in somma diretta segue $\lambda_i p^{i-1}a_i = 0$, cioè p divide λ_i, per ogni $i \in F$, una palese contraddizione). Allora $\Omega/B = \langle a_1 + B\rangle$ ha ordine p.

Sia ora $M = A/B$. Riguardiamo M come $\mathbb{Z}$ modulo; posto $H = p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$, calcoliamo $I := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} MH^n$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovviamente, $MH^n = p^n M = (p^n A + B)/B$, quindi $I = I_0/B$, dove $I_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(p^n A + B)$. Va dunque calcolato I_0. Poiché $A/\Omega \simeq A$, si ha $\Omega/\Omega = 0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n(A/\Omega) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(p^n A + \Omega/\Omega)$, quindi $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(p^n A + \Omega) \supseteq I_0$, vale a dire: $I \leq \Omega/B$. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal momento che $a_1 - p^n a_{n+1} \in B$, abbiamo

$a_1 + B = p^n(a_{n+1} + B) \in p^n M$, dunque $a_1 + B \in I$. Poiché $\Omega/B = \langle a_1 + B \rangle$, concludiamo $I = \Omega/B$. Ma $|\Omega/B| = p$, quindi $IH = pI = 0 \neq I$. In questo modo abbiamo mostrato che la conclusione del teorema 8.9 non vale per l'anello $\mathbb{Z}$, il suo ideale $p\mathbb{Z}$ e lo $\mathbb{Z}$-modulo M.

8.B.3. Sia R un anello commutativo noetheriano. Provare che R è artiniano se e solo se l'insieme degli ideali massimali di R è finito e $\mathrm{Jac}(R)$ è nilpotente.

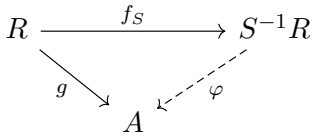
9 Anelli di frazioni

In questo capitolo viene presentata l'importante costruzione degli anelli di frazioni, che ha come caso particolarmente significativo quello delle localizzazioni di un anello.

9.1 Posizione del problema e costruzione

Sia S un sottoinsieme non vuoto di un anello commutativo R (in questa sezione considereremo queste notazioni fissate). Lo scopo della costruzione che stiamo per discutere è quello di ottenere un omomorfismo da R ad un anello commutativo unitario in modo che l'immagine di ogni elemento di S risulti invertibile, richiedendo allo stesso tempo che questo omomorfismo sia in un certo senso minimale ed universale per questa proprietà. Possiamo codificare queste richieste in termini di una proprietà universale per un certo tipo di omomorfismi.

Diciamo che un omomorfismo f di anelli da R ad un anello commutativo A è *S-inversivo* se e solo se A è unitario e $s^f \in \mathcal{U}(A)$ per ogni $s \in S$. In accordo con l'uso che abbiamo introdotto definendo (pre)moduli liberi ed algebre libere, diciamo anche che un omomorfismo S-inversivo f_S da R ad un anello commutativo unitario $S^{-1}R$ è universale se e solo se, per ogni anello commutativo unitario A ed ogni omomorfismo S-inversivo $g\colon R \to A$ esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli $\varphi\colon S^{-1}R \to A$ tale che $f_S\varphi = g$, cioè questo diagramma sia commutativo:



Sottintendendo il riferimento a f_S, chiameremo l'anello commutativo unitario $S^{-1}R$ un anello di frazioni (definito da S e da R). Come già visto per altre proprietà universali, si verifica facilmente che f_S e $S^{-1}R$ sono univocamente definiti a meno di isomorfismi. Più precisamente, se $f'\colon R \to R'$ è un altro omomorfismo S-inversivo universale, allora esiste un (unico) isomorfismo $\alpha\colon S^{-1}R \to R'$ tale che $f' = f_S\alpha$.

In modo più sintetico, possiamo riformulare la definizione in termini di prealgebre. Se R ed S sono come sopra, chiamiamo S-inversiva una prealgebra unitaria A su cui gli elementi di S agiscono tramite automorfismi (vale a dire: tale che l'immagine di S mediante l'azione di R-prealgebra su A sia costituita da automorfismi). Allora l'anello di frazioni $S^{-1}R$ ed il corrispondente omomorfismo S-inversivo f_S, appena definiti, non sono altro che una R-prealgebra unitaria S-inversiva universale ed il suo omomorfismo di struttura, dove l'aggettivo universale qui esprime la proprietà che per ogni R-prealgebra unitaria S-inversiva A esista uno ed un solo omomorfismo di R-prealgebre da $S^{-1}R$ ad A. Che questa seconda definizione sia equivalente alla prima segue da queste due osservazioni:

- la proposizione 1.25 garantisce che gli elementi di S agiscono su una R-prealgebra unitaria tramite automorfismi se e solo se l'omomorfismo di struttura della stessa prealgebra è S-inversivo.
- in conseguenza del lemma 1.1, l'omomorfismo φ che appare nella definizione di omomorfismo S-inversivo universale data sopra è unitario: con le notazioni usate lì $\operatorname{im}\varphi$ contiene $\operatorname{im} g$ e

quindi $S^{\vec{g}}$, un sottoinsieme non vuoto (per l'assunzione fatta su S) di $\mathcal{U}(A)$; la proposizione 1.28 mostra allora che lo stesso omomorfismo φ soddisfa la condizione di commutatività del diagramma se e solo se è un'omomorfismo di prealgebre unitarie (con omomorfismi di struttura f_S e g).

Già che ci siamo, osserviamo anche che, con le stesse notazioni, se R è unitario e f è un omomorfismo S-inversivo di dominio R, come appena fatto, possiamo ricorrere al lemma 1.1 per mostrare che f è necessariamente un omomorfismo di anelli unitari. In modo equivalente: se R è unitario, le R-prealgebre unitarie S-inversive sono in effetti R-algebre.

Prima di affrontare il problema dell'esistenza degli oggetti qui definiti, conviene fare alcune esempi ed osservazioni generali.

In alcuni casi il problema ha soluzione banale, o per lo meno già nota. Lasciando ancora invariate le notazioni:

- se (R è unitario e) $S \subseteq \mathcal{U}(R)$, allora l'applicazione identica di R è, come si vede senza difficoltà, S-inversiva universale;[1] basta dunque porre $S^{-1}R = R$ e $f_S = \mathrm{id}_R$.
- Se $0_R \in S$ e $f\colon R \to A$ è un omomorfismo S-inversivo, allora $A = 0$ è un anello nullo, dal momento che $0_A = 0_R^f$ deve essere invertibile in A. Da ciò segue anche, banalmente, che ogni omomorfismo da R ad un anello nullo è S-inversivo universale.
- Se R è un dominio di integrità e $0_R \notin S$, possiamo definire $S^{-1}R$ come il sottoanello del campo dei quozienti di R generato da $R \cup \{s^{-1} \mid s \in S\}$ e f_S come l'immersione ι di R in questo anello. È infatti facile provare che tale ι è S-inversivo universale (esercizio 9.A.1).

È anche utile notare che se R è unitario e f è un omomorfismo S-inversivo di dominio R, allora f è necessariamente un omomorfismo di anelli unitari. Questo segue dal lemma 1.1 perché $S \neq \varnothing$ e quindi $\operatorname{im} f$ contiene elementi invertibili (le immagini degli elementi di S). Per lo stesso motivo, indipendentemente dal fatto che R sia unitario o meno, anche l'omomorfismo φ che appare nella definizione di omomorfismo S-inversivo universale data sopra è unitario: con le notazioni usate lì $\operatorname{im}\varphi$ contiene $\operatorname{im} g$ e quindi $S^{\vec{g}}$, un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{U}(A)$.

Un'osservazione cruciale è la seguente:

Lemma 9.1. *Con le notazioni fissate, indichiamo con $S^\uparrow$ e $S^\updownarrow$, rispettivamente, la parte chiusa generata e la saturazione di S in $(R, \cdot)$. Allora per un omomorfismo di anelli $f\colon R \to A$ sono equivalenti le proprietà di essere S-inversivo, $S^\uparrow$-inversivo, $S^\updownarrow$-inversivo. Di conseguenza, per f sono equivalenti le proprietà di essere S-inversivo universale, $S^\uparrow$-inversivo universale, $S^\updownarrow$-inversivo universale.*

Dimostrazione. Da $S \subseteq S^\uparrow \subseteq S^\updownarrow$ segue che un omomorfismo f di dominio R è S-inversivo se è $S^\uparrow$-inversivo ed è $S^\uparrow$-inversivo se è $S^\updownarrow$-inversivo. Viceversa, se $f\colon R \to A$ è S-inversivo e $a \in S^\updownarrow$, allora a è un divisore di un prodotto di elementi di S (si veda quanto nella sezione 2.3), quindi a^f divide un prodotto di elementi di $S^{\vec{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$ ed è dunque invertibile in A. Questo prova la prima parte dell'enunciato; la seconda ne è immediata conseguenza. □

Passiamo ora alla costruzione di $S^{-1}R$. Alla luce del lemma precedente possiamo sostituire S con la parte chiusa che esso genera ed assumere quindi che S sia un sottosemigruppo (cioè una parte chiusa non vuota) di $(R, \cdot)$. Questo rende più semplice la costruzione, che generalizza quella, già nota, del campo dei quozienti di un dominio di integrità.

Nell'insieme $R \times S$ consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ definita da:

$$(\forall x, y \in R)(\forall s, t \in S) \qquad \big((x, s) \sim (y, t) \iff (\exists a \in S)(xta = ysa)\big).$$

[1] in effetti, se $S \subseteq \mathcal{U}(R)$ gli omomorfismi di anelli di dominio R che siano S-inversivi sono precisamente quelli unitari.

Che si tratti effettivamente di una relazione di equivalenza è facile da verificare: le proprietà riflessiva e simmetrica sono ovvie, per la transitività osserviamo che se $x, y, z \in R$ e $s, t, u \in S$ sono tali che $(x, s) \sim (y, t)$ e $(y, t) \sim (z, u)$, allora $xta = ysa$ e $yub = ztb$ per opportuni $a, b \in S$, e quindi $xutab = yusab = ztsab$, dunque $x \sim z$, perché $tab \in S$ (vediamo qui il vantaggio dell'aver assunto che S sia chiusa per moltiplicazione).

Per ogni $x \in R$ e $s \in S$ indichiamo con x/s la classe $[(x, s)]_\sim$, e notiamo subito che $x/s = xt/st$ per ogni $t \in S$. Definiamo come $S^{-1}R$ l'anello di sostegno $(R \times S)/\sim$, con operazioni $+$ (additiva) e $\cdot$ (moltiplicativa) definite ponendo, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st} \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st}.$$

Verifichiamo che queste operazioni sono ben definite. Dal momento che R è commutativo, basta verificare che $(xt + ys)/st = (x't + ys')/s't$ e $xy/st = x'y/s't$ per ogni $x, x', t \in R$ e $s, s', t \in S$ tali che $x/s = x'/s'$. In effetti, sotto quest'ultima condizione, esiste $a \in S$ tale che $xs'a = x'sa$, quindi $(xt + ys)s'ta = (x't + ys')sta$ (dunque $(xt + ys)/st = (x't + ys')/s't$) e $xys'ta = x'ysta$ (dunque $x/s = x'/s'$); la verifica è così completa.

È chiaro che le operazioni appena definite in $S^{-1}R$ sono entrambe associative e commutative, e che, per ogni $s \in S$, le frazioni $0_R/s$ e s/s sono elementi neutri per $+$ e $\cdot$, nell'ordine. L'ovvia regola di calcolo $(x/s) + (y/s) = (x + y)/s$ per ogni $x, y \in R$ e $s \in S$ rende semplice verificare sia che $(S^{-1}R, +)$ è un gruppo (ogni $x/s \in S^{-1}R$ ha per opposto $(-x)/s$) che la distributività di $\cdot$ rispetto a $+$: per ogni $x, y, z \in R$ e $s, t, u \in S$,

$$\left(\frac{x}{s} + \frac{y}{t}\right) \cdot \frac{z}{u} = \frac{xt + ys}{st} \cdot \frac{z}{u} = \frac{xtz + ysz}{stu} = \frac{xtz}{stu} + \frac{ysz}{stu} = \frac{xz}{su} + \frac{yz}{tu} = \frac{x}{s} \cdot \frac{z}{u} + \frac{y}{t} \cdot \frac{z}{u}.$$

Abbiamo così strutturato $S^{-1}R$ come anello commutativo unitario. Fissato un elemento $s \in S$, consideriamo l'applicazione

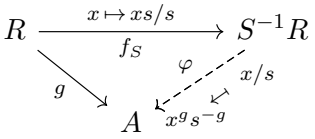
$$f_S \colon x \in R \longmapsto xs/s \in S^{-1}R.$$

Per ogni $x \in R$ e $s, t \in S$ abbiamo $xs/s = xst/st = xt/t$, dunque f_S è indipendente dalla scelta di s. Si riconosce senza difficoltà che f_S è un omomorfismo di anelli. Inoltre f_S è S-inversivo, perché, per ogni $s \in S$, si ha che $s^{f_S} = s^2/s$ è invertibile in $S^{-1}R$, con inverso s/s^2. Resta da provare che f_S è universale. Siano A un anello commutativo unitario e $g \colon R \to A$ un omomorfismo S-inversivo di anelli. Dobbiamo dimostrare che esiste uno ed un solo omomorfismo di anelli $\varphi \colon S^{-1}R \to A$ tale che $f_S\varphi = g$. Se φ ha questa proprietà, per ogni $x \in R$ e $s \in S$ si deve avere $x^g = x^{f_S\varphi} = (xs/s)^\varphi$, quindi anche $(s^2/s)^\varphi = s^g$. Ora, come già osservato, dal momento che s^g è un elemento invertibile di A appartenente a $\operatorname{im}\varphi$, il lemma 1.1 mostra che φ deve esser un omomorfismo di anelli unitari, quindi $(s/s^2)^\varphi = ((s^2/s)^{-1})^\varphi = ((s^2/s)^\varphi)^{-1} = (s^g)^{-1}$ ed infine $(x/s)^\varphi = (xs/s)^\varphi(s/s^2)^\varphi = x^g(s^g)^{-1}$. Dunque, esiste al più un omomorfismo con le proprietà richieste per φ: l'unico possibile candidato è l'applicazione

$$x/s \in S^{-1}R \longmapsto x^g(s^g)^{-1} \in A,$$

ammesso che questa sia ben definita. Per verificare che lo è, iniziamo con l'osservare che, per ogni $s \in S$, esiste $(s^g)^{-1}$ in A, perché g è S-inversivo. Siano poi $x, y \in R$ e $s, t \in S$ tali che $x/s = y/t$, vale a dire: $xta = ysa$ per un opportuno $a \in S$. Allora $x^g t^g a^g = y^g s^g a^g$, ed essendo a^g invertibile e quindi cancellabile in A, $x^g t^g = y^g s^g$; dunque $x^g(s^g)^{-1} = y^g(t^g)^{-1}$. Ciò prova che la nostra applicazione, che d'ora in poi chiamiamo φ, è ben definita. Ovviamente, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$, si ha $((x/s) + (y/t))^\varphi = ((xt + ys)/st)^\varphi = (x^g t^g + y^g s^g)(s^g)^{-1}(t^g)^{-1} = x^g(s^g)^{-1} + y^g(t^g)^{-1} = (x/s)^\varphi + (y/t)^\varphi$ e $((x/s) \cdot (y/t))^\varphi = (xy/st)^\varphi = x^g y^g (s^g)^{-1}(t^g)^{-1} = (x/s)^\varphi(y/t)^\varphi$ quindi φ è un

omomorfismo di anelli; inoltre $x^{f_S\varphi} = (xs/s)^{\varphi} = (xs)^g(s^g)^{-1} = x^g$, sicché $f_S\varphi = g$.



Riassumendo, abbiamo dimostrato che, per ogni anello commutativo unitario R e ogni suo sottoinsieme non vuoto S esistono, e sono unici a meno di isomorfismi, un anello $S^{-1}R$ ed un omomorfismo S-inversivo $f_S\colon R \to S^{-1}R$ che sia universale, nel senso definito all'inizio di questa sezione. Chiameremo l'anello $S^{-1}R$ un *anello di frazioni* (ottenuto da R e S) e f_S omomorfismo S-universale (o semplicemente universale).

Supponendo ancora che S sia un sottosemigruppo in $(R, \cdot)$, osserviamo che $S^{-1}R$ è costituito dalle *frazioni* x/s al variare di $x \in R$ e $s \in S$, ma $x/s = (xs/s)(s/s^2) = (xs/s)(s^2/s)^{-1}$, dunque $S^{-1}R = \{(s^{f_S})^{-1}x^{f_S} \mid s \in S \wedge x \in R\}$, il che rende in un certo senso conto del simbolo usato per denotare questo anello. Ovviamente la rappresentazione delle frazioni non è, in generale, unica; ad esempio lo zero e l'unità di $S^{-1}R$ si possono rappresentare come $0_R/s$ e s/s per ogni $s \in S$ e, come stiamo per vedere, anche in altri modi.

Elementi in anelli di frazioni. Alcuni casi particolari

Lemma 9.2. *Siano R un anello commutativo e S un sottosemigruppo di $(R, \cdot)$. Allora il nucleo dell'omomorfismo universale $f_S\colon R \to S^{-1}R$ è*

$$\ker f_S = \bigcup_{a \in S} \operatorname{Ann}_R(a).$$

Inoltre, per ogni $x \in R$ e $s \in S$:

(i) *$x/s = 0_{S^{-1}R}$ se e solo se $x \in \ker f_S$;*
(ii) *$x/s = 1_{S^{-1}R}$ se e solo se $x - s \in \ker f_S$;*
(iii) *se x/s è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora x è un divisore dello zero in R;*
(iv) *x/s è invertibile in $S^{-1}R$ se e solo se x appartiene alla saturazione $S^{\updownarrow}$ di S;*
(v) *per ogni $t, u \in S$, sia x/t che xu/t sono associati, in $S^{-1}R$, a x/s ed a $x^{f_S} = xs/s$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in R$ e $s \in S$. Iniziando dalla fine, se $t, u \in S$ si ha: $x/s = (x/t)(t/s) = (xu/t)(t/su)$, e, evidentemente, $t/s, t/su$ sono invertibili in $S^{-1}R$, con inversi s/t e su/t. Da ciò segue la (v), che ha per anche conseguenza: $x \in \ker f_S \iff xs/s = 0_{S^{-1}R} \iff x/s = 0_{S^{-1}R}$, provando così la (i). Ora, $0_{S^{-1}R} = 0_R/s$, quindi $x/s = 0_{S^{-1}R}$ se e solo se esiste $a \in S$ tale che $xsa = 0_R sa = 0_R$; dal momento che $sa \in S$ questo equivale a $x \in \bigcup_{a \in S} \operatorname{Ann}_R(a)$; otteniamo così la descrizione di $\ker f_S$ nell'enunciato.

Abbiamo $1_{S^{-1}R} = s/s$, quindi $x/s = 1_{S-1}R$ se e solo se $x/s = s/s$, ovvero $x - s \in \ker f_S$; vale dunque (ii). Se invece x/s è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora esistono $y \in R$ e $t \in S$ tali che $xy/st = (x/s)(y/t) = 0_R/s \neq y/t$, dunque esiste $a \in S$ tale che $xya = 0_R \neq ya$, quindi x è un divisore dello zero in R. Abbiamo così provato (iii).

Resta da provare (iv). Sia x/s invertibile. Allora esistono $y \in R$ e $t \in S$ tali che $xy/st = (x/s)(y/t) = 1_{S^{-1}R} = s/s$, vale a dire: $xysa = ts^2a$ per qualche $a \in S$. Ma allora x divide $ts^2a \in S$, quindi $x \in S^{\updownarrow}$. Viceversa, se $x \in S^{\updownarrow}$ allora esiste $y \in R$ tale che $xy \in S$, dunque esiste la frazione ys/xy e $1_{S^{-1}R} = xys/xys = (x/s)(ys/xy)$ e $x/s \in \mathcal{U}(S^{-1}R)$. A questo punto la dimostrazione è completa. □

Corollario 9.3. *Siano R un anello commutativo e $\varnothing \neq S \subseteq R$. Allora l'omomorfismo S-inversivo universale $f_S\colon R \to S^{-1}R$ è iniettivo se e solo se tutti gli elementi di S sono cancellabili in R.*

Dimostrazione. È facile verificare (esercizio 2.C.4) che la saturazione di S è costituita da elementi cancellabili se e solo se lo è S, quindi si può assumere che S sia un sottosemigruppo di $(R,\cdot)$; in questo caso l'asserto segue subito dal lemma 9.2. □

Vediamo ora un caso in cui f_S è suriettivo, e quindi $S^{-1}R$ risulta essere, a meno di isomorfismi, un quoziente di R. Ad esempio, questo accade sempre se R è finito.

Lemma 9.4. *Siano R un anello commutativo e S un sottosemigruppo di $(R,\cdot)$. Supponiamo che S abbia un elemento m che sia multiplo (in $(R,\cdot)$) di ogni elemento di S (questa ipotesi è verificata se S è finito). Allora l'omomorfismo S-inversivo universale $f_S\colon R\to S^{-1}R$ è suriettivo e $S^{-1}R\simeq R/\operatorname{Ann}_R(m)$.*

Dimostrazione.[2] Assunta l'ipotesi su m, per ogni $x\in S$ fissiamo un elemento $x'\in R$ tale che $xx'=m$. Per ogni $r\in R$ e $s\in S$, posto $y=s'(m^2)'$ abbiamo $sym=m^2(m^2)'=m$, quindi $r/s=(rym)/m=(ry)^{f_S}$. Pertanto f_S è suriettiva. Ora, per ogni $s\in S$ si ha $\operatorname{Ann}_R(s)\subseteq\operatorname{Ann}_R(m)$, perché s divide m, dunque $\ker f_S=\bigcup\{\operatorname{Ann}_R(s)\mid s\in S\}=\operatorname{Ann}_R(m)$ per il lemma 9.2; sicché $S^{-1}R\simeq R/\operatorname{Ann}_R(m)$, come richiesto.

Giustifichiamo infine l'osservazione posta tra parentesi nell'enunciato: se S è finito $\prod_{s\in S}s$ ha ovviamente la proprietà richiesta per m. □

Oltre a quello in cui S è finito, un altro caso in cui S ha un elemento con la proprietà richiesta per m nel lemma 9.4 è quello in cui $0_R\in S$; in questo caso il lemma è però assolutamente banale, dal momento che $S^{-1}R=0$. Per una situazione più generale si veda l'esercizio 9.A.12.

Come applicazione descriviamo gli anelli di frazioni dei quozienti di $\mathbb{Z}$. Fissiamo un po' di notazioni: indichiamo con $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi positivi e, per ogni $n\in\mathbb{N}$, con $\pi(n)$ l'insieme dei $p\in\mathbb{P}$ che dividono n. Per ogni $\pi\subseteq\mathbb{P}$ poniamo $\pi'=\mathbb{P}\setminus\pi$ e chiamiamo π-numero un intero positivo tale che $\pi(n)\subseteq\pi$ (dunque, l'insieme dei π-numeri è il sottomonoide di $(\mathbb{N}^+,\cdot)$ generato da π). Per ogni $n\in\mathbb{N}$, indichiamo infine con n_π la π-parte di n, cioè il massimo divisore di n che sia un π-numero; si avrà ovviamente $n=n_\pi n_{\pi'}$.

Proposizione 9.5. *Siano n un intero positivo e S una parte di $\mathbb{Z}_n$. Sia T un insieme completo di rappresentanti degli elementi di S (dunque $S=\{[a]_n\mid a\in T\}$). Allora, se $\pi=\bigcup_{a\in T}\pi(a)$, si ha $S^{-1}\mathbb{Z}_n\simeq\mathbb{Z}_d$, dove $d=n_{\pi'}$ è il massimo π'-numero divisore di n.*

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma 9.4 che $S^{-1}\mathbb{Z}_n$ è isomorfo ad un quoziente di $\mathbb{Z}_n$, quindi $S^{-1}\mathbb{Z}_n\simeq\mathbb{Z}_\ell$ per qualche divisore positivo ℓ di n. Inoltre, per ogni $p\in\pi$, $[p]_n$ divide almeno un elemento di S, quindi $[p]_n\in\hat{S}$. Pertanto $[n_\pi]_n\in\hat{S}$. Ma $n=dn_\pi$, quindi $[d]_n\in\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}_n}([n_\pi]_n)$ e, per il lemma 9.2, $[n_{\pi'}]_n\in\ker f_S$, dove f_S è l'omomorfismo S-inversivo universale $\mathbb{Z}_n\to S^{-1}\mathbb{Z}_n$. Di conseguenza ℓ divide d.

D'altra parte, l'epimorfismo $g\colon[a]_n\in\mathbb{Z}_n\mapsto[a]_d\in\mathbb{Z}_d$ è S-inversivo, dal momento che ogni $a\in T$, essendo un π-numero, è coprimo con d. Dunque, per la proprietà universale, esiste un omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon S^{-1}\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_d$ tale che $g=f_S\varphi$. Poiché g è suriettivo, φ è suriettivo, quindi d divide ℓ. Concludiamo che ℓ coincide con d, ottenendo così l'asserto. □

[2] una dimostrazione alternativa è suggerita nell'esercizio 9.A.10

Esercizi e Osservazioni.

9.A.1. Verificare in dettaglio che, come osservato nella prima parte di questa sezione, quando R è un dominio di integrità e $0_R \notin S$, detto T il sottoanello generato da R e da $\{s^{-1} \mid s \in S\}$ nel campo dei quozienti di R, l'immersione $R \hookrightarrow T$ è un omomorfismo S-inversivo universale e dunque $S^{-1}R \simeq T$.

9.A.2. Nel caso in cui R sia un dominio di integrità e $S = R \setminus \{0_R\}$, l'anello di frazioni $S^{-1}R$ si può identificare con il campo dei quozienti di R. In effetti la costruzione che di $S^{-1}R$ abbiamo appena effettuato coincide, in questo caso, proprio con quella usuale del campo dei quozienti, dal momento che, con le notazioni utilizzate per la nostra costruzione, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$ si ha $(x, s) \sim (y, t)$ se e solo se $xt = ys$.

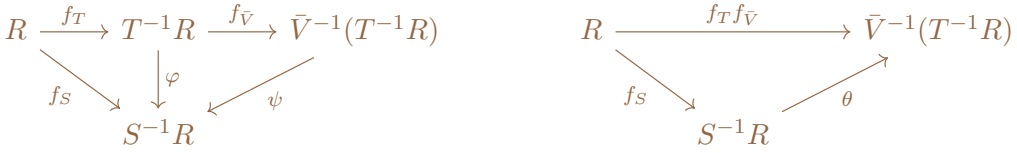
9.A.3. Come indicato dal corollario 9.3, f_S non è iniettivo nel caso in cui S abbia tra i suoi elementi un divisore dello zero s. Possiamo spiegarci cosa succede in questo caso in un modo molto diretto. Se $f\colon R \to A$ è un omomorfismo S-inversivo e $r \in \operatorname{Ann}_R(s)$, allora $s^f r^f = (0_R)^f = 0_A$, quindi, essendo s^f invertibile, $r^f = 0_A$. Per questo motivo $\operatorname{Ann}_R(s)$ è contenuto nel nucleo di ogni omomorfismo S-inversivo con dominio R, quindi nessun tale omomorfismo può essere iniettivo; questo vale in particolare anche per f_S.

9.A.4. Per un arbitrario anello commutativo unitario R ed un suo sottoinsieme S, provare che $S^{-1}R$ è l'anello nullo se e solo se $0 \in S^{\uparrow}$.

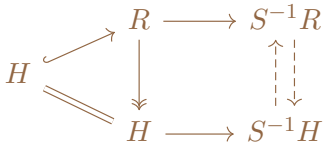
9.A.5. Nella situazione del lemma 9.2, verificare che x/s è un divisore dello zero (risp. nilpotente) in $S^{-1}R$ se e solo se $x + \ker f_S$ ha la stessa proprietà in $R/\ker f_S$. Completare il discorso fornendo un esempio di un anello commutativo unitario A ed un suo sottoanello unitario B che sia integro ma contenga un elemento non nullo che sia un divisore dello zero in A.

9.A.6. Con le notazioni che stiamo usando (ma qui S è inteso come arbitraria parte non vuota di R), supponiamo che S sia l'unione di due sottoinsiemi non vuoti T e V. Allora $S^{-1}R$ si può ottenere in due passaggi successivi: costruendo $T^{-1}R$ e poi l'anello di frazioni ottenuto da questo anello e dall'immagine in esso di V. In modo più esplicito, $S^{-1}R \simeq \bar{V}^{-1}(T^{-1}R)$, dove $\bar{V} = V^{\vec{f}_T}$, e, una volta identificato $S^{-1}R$ con $\bar{V}^{-1}(T^{-1}R)$, si ha $f_S = f_T f_V$.

Per provarlo, si può fare riferimento ai diagrammi commutativi qui disegnati, osservando che f_S è T-inversivo, il che permette di usare la proprietà universale per definire φ, e che poi φ risulta $\bar{V}$-inversivo, la qual cosa permette di costruire ψ. Inoltre $f_T f_{\bar{V}}$ è S-inversivo, e usando questo fatto si può definire θ. Completare la dimostrazione provando che ψ e θ sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.



9.A.7. Sia $R = H \oplus K$ un anello commutativo somma diretta dei suoi ideali H e K, e sia $\varnothing \neq S \subseteq H$. Provare che $S^{-1}R$ è isomorfo a $S^{-1}H$, ragionando sul diagramma:



dove le frecce $\hookrightarrow$ e $\twoheadrightarrow$ rappresentano l'immersione e la proiezione canonica relative alla decomposizione di R in somma diretta e le frecce orizzontali sono gli omomorfismi S-inversivi universali.

9.A.8. Siano X un insieme e Y una sua parte. Descrivere l'anello di frazioni $\{Y\}^{-1}\mathcal{P}(X)$. Se Z è un altro sottoinsieme di X, descrivere $\{Y, Z\}^{-1}\mathcal{P}(X)$.

9.A.9. Sia R un sottoanello dell'anello commutativo A e $\varnothing \neq S \subseteq R$. Verificare che l'applicazione $x/s \in S^{-1}R \mapsto x/s \in S^{-1}A$ è un omomorfismo iniettivo; si può dunque realizzare $S^{-1}R$ come sottoanello di $S^{-1}A$ e l'omomorfismo S-inversivo universale $R \to S^{-1}R$ come ridotta della restrizione dell'omomorfismo S-inversivo universale $A \to S^{-1}A$. L'asserto non è del tutto ovvio: la frazione x/s in $S^{-1}R$ e l'omologa frazione x/s in $S^{-1}A$ non sono lo stesso oggetto: se assumiamo S chiusa rispetto alla moltiplicazione in R e quindi a quella in A, la prima è una classe di equivalenza in $R \times S$, la seconda in $A \times S$; anche il fatto che l'applicazione indicata sia ben definita richiede una giustificazione (la si può ottenere utilizzando la proprietà universale discussa in questa sezione, o in altri modi). Quello che viene qui stabilito è che la relazione di equivalenza che definisce l'anello di frazioni su R si può riguardare come indotta via inclusione da quella che definisce $S^{-1}A$.

9.A.10. Dimostrare in modo alternativo il lemma 9.4 ragionando come segue. Sia $I = \operatorname{Ann}_R(m)$. Dal fatto che sia m che m^2 sono divisori di m in R, dedurre che R/I è unitario e $m + I$ ne è un elemento invertibile. Visto questo, mostrare che l'epimorfismo canonico $R \twoheadrightarrow R/I$ è S-inversivo universale.

Si può riguardare quest'argomentazioe come una rivisitazione *a posteriori* della dimostrazione fornita per il lemma 9.4.

9.A.11. Sempre a riguardo del lemma 9.4, si noti che esiste un isomorfismo di R-(pre)moduli tra mR (ideale di R) e $S^{-1}R$ (che ha una ovvia struttura di R-modulo, quella definita da f_S nel senso descritto nell'esempio 1.F.4).

9.A.12. Sia e un elemento idempotente dell'anello commutativo R. Utilizzando i lemmi 4.6 e 9.4, provare che $\{e\}^{-1}R$ è isomorfo (come anello!) a eR.

9.A.13. Dall'osservazione fatta appena prima del lemma 9.1 segue che, con le solite notazioni, f_S è universale anche come omomorfismo S-inversivo di anelli *unitari*, nel senso che ha questa proprietà: per ogni omomorfismo S-inversivo g di anelli (commutativi) unitari, esiste uno ed un solo omomorfismo φ di anelli unitari tale che $g = f_S\varphi$. Dunque, se volessimo definire una nozione di anello di frazioni facendo riferimento alla categoria degli anelli unitari piuttosto che a quella degli anelli, non otterremmo niente di diverso da ciò che abbiamo ottenuto.

9.2 Ideali negli anelli di frazioni. Localizzazioni.

Iniziamo con una osservazione piuttosto ovvia:

Lemma 9.6. *Sia R un anello commutativo e sia H un suo ideale primo (risp. primario). Se A è un sottoanello di R che contenga propriamente H, H è un ideale primo (risp. primario) in A.*

Dimostrazione. Ovviamente $H \lhd A$. Sia a un divisore dello zero in A/H. Allora a è un divisore dello zero in R/H, quindi a è zero se H è primo in R, nilpotente se H è primario. Da ciò segue l'asserto. □

Lemma 9.7. *Sia $f\colon R \to A$ un omomorfismo di anelli, con R e A entrambi commutativi. Siano B un ideale di A e $H = B^{\overleftarrow{f}}$ la sua antiimmagine mediante f. Allora:*

(i) *$H \lhd R$;*
(ii) *$\sqrt{H} = (\sqrt{B})^{\overleftarrow{f}}$;*
(iii) *se B è primo e $H \neq R$, H è primo;*
(iv) *se B è primario e $H \neq R$, H è primario.*

Se R e A sono unitari e f è un omomorfismo di anelli unitari, allora $H \subset R$ se $B \subset A$, quindi se B è primo o primario, H ha la stessa proprietà.

Dimostrazione. Componendo f con l'epimorfismo canonico $\nu\colon A \twoheadrightarrow A/B$ otteniamo un omomorfismo di anelli $f\nu\colon R \to A/B$ di nucleo H. Dunque, $H \lhd R$. Per ogni $r \in R$ si ha $r \in \sqrt{H} \iff (\exists n \in \mathbb{N}^+)(r^n \in H) \iff (\exists n \in \mathbb{N}^+)((r^n)^f \in B) \iff (\exists n \in \mathbb{N}^+)((r^f)^n \in B) \iff r^f \in \sqrt{B}$. Sono così provate (i) e (ii). Inoltre R/H è isomorfo al sottoanello $\operatorname{im} f\nu = (\operatorname{im} f + B)/B$ di A/B. Supponiamo $H \neq R$. Allora $B \neq \operatorname{im} f + B$, quindi, come stabilito nel lemma 9.6, se B è primo (risp. primario) in A, allora lo è anche in $\operatorname{im} f + B$, dunque l'isomorfismo $R/H \simeq (\operatorname{im} f + B)/B$ mostra che H è primo (risp. primario) in R.

Infine, se f è un omomorfismo di anelli unitari e $B \neq A$, dal momento che $1_A \notin B$ si ha $1_R \notin H$, il che prova l'ultima parte dell'enunciato. □

Con le notazioni del lemma 9.7, H viene talvolta chiamato la contrazione di B rispetto a f. La nozione corrispondente, in termini di immagine anziché di antiimmagine è quella di espansione (chiamata anche estensione, termine che evitiamo per prevenire possibile confusione con la nozione standard di estensione tra moduli): l'espansione di un ideale I di R rispetto ad f è l'ideale di A generato dall'immagine di I. Va notato che l'immagine di un ideale mediante un omomorfismo (non suriettivo) non è in generale un ideale; ad esempio, se f è l'immersione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ed I è un ideale non nullo di $\mathbb{Z}$, l'immagine di I mediante f (cioè I stesso) non è un ideale di $\mathbb{Q}$. In queste note useremo questa terminologia (parleremo cioè di contrazioni ed espansioni) esclusivamente con riferimento all'omomorfismo universale da un anello ad un suo anello di frazioni.

Fissiamo dunque un anello commutativo R e una sua parte $S \neq \varnothing$; sia $f_S\colon R \to S^{-1}R$ il corrispondente omomorfismo S-universale. Per ogni $H \lhd R$ e $K \lhd S^{-1}R$ chiamiamo *espansione* di H, indicata con H^e, l'ideale di $S^{-1}R$ generato da $H^{\vec{f}_S}$, vale a dire $H^{\vec{f}_S}(S^{-1}R)$, mentre la *contrazione* K^c di K è l'antiimmagine di K mediante f_S. Otteniamo così due applicazioni

$$e\colon \mathfrak{I}(R) \to \mathfrak{I}(S^{-1}R), \qquad\qquad c\colon \mathfrak{I}(S^{-1}R) \to \mathfrak{I}(R)$$

tra gli insiemi degli ideali di R e di $S^{-1}R$. La descrizione dettagliata di queste applicazioni è di grande importanza per lo studio degli anelli di frazioni. È ovvio che, considerati $\mathfrak{I}(R)$ e $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ come insiemi ordinati (dalla relazione di inclusione), e e c sono entrambe crescenti.

Lemma 9.8. *Con le notazioni appena fissate, se S è un sottosemigruppo di $(R, \cdot)$, per ogni $H \lhd R$ e $K \lhd S^{-1}R$ si ha:*
(i) $H^e = \{h/s \mid h \in H \wedge s \in S\}$;
(ii) $K^{ce} = K$;
(iii) $H^{ec} = \bigcup_{a\in S}(H : a) = \{r \in R \mid (\exists a \in S)(ra \in H)\} \supseteq H$;
(iv) $H^e \neq S^{-1}R \iff H \cap S = \varnothing \iff \sqrt{H} \cap S = \varnothing \iff (\sqrt{H})^e \neq S^{-1}R$.
Dunque, $ce = \mathrm{id}_{\mathfrak{I}(S^{-1}R)}$; di conseguenza c è iniettiva ed e è suriettiva. Come insieme ordinato, $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ è isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathfrak{I}(R)$.

Dimostrazione. Sia $T = \{h/s \mid h \in H \wedge s \in S\}$. Per ogni $h, h' \in H$, $s, s' \in S$ e $r \in R$ si ha $(h/s) - (h'/s') = (hs' - h's)/ss' \in T$ e $(h/s)(r/s') = hr/ss' \in T$, quindi $T \lhd S^{-1}R$. D'altra parte, $H^{\vec{f}} \subseteq T$ e la (v) del lemma 9.2 mostra che tutti gli elementi di T sono associati ad elementi di $H^{\vec{f}}$, dunque $T = H^e$ e la (i) è provata.

Verifichiamo ora la (ii). Banalmente, $(K^c)^{\vec{f}} = K^{\overleftarrow{f}\vec{f}}$ è incluso in K, quindi anche K^{ce}, l'ideale che esso genera in $S^{-1}R$, è incluso in K. Viceversa, sia $k = x/s$ (con $x \in R$ e $s \in S$) un elemento di K. Ancora per il lemma 9.2 (v), si ha $x^{f_s} \in K$, ovvero $x \in K^c$, sicché, per la (i), $k \in K^{ce}$; otteniamo così la (ii).

Siano ora $r \in R$ e $s \in S$. Abbiamo $r \in H^{ec}$ se e solo se $rs/s \in H^e$. Se $r \in X := \bigcup_{a\in S}(H : a)$, allora $ra \in H$ per qualche $a \in S$, quindi $rs/s = ra/a \in H^e$. Viceversa, se $rs/s \in H^e$, per (i) esistono $h \in H$ e $t \in S$ tali che $rs/s = h/t$, quindi esiste $a \in S$ tale che $rsta = hsa \in H$, dunque $r \in (H : sta) \subseteq X$, dal momento che $sta \in S$. Ciò prova la (iii).

Passiamo alla (iv). Se esiste $s \in H \cap S$, allora $1_{S^{-1}R} = s/s \in H^e$ e $H^e = S^{-1}R$. Viceversa, se $H^e = S^{-1}R$ allora esistono $h \in S$ e $s \in S$ tali che $h/s = 1_{S^{-1}R} = s/s$, per la (i); quindi per un opportuno $a \in S$ si ha $s^2 a = hsa$, dunque $s^2 a \in S \cap H$. È così provato che H^e è un ideale proprio se e solo se $H \cap S = \varnothing$. Abbiamo così anche $(\sqrt{H})^e \neq S^{-1}R \iff \sqrt{H} \cap S = \varnothing$. Ora, se $\sqrt{H} \cap S$ non è vuoto e s ne è un elemento, una potenza di s apparterrà ad $H \cap S$; dunque $\sqrt{H} \cap S = \varnothing$ se e solo se $H \cap S = \varnothing$. Questo completa la dimostrazione di (iv). La parte rimanente dell'enunciato è conseguenza immediata di (ii) e del fatto che le applicazioni c ed e sono entrambe crescenti. □

Nella (iii) l'inclusione $H \subset H^{ec}$ può essere stretta. Per convincersene basta pensare al caso dell'ideale nullo: la (iii), insieme al lemma 9.2, mostra $0^{ec} = \ker f_S$.

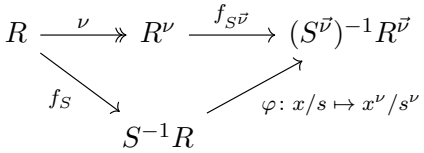
Corollario 9.9. *Se un anello commutativo è artiniano (risp. noetheriano, ad ideali tutti principali, principale) lo stesso vale per ogni suo anello di frazioni non nullo.*

Dimostrazione. Con le notazioni che stiamo usando, l'insieme ordinato $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ si immerge in $\mathfrak{I}(R)$ e quindi verifica le condizioni di catena che valgono in R. Poiché e è suriettiva, ogni ideale di $S^{-1}R$ è della forma H^e per un opportuno $H \lhd R$. Se H è principale, detto h un generatore di H è chiaro che $H^e = h^{f_S} S^{-1}R$, quindi anche H^e è principale. Infine, nell'ipotesi che $S^{-1}R$ non sia nullo, $S^{-1}R$ è un dominio di integrità se lo è R, quindi se R è principale anche $S^{-1}R$ lo è. □

Per procedere con lo studio di e e c abbiamo ancora bisogno di un lemma, che mostra come, in un certo senso, il passaggio al quoziente ed il passaggio ad un anello di frazioni siano trasformazioni che commutano tra loro.

Lemma 9.10. *Sempre con le stesse notazioni, fissato $H \lhd R$ e detto $\nu\colon R \twoheadrightarrow R/H$ l'epimorfismo canonico da R a $R/H = R^{\vec{\nu}}$, si ha $(S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}} \simeq S^{-1}R/H^e$.*

Dimostrazione. L'immagine $S^{\vec{\nu}}$ di S mediante ν è un sottosemigruppo di $R^{\vec{\nu}}$, e l'omomorfismo $\nu f_{S^{\vec{\nu}}}$ è certamente S-inversivo, quindi la proprietà universale di f_S garantisce l'esistenza dell'omomorfismo $\varphi\colon S^{-1}R \to (S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}}$ tale che $f_S\varphi = \nu f_{S^{\vec{\nu}}}$.



Di φ abbiamo una descrizione esplicita, ottenuta nel corso della costruzione degli anelli di frazioni e della verifica della proprietà universale: sappiamo che, per ogni $x \in R$ e $s \in S$,

$$(x/s)^\varphi = x^\nu f_{S^{\vec{\nu}}} s^{-\nu f_{S^{\vec{\nu}}}} = (x^\nu s^\nu / s^\nu)\big((s^\nu)^2/s^\nu\big)^{-1} = x^\nu/s^\nu.$$

Ora, questa descrizione mostra chiaramente che φ è suriettiva. Inoltre, $\ker\varphi$ è costituito dalle frazioni x/s tali che x^ν/s^ν sia lo zero di $(S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}}$. Dunque, tenendo presente che $\bigcup_{a\in S} \operatorname{Ann}_{R^{\vec{\nu}}}(a^\nu)$ è l'immagine mediante ν di $\bigcup_{a\in S}(H : a)_R = H^{ec}$ (si veda il lemma 9.8 (iii)), ricaviamo dal lemma 9.2:

$$x/s \in \ker\varphi \iff x \in H^{ec} \iff xs/s \in H^e \iff x/s \in H^e,$$

dal momento che xs/s e x/s sono associati in $S^{-1}R$. Pertanto $\ker\varphi = H^e$. Di conseguenza $(S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}} \simeq S^{-1}R/\ker\varphi = S^{-1}R/H^e$. □

Lemma 9.11. *Nella situazione del lemma 9.8, per ogni $H \lhd R$ tale che $H \cap S = \varnothing$:*
(i) *se H è primario, $H^{ec} = H$ e H^e è primario, con radicale $(\sqrt{H})^e$;*
(ii) *se H è primo, H^e è primo.*

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma 9.8 (iv) che $H^e \subset S^{-1}R$ e, inoltre, $\sqrt{H} \cap S = \varnothing$. Supponiamo H primario. Per la (iii) del lemma 9.8, se $r \in H^{ec}$ allora $rs \in H$ per qualche $s \in S$. Da $\sqrt{H} \cap S = \varnothing$ segue $s \notin \sqrt{H}$, quindi $r \in H$. Abbiamo così $H^{ec} = H$. Per provare che H^e è primario in $S^{-1}R$ consideriamo il quoziente $S^{-1}R/H^e$. Utilizzando le notazioni del lemma 9.10, $S^{-1}R/H^e \simeq (S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}}$, quindi per provare che H^e è primario basta verificare che ogni divisore dello zero in $(S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}}$ è nilpotente. Sia x un divisore dello zero in $(S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}}$, possiamo scrivere x come r^ν/s^ν per opportuni $r \in R$ e $s \in S$. Il lemma 9.2 (iii) garantisce che r^ν è un divisore dello zero in $R^{\vec{\nu}}$, e quindi è nilpotente; di conseguenza x è nilpotente. Abbiamo così provato che H^e è primario; in modo analogo ma ancora più diretto vediamo che H^e è primo se H è primo, perché in questo caso $(S^{\vec{\nu}})^{-1}R^{\vec{\nu}}$ è un dominio di integrità. Infine, ancora nell'ipotesi che H sia primario, $\sqrt{H}$ è primo, quindi $(\sqrt{H})^{ec} = \sqrt{H}$, per quanto dimostrato sopra (e perché $\sqrt{H} \cap S = \varnothing$). D'altra parte, come segue dal lemma 9.7 (ii), $(\sqrt{H^e})^c = \sqrt{H^{ec}} = \sqrt{H}$. Abbiamo così $(\sqrt{H^e})^c = (\sqrt{H})^{ec}$; poiché c è iniettiva ne segue $\sqrt{H^e} = (\sqrt{H})^e$, il che completa la dimostrazione.[3] □

Teorema 9.12. *Siano R un anello commutativo e S un sottosemigruppo di $(R, \cdot)$, e sia $\mathfrak{I}_S(R)$ l'insieme degli ideali di R disgiunti da S. Allora le applicazioni espansione $e\colon \mathfrak{I}(R) \to \mathfrak{I}(S^{-1}R)$ e contrazione $c\colon \mathfrak{I}(S^{-1}R) \to \mathfrak{I}(R)$ inducono per restrizione isomorfismi di insiemi ordinati, l'uno inverso dell'altro, tra queste coppie di insiemi:*

- *l'insieme degli ideali primari di R disgiunti da S e l'insieme degli ideali primari di $S^{-1}R$;*
- *$\operatorname{Spec}(R) \cap \mathfrak{I}_S(R)$ e $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$;*
- *per ogni $P \in \operatorname{Spec}(R) \cap \mathfrak{I}_S(R)$, l'insieme degli ideali P-primari di R e l'insieme degli ideali P^e-primari di $S^{-1}R$.*

Dimostrazione. Siano rispettivamente $\mathfrak{Q}$ e $\mathfrak{Q}'$ l'insieme degli ideali primari di R disgiunti da S e quello degli ideali primari di $S^{-1}R$. I lemmi 9.7, 9.8 e 9.11 mostrano che, per ogni $H \in \mathfrak{Q}$ e $K \in \mathfrak{Q}'$ si ha $H^e \in \mathfrak{Q}'$ e $K^c \in \mathfrak{Q}$ (dal momento che $K = K^{ce} \subset S^{-1}R$, certamente $K^c \cap S = \varnothing$), inoltre $H^{ec} = H$. Da ciò segue che $\mathfrak{Q}'$ è l'immagine di $\mathfrak{Q}$ mediante e mentre $\mathfrak{Q}$ è l'immagine di $\mathfrak{Q}'$ mediante c, e le applicazioni indotte per restrizione e riduzione da e e c tra questi insiemi sono applicazioni biettive, l'una inversa dell'altra. Inoltre gli stessi lemmi provano che queste applicazioni fanno corrispondere ideali primi a ideali primi, quindi inducono biezioni tra $\operatorname{Spec}(R) \cap \mathfrak{I}_S(R)$ e $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ e, inoltre, conservano i radicali degli ideali, quindi, per ogni ideale primo $P \in \mathfrak{Q}$, fanno corrispondere ideali P-primari ad ideali P^e-primari. Infine, sia e che c sono crescenti, quindi tutte queste biezioni sono isomorfismi tra insiemi ordinati. □

Osserviamo ancora che la funzione espansione conserva intersezioni e prodotti finiti tra ideali (ma non intersezioni infinite, come indicato nell'esercizio 9.B.6) e somme arbitrarie; la funzione contrazione conserva le intersezioni (arbitrarie).

Lemma 9.13. *Nelle solite notazioni:*
(i) *per ogni $I, J \lhd R$, $(IJ)^e = I^eJ^e$ e $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$;*
(ii) *per ogni famiglia $(H_i)_{i\in I}$ di ideali di R, $(\sum_{i\in I} H_i)^e = \sum_{i\in I} H_i^e$;*
(iii) *per ogni famiglia $(K_i)_{i\in I}$ di ideali di $S^{-1}R$, $(\bigcap_{i\in I} K_i)^c = \bigcap_{i\in I} K_i^c$;*

Dimostrazione. Siano $I, J \lhd R$. Che $(IJ)^e = I^eJ^e$ è chiaro dalla descrizione delle espansioni in lemma 9.8.[4] Mentre è altrettanto chiaro, dalla crescenza di e, che $(I \cap J)^e \subseteq I^e \cap J^e$, meno ovvia è l'inclusione opposta. Sia $x \in I^e \cap J^e$. Esistono $i \in I$, $j \in J$, $s, t \in S$ tali che $x = i/s = j/t$.

[3] possiamo osservare che quest'ultima parte della dimostrazione fornisce anche una dimostrazione, indipendente dalla precedente ma molto meno diretta, di (ii). Possiamo anche aggiungere che, più in generale, si può dimostrare $\sqrt{H^e} = \sqrt{H}^e$ per ogni ideale H di R (vedi l'esercizio 9.B.4)
[4] o da considerazioni più generali, vedi esercizio 9.B.9.

Esiste allora $a \in S$ tale che $ita = jsa$; ma da questa uguaglianza traiamo $ita \in I \cap J$ e quindi $x = ita/sta \in (I \cap J)^e$. Abbiamo provato la (i). Il resto dell'enunciato è ovvio. □

L'enunciato precedente ci dice che e è un omomorfismo tra reticoli. Lo stesso non vale per c, che non conserva le somme tra ideali (vedi esercizio 9.B.7).

Esercizi.

9.B.1. Verificare che se $f\colon R \to A$ è un omomorfismo suriettivo tra anelli, l'immagine mediante f di un ideale di R è necessariamente un ideale di A.

9.B.2. Nelle notazioni del lemma 9.8 si ha, per ogni $H \lhd R$:
- $H^{ece} = H^e$;
- $H^{ec} = H$ se e solo se H è la contrazione di un ideale di R;
- se H è generato da un suo sottoinsieme X, allora H^e è generato da $X^{\vec{f}_S}$;
- $S \cap H = \varnothing \iff S^{\updownarrow} \cap H = \varnothing$; verificarlo in modo diretto.

Inoltre, e è iniettiva se e solo se $S \subseteq \mathcal{U}(R)$ (vale a dire: e e c descrivono una biezione tra $\mathfrak{I}(R)$ e $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ solo nel caso banale in cui f_S sia un isomorfismo tra R e $S^{-1}R$).

9.B.3. Siano R un anello commutativo e S un sottosemigruppo di $(R, \cdot)$. Provare che, per ogni $H \lhd R$ e $P \in \operatorname{Spec}(R)$ tale che $P \cap S = \varnothing$, si ha $H \subseteq P \iff H^e \subseteq P^e \iff H^{ec} \subseteq P$, dove ovviamente e e c indicano espansione e contrazione con riferimento all'anello di frazioni $S^{-1}R$.

9.B.4. Provare che, nella notazioni del lemma 9.8, $(\sqrt{H})^e = \sqrt{H^e}$ per ogni $H \lhd R$.

9.B.5. Costruire un esempio di omomorfismo di anelli unitari commutativi $f\colon R \to A$ e di un ideale $H \lhd R$ tali che $(\sqrt{H})^{\vec{f}} \subset \sqrt{H^{\vec{f}}}$.

I prossimi cinque esercizi sono relativi al lemma 9.13; le notazioni sono le solite.

9.B.6. Mostrare con un esempio che l'espansione di una intersezione di una famiglia (infinita) $(H_i)_{i\in I}$ di ideali non è necessariamente l'intersezione degli ideali H_i^e. Suggerimento: basta pensare a qualche anello di frazioni di $\mathbb{Z}$.

9.B.7. Mostrare con un esempio che la contrazione di una somma di due ideali di un anello di frazioni non è necessariamente la somma delle loro contrazioni. Suggerimento: se R è l'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$ e $S = \{2\}$ ponendo $I = xR$ e $J = (x+2)R$, si ha $I = I^{ec}$ e $J = J^{ec}$, mentre $(I+J)^e = S^{-1}R$.

9.B.8. L'applicazione contrazione non conserva neanche i prodotti tra ideali. Per costruire un controesempio a riguardo, si considerino un gruppo abeliano A di ordine primo p, visto (nell'unico modo possibile) come $\mathbb{Z}$-modulo e la idealizzazione $R = A \mathbin{{}_0\!\bowtie} \mathbb{Z}$. Verificare che il nucleo dell'omomorfismo universale $R \to \{p\}^{-1}R$ è A, calcolare la contrazione dell'ideale nullo di $\{p\}^{-1}R$ ed il suo quadrato per arrivare alla conclusione. In aggiunta: utilizzando il lemma 9.10, identificare $\{p\}^{-1}R$.

9.B.9. Sia $f\colon R \to A$ un omomorfismo di anelli unitari commutativi. Mostrare che l'applicazione che ad ogni ideale H di R associa l'ideale di A generato da $H^{\vec{f}}$ conserva prodotti e somme (arbitrarie) tra ideali.

9.B.10. In contrasto con quanto notato con l'esercizio precedente, il fatto che la funzione espansione conservi l'intersezione tra ideali è una proprietà specifica dell'omomorfismo naturale da un anello commutativo unitario ad un suo anello di frazioni. Ad esempio, se K è un qualsiasi anello commutativo unitario, e $R = K[x, y]$ è un anello di polinomi a due indeterminate su K, non è difficile trovare un omomorfismo di anelli unitari f da R ad un altro anello commutativo A tale che, posto $I = xR$ e $J = yR$, si abbia che $(I \cap J)^{\vec{f}}$ sia un ideale di A propriamente contenuto in $I^{\vec{f}} \cap J^{\vec{f}}$. Trovare un tale f.

9.B.11. Con riferimento alla situazione descritta nell'esercizio 9.A.9, mostrare che, una volta identificato $S^{-1}R$ con un sottoanello di $S^{-1}A$ come lì suggerito, chiamando e e c le applicazioni

contrazione ed espansione relative a R e $S^{-1}R$, ε e γ quelle relative ad A e $S^{-1}A$, si ha $H^e S^{-1}A = (HA)^\varepsilon$ per ogni $H \lhd R$ e $(K \cap S^{-1}R)^c = R \cap K^\gamma$ per ogni $K \lhd S^{-1}A$.

9.B.12. Sia R un dominio di integrità e S una sua parte tale che $0_R \notin S \neq \varnothing$. Ricordando che $S^{-1}R$ può essere realizzato come sottoanello del campo dei quozienti $Q(R)$ di R (di cui consideriamo R come sottoanello) contenente R, con l'immersione $R \hookrightarrow S^{-1}R$ come omomorfismo S-inversivo universale, osservare che $K^c = K \cap R$ per ogni $K \lhd S^{-1}R$. Questa è l'origine di una notazione (un po' balorda) usata da alcuni autori che indicano tutte le contrazioni di ideali degli anelli di frazioni di un arbitrario anello R come intersezioni con R.

I risultati precedenti hanno una interpretazione molto esplicita alla luce di due osservazioni fatte: ogni anello di frazioni si può riguardare come anello di frazioni definito da un sottosemigruppo saturo (lemma 9.1), e i sottosemigruppi (moltiplicativi) saturi in un anello commutativo sono precisamente i complementi delle unioni di ideali primi (lemma 3.9).

Sia dunque R un anello commutativo. Per quanto appena notato, ogni anello di frazioni di R è della forma $S^{-1}R$, dove $S = R \setminus \bigcup \mathcal{P}$ per un insieme $\mathcal{P}$ di ideali primi. Il teorema 9.12 offre una descrizione dello spettro primo di questo anello: un ideale primo di R è disgiunto da S se e solo se è contenuto nell'unione $\bigcup \mathcal{P}$. Dunque, la funzione contrazione è una biezione, ed anche un isomorfismo di insiemi ordinati, da $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ all'insieme degli ideali primi di R contenuti in $\bigcup \mathcal{P}$. Un caso particolarmente importante è quello in cui $\mathcal{P}$ sia un singleton, vale a dire: $\mathcal{P} = \{P\}$ per un qualche $P \in \operatorname{Spec}(R)$, e dunque $S = R \setminus P$. Si usa scrivere, in questo caso, R_P per $(R \setminus P)^{-1}R$. Per quanto visto nel caso generale, $\operatorname{Spec}(R_P)$ è isomorfo come insieme ordinato all'insieme $\mathfrak{I}_P(R) = \{Q \in \operatorname{Spec} R \mid Q \subseteq P\}$ degli ideali primi di R contenuti in P. Ovviamente $\mathfrak{I}_P(R)$ ha massimo: questo massimo è P, quindi l'ideale di R_P corrispondente a P, cioè P^e è il massimo (rispetto all'inclusione) in $\operatorname{Spec}(R_P)$. Da questo segue subito che P^e è massimo tra gli ideali propri di R_P: ogni ideale proprio di R_P è contenuto in un ideale massimale, quindi primo, e dunque in P^e. Tenendo presente che R_P è certamente unitario abbiamo così provato:

Corollario 9.14. *Sia R un anello commutativo e sia P un suo ideale primo. Allora R_P è un anello locale, di ideale massimale P^e.*

Gli anelli di frazioni di questa forma sono noti come localizzazioni. Più precisamente, per ogni ideale primo P di un anello commutativo R, l'anello di frazioni $R_P = (R \setminus P)^{-1}R$ è la *localizzazione di R a P*.

Un importante esempio è dato dalle localizzazioni di $\mathbb{Z}$, che possiamo rapidamente descrivere tutte. Ricordiamo (esercizio 9.A.1) che un anello di frazioni non nullo $S^{-1}R$ di un dominio di integrità R si può realizzare come sottoanello del campi dei quozienti di R: se $0 \notin S \neq \varnothing$, allora $S^{-1}R$ è il sottoanello di $Q(R)$ generato da R e da $\{s^{-1} \mid s \in S\}$. Dunque, per ogni ideale primo P di $\mathbb{Z}$, la localizzazione $\mathbb{Z}_P$ è il sottoanello di $\mathbb{Q}$ generato dai reciproci degli elementi di $\mathbb{Z} \setminus P$. Se $P = \{0\}$ questo è il campo $\mathbb{Q}$. Se $P \neq \{0\}$, dunque $P = p\mathbb{Z}$ per qualche numero primo positivo p, otteniamo

$$\mathbb{Z}_P = \{n/m \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge p \text{ non divide } m\} = \mathbb{Q}_{p'},$$

come si verifica facilmente.[5] Come si può descrivere $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$? Gli ideali primi di $\mathbb{Q}_{p'}$ sono le espansioni degli ideali primi di $\mathbb{Z}$ contenuti in $p\mathbb{Z}$, quindi di $\{0\}$ e $p\mathbb{Z}$. Dunque $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}_{p'}) = \{\{0\}, p\mathbb{Q}_{p'}\}$. Similmente, dal fatto che gli ideali primari non nulli di $\mathbb{Z}$ contenuti in $p\mathbb{Z}$ sono

[5] abbiamo già introdotto l'anello $\mathbb{Q}_{p'}$ come esempio di anello locale. La notazione che usiamo per indicarlo ricorda il fatto che questo sottoanello di $\mathbb{Q}$, quozientato con $\mathbb{Z}$, costituisce la p'-componente del gruppo additivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Altre notazioni usate per questo anello sono $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$, che è quella generale per le localizzazioni ma non è molto comune, $\mathbb{Z}_p$, che è una 'semplificazione' della precedente ma è terribilmente fuorviante, $\mathbb{Q}_p$, che non è solo una mescolanza tra le precedenti, ma viene giustificata dal riferimento al campo dei numeri p-adici. La notazione che usiamo qui è particolarmente diffusa tra chi si occupa di teoria di gruppi.

quelli della forma $p^n\mathbb{Z}$ al variare di $n \in \mathbb{N}^+$ ricaviamo che gli ideali primari di $\mathbb{Q}_{p'}$ sono l'ideale nullo e gli ideali della forma $p^n\mathbb{Q}_{p'}$ al variare di $n \in \mathbb{N}^+$. Ci saremmo potuti arrivare anche per altra via: sappiamo che $\mathbb{Q}_{p'}$ è principale (corollario 9.9) e che gli ideali primari degli anelli principali sono tutte e sole le potenze degli ideali primi. Ma in questo caso di ideali primi ne abbiamo solo due, e le loro potenze sono gli ideali che abbiamo elencato. Osserviamo che questi ideali sono a due a due distinti, vale a dire $p^a\mathbb{Q}_{p'} \neq p^b\mathbb{Q}_{p'} \neq \{0\}$ per ogni coppia di interi positivi distinti a, b; ciò segue (ad esempio) dal teorema 9.12. Oltre questi ideali e l'anello stesso, esistono altri ideali in $\mathbb{Q}_{p'}$? Sappiamo che la funzione espansione e è suriettiva, dunque $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'}) = \{H^e \mid H \lhd \mathbb{Z}\} = \{(m\mathbb{Z})^e \mid m \in \mathbb{N}\} = \{m\mathbb{Q}_{p'} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Sia $m \in \mathbb{N}^+$; possiamo senz'altro scrivere $m = p^n u$ per opportuni $n, u \in \mathbb{N}$ tali che p^n non divida u. Ma allora u è invertibile in $\mathbb{Q}_{p'}$, abbiamo dunque $m\mathbb{Q}_{p'} = p^n\mathbb{Q}_{p'}$. In questo modo arriviamo a concludere che $\mathbb{Q}_{p'}$ non ha ideali oltre a quelli già identificati. In definitiva, $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$ è costituito dall'ideale nullo e dagli ideali $p^n\mathbb{Q}_{p'}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ (includiamo così nel conto anche $\mathbb{Q}_{p'} = p^0\mathbb{Q}_{p'}$) che sono, ripetiamo, a due a due distinti. Dunque, $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$ è una catena numerabile. Menzioniamo il fatto che questo rende $\mathbb{Q}_{p'}$ un esempio di anello di valutazione (questi anelli saranno discussi nella sezione 10.2). Il fatto che tutti gli ideali non nulli di $\mathbb{Q}_{p'}$ siano potenze del suo ideale massimale $p\mathbb{Q}_{p'}$ non è un caso; questa è una proprietà comune a tutti gli anelli noetheriani di valutazione.

Tornando agli anelli di frazioni di un dominio di integrità unitario, realizzati come sottoanelli del suo campo dei quozienti, abbiamo:

Proposizione 9.15. *Sia R un dominio di integrità unitario e sia K un suo (fissato) campo dei quozienti. Allora, se per ogni $M \lhd\cdot R$ indichiamo con R_M la localizzazione di R a M realizzata come sottoanello di K come indicato nella prima sezione di questo capitolo, $R = \bigcap_{M \lhd\cdot R} R_M$.*

Dimostrazione. Ovviamente $R \subseteq \bigcap_{M \lhd\cdot R} R_M$, quindi solo l'inclusione opposta è in questione.

Siano $M \lhd\cdot R$ e $c \in R_M$. Allora $c = a/b$ per opportuni $a \in R$ e $b \in R \setminus M$, dunque $b \in (R : c)_R$. Si ha così $(R : c)_R \not\subseteq M$. Sia ora $c \in \bigcap\{R_M \mid M \lhd\cdot R\}$. Allora $(R : c)_R$ è un ideale di R non contenuto in alcun ideale massimale di R, dunque $(R : c)_R = R$. Quest'ultima uguaglianza equivale a $c \in R$, dal momento che implica $1_R \in (R : c)_R$, ovvero $c = c1_R \in R$. La dimostrazione è ora completa. □

Un'altra osservazione a proposito delle localizzazioni riguarda i loro campi residui. A partire da un anello commutativo R e da un suo ideale primo P, è possibile ottenere un campo in modo abbastanza diretto in due modi: il primo è passare al quoziente R/P, che è un dominio di integrità, e quindi al campo dei quozienti $Q(R/P)$ di questo; il secondo è il passaggio alla localizzazione R_P e quindi al suo campo residuo R_P/P^e. Queste due procedure portano essenzialmente allo stesso risultato:

Proposizione 9.16. *Siano R un anello commutativo e P un suo ideale primo. Allora $R_P/P^e \simeq Q(R/P)$.*

Dimostrazione. Basta applicare il lemma 9.10. Posto $S = R \setminus P$ e $\bar{R} = R/P$, l'immagine di S in $\bar{R}$ è $\bar{S} := \bar{R} \setminus \{0\}$, quindi $Q(R/P) = (\bar{S})^{-1}\bar{R} \simeq S^{-1}R/P^e = R_P/P^e$. □

Possiamo anche dire qualcosa sugli anelli di frazioni della forma $S^{-1}R$, dove $S = R \setminus \bigcup \mathcal{P}$ per un insieme *finito* $\mathcal{P}$ di ideali primi. In questo caso, mediante le biezioni espansione e contrazione, $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ corrisponde all'insieme degli ideali primi di R che siano contenuti in $\bigcup \mathcal{P}$. Ma il lemma 3.6 mostra che un ideale (primo o non primo) di R è contenuto in $\bigcup \mathcal{P}$ se e solo se è contenuto in un elemento di $\mathcal{P}$. Dunque l'insieme di questi ideali (che, ripetiamo, come insieme ordinato è isomorfo a $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$) è $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{I}_P(R)$. Se ne deduce che gli ideali massimali di $S^{-1}R$, cioè gli elementi massimali di $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$, sono espansioni di ideali primi appartenenti a $\mathcal{P}$,

precisamente degli elementi di $\mathcal{P}$ massimali per inclusione. Se chiamiamo *semilocale* un anello commutativo unitario in cui l'insieme degli ideali massimali è finito, abbiamo provato:

Corollario 9.17. *Sia R un anello commutativo e sia $\mathcal{P}$ un insieme finito di suoi ideali primi. Allora $(R \setminus \bigcup \mathcal{P})^{-1}R$ è un anello semilocale. I suoi ideali massimali sono gli ideali della forma P^e al variare di P nell'insieme degli elementi di $\mathcal{P}$ massimali per inclusione.*[6]

Osservazioni ed esercizi.

9.C.1. L'idea di localizzazione è molto semplice da visualizzare in questi termini: scelto un ideale primo P dell'anello commutativo R, il passaggio all'anello di frazioni R_P "rende invertibili" gli elementi di R non in P. In questo modo si ottiene un anello in cui gli elementi esterni ad un certo ideale proprio (P^e) sono invertibili, quindi un anello locale. Cosa cambia se si parte da un ideale non primo al posto di P?

9.C.2. Verificare che tutti gli anelli di frazioni che siano locali sono localizzazioni. Si tratta di provare che, se R è un anello commutativo e S è un sottomonoide saturo di $(R, \cdot)$ tale che $S^{-1}R$ sia locale, allora $R \setminus S$ è un ideale primo di R.

9.C.3. Realizzare il sottoanello $\mathbb{Q}_2 = \{n/2^m \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{Q}$ come anello di frazioni di $\mathbb{Z}$ e descriverne gli ideali. Determinare l'ideale di $\mathbb{Q}_2$ generato da $\{24/16, 33/4\}$ e la sua contrazione in $\mathbb{Z}$.

9.C.4. Imitando la dimostrazione della proposizione 9.15, provare che, se H è un ideale proprio di un anello commutativo unitario R, indicando con $\mathcal{V}$ l'insieme degli ideali massimali di R contenenti H e, per ogni $M \in \mathcal{V}$, con e_M e c_M le funzioni espansione e contrazione relative all'anello di frazioni R_M, si ha $H = \bigcap_{M \in \mathcal{V}} H^{e_M c_M}$.

9.3 Decomposizioni primarie in anelli di frazioni

Concludiamo questo capitolo con alcune rapide osservazioni sulle decomposizioni primarie minimali in anelli di frazioni. Esclusi casi banali, l'espansione e la contrazione dell'espansione di un ideale decomponibile è ancora decomponibile; si ha infatti:

Proposizione 9.18. *Siano R un anello commutativo, H un suo ideale decomponibile con decomposizione primaria minimale $\mathcal{D}$, S un sottosemigruppo di $(R, \cdot)$ e $S^{-1}R$ il corrispondente anello di frazioni, con omomorfismo S-inversivo universale $f_S \colon R \to S^{-1}R$ ed applicazioni espansione e contrazione $e \colon \mathfrak{I}(R) \to \mathfrak{I}(S^{-1}R)$ e $c \colon \mathfrak{I}(S^{-1}R) \to \mathfrak{I}(R)$. Sia poi $\mathcal{D}_S = \{Q \in \mathcal{D} \mid Q \cap S = \varnothing\}$. Allora $\mathcal{D}_S \neq \varnothing$ se e solo se $H^e \neq S^{-1}R$ e, se questo accade, $\mathcal{D}_S$ e $\{Q^e \mid Q \in \mathcal{D}_S\}$ sono decomposizioni primarie minimali, rispettivamente, di H^{ec} in R e di H^e in $S^{-1}R$.*

Dimostrazione. Da $H = \bigcap \mathcal{D}$ e dal lemma 9.13 (i) segue $H^e = \bigcap\{Q^e \in \mathcal{D} \mid Q \in \mathcal{D}\}$. Se ne ricava che vale $H^e = S^{-1}R$ se e solo se $Q^e = S^{-1}R$ per ogni $Q \in \mathcal{D}$, vale a dire, tenendo conto del lemma 9.8 (iv), se e solo se $\mathcal{D}_S = \varnothing$.

Sia $\mathcal{D}_S \neq \varnothing$. Da quanto appena visto si ottiene $H^e = \bigcap\{Q^e \mid Q \in \mathcal{D}_S\}$. Inoltre, come si ricava dal teorema 9.12, per ogni $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}_S$, gli ideali Q_1^e e Q_2^e sono primari in $S^{-1}R$ con radicali (primi) distinti, perché $\mathcal{D}$ è minimale e $\sqrt{Q} \cap S = \varnothing$ per ogni $Q \in \mathcal{D}_S$. Passando alle contrazioni, si ha poi $H^{ec} = \bigcap\{Q^{ec} \mid Q \in \mathcal{D}_S\}$. Ma, ancora per il teorema 9.12, abbiamo $Q^{ec} = Q$ per ogni $Q \in \mathcal{D}_S$, quindi $H^{ec} = \bigcap \mathcal{D}_S$. Evidentemente $\mathcal{D}_S$ è irridondante, perché lo è $\mathcal{D}$, dunque $\mathcal{D}_S$ è una

[6] si badi bene: la richiesta qui non è che questi ideali P siano massimali come ideali di R, ma solo che siano massimali per inclusione tra gli elementi di $\mathcal{P}$.

decomposizione primaria minimale di H^{ec}, come richiesto dall'enunciato. Infine, per ogni $I \in \mathcal{D}_S$ si ha $H^e \neq \bigcap\{Q^e \mid I \neq Q \in \mathcal{D}_S\}$, altrimenti avremmo $H^{ec} = \bigcap(\mathcal{D}_S \setminus \{I\})$, contro quanto appena stabilito, quindi anche $\{Q^e \mid Q \in \mathcal{D}_S\}$ è irridondante ed è così una decomposizione primaria minimale di H^e in $S^{-1}R$. □

Un caso particolarmente significativo di quest'ultimo enunciato è quello in cui $S = R \setminus P$ per un primo isolato associato ad H.

Corollario 9.19. *Siano R un anello commutativo, H un suo ideale decomponibile e P un ideale primo isolato associato ad H. Allora, per ogni decomposizione primaria minimale $\mathcal{D}$ di H in R, la P-componente di $\mathcal{D}$[7] è H^{ec}, dove e e c sono le applicazioni espansione e contrazione relative alla localizzazione di R a P.*

Dimostrazione. Posto $S = R \setminus P$, per ogni $Q \in \mathcal{D}$ si ha $Q \cap S = \varnothing$ se e solo se $Q \subseteq P$, cioè se e solo se Q è la P-componente $\bar{Q}$ di $\mathcal{D}$. Di conseguenza, nelle notazioni della proposizione 9.18, $\mathcal{D}_S = \{\bar{Q}\}$ e quindi $H^{ec} = \bigcap \mathcal{D}_S = \bar{Q}$. □

Evidentemente, questo corollario fornisce una dimostrazione alternativa (e di fatto indipendente) del secondo teorema di unicità per decomposizioni primarie (teorema 7.16).

Esercizi.

9.D.1. Il secondo teorema di unicità per decomposizioni primarie viene talvolta enunciato nella forma (apparentemente) più generale che segue.

Se H è un ideale decomponibile di un anello commutativo R, un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{P}$ di $\operatorname{Ass}_R(H)$ è detto *isolato* se e solo se è 'chiuso verso il basso', cioè se e solo se ogni elemento di $\operatorname{Ass}_R(H)$ contenuto in qualche elemento di $\mathcal{P}$ appartiene esso stesso a $\mathcal{P}$. Estendere il corollario 9.19 dimostrando che se $\mathcal{P}$ è isolato l'intersezione tra le P-componenti di una decomposizione primaria minimale di H, al variare di P in $\mathcal{P}$, è indipendente dalla decomposizione scelta.

[7] cioè, si ricorda, l'elemento di $\mathcal{D}$ con radicale P.

10 Ampliamenti interi ed anelli di valutazione

La nozione di elemento intero su un anello è la diretta generalizzazione di quella di elemento algebrico su un campo; nata nell'ambito della teoria dei numeri, svolge un ruolo molto importante in diversi aspetti della teoria degli anelli. In questo capitolo ci limitiamo ad introdurla ed a discutere brevemente la sua connessione con una classe di domini di integrità: gli anelli di valutazione.

10.1 Interi su un anello

Sia R un sottoanello unitario di un anello commutativo unitario A. Un elemento di A si dice *intero* su R se e solo se è radice di un polinomio monico a coefficienti in R. Se R è un campo, quindi, la nozione di intero si riduce a quella di elemento algebrico. Se ogni elemento di A è intero su R si dice che A è un *ampliamento intero* (o integrale) di R.

Qualunque sia R, sono ovviamente interi su R tutti gli elementi di R (ogni $a \in R$ è radice di $x - a$); sono poi interi su $\mathbb{Z}$ l'unità immaginaria $i \in \mathbb{C}$ e più in generale tutte le radici complesse dell'unità nel campo complesso, come anche i numeri reali della forma $\sqrt[m]{n}$ dove $m \in \mathbb{N}^+$ e $n \in \mathbb{Z}$. I numeri complessi che siano interi su $\mathbb{Z}$ vengono chiamati *interi algebrici*. Vedremo (corollario 10.10) che *ogni intero algebrico che sia un numero razionale è un numero intero*.

Esaminiamo alcune caratterizzazioni degli interi su un anello. La prima è una riformulazione della definizione: dire che un elemento c è radice di un polinomio in $R[x]$ monico di grado n, della forma cioè $x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, equivale a dire che c^n è una R-combinazione lineare delle potenze $c^0, c^1, \ldots, c^{n-1}$ (precisamente: $c^n = \sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)c^i$). Dunque:

Lemma 10.1. *Se c ed R sono, rispettivamente un elemento ed un sottoanello unitario dell'anello commutativo unitario A, c è intero su R se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che c^n appartenga all'R-sottomodulo $\sum_{i=0}^{n-1} c^i R$ di A generato da $\{c^0 = 1_R, c, c^2, \ldots, c^{n-1}\}$.*[1]

Corollario 10.2. *Con le stesse notazioni, se $c \in \mathcal{U}(A)$, allora c è intero su R se e solo se $c \in R[c^{-1}]$.*[2]

Dimostrazione. Sia $c \in R[c^{-1}]$. Poiché $R[c^{-1}] = \sum_{i\in\mathbb{N}} c^{-i}R$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $c \in \sum_{i=0}^{n} c^{-i}R$. Moltiplicando per c^n otteniamo $c^{n+1} \in \sum_{i=0}^{n} c^{n-i}R$, quindi c è intero su R.

Viceversa, se c è intero su R esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $c^n \in \sum_{i=0}^{n-1} c^i R$, quindi $c \in \sum_{i=0}^{n-1} c^{i-n+1}R \in R[c^{-1}]$. □

Lemma 10.3. *Sia R un sottoanello unitario dell'anello commutativo unitario A, e sia $c \in A$. Sono allora equivalenti:*

(i) *c è intero su R;*
(ii) *l'anello $R[c]$ è finitamente generato come R-modulo;*
(iii) *esiste un $R[c]$-modulo fedele che, visto come R-modulo per restrizione degli scalari, è finitamente generato.*

[1] qui e più avanti facciamo tacitamente riferimento all'ovvia struttura di A come R-algebra.
[2] Come da uso corrente, $R[c^{-1}]$ indica il sottoanello di A generato da R e c^{-1}.

Dimostrazione. Valga (i); allora, come mostra il lemma 10.1, $c^n \in M := \sum_{i=0}^{n-1} c^i R$, per un opportuno $n \in \mathbb{N}^+$. Facendo induzione su t, possiamo facilmente mostrare che $c^{n+t} \in M$ per ogni $t \in \mathbb{N}$; infatti assumendo $c^{n+t} \in M$ si ottiene $c^{n+t+1} \in cM = \sum_{i=1}^{n} c^i R \subseteq M + c^n R = M$. Pertanto $R[c] = \sum_{i\in\mathbb{N}} c^i R = M$, e vale così (ii).

Che (iii) segua da (ii) è ovvio: basta considerare $R[c]$ come modulo su sé stesso. Resta da provare che (iii) implica (i). Sia $M = \sum_{i=1}^{n} u_i R$ un $R[c]$-modulo fedele che sia R-finitamente generato. Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si ha $u_i c = \sum_{j=1}^{n} u_j r_{ij}$ per opportuni $r_{ij} \in R$. Dunque, posto $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, abbiamo $\underline{u}(I_n c) = \underline{u}L$ per una matrice $L = (r_{ji})$ di tipo $n \times n$ su R (I_n indica la matrice identica di rango n su R). Allora $\underline{u}J = 0$, dove $J = I_n c - L$ è una matrice a termini in $R[c]$. Moltiplicando per $\operatorname{adj}(J)$[3] si ha $\underline{u}(I_n d) = 0$, dove $d = \det J$. Ovviamente questo significa $u_i d = 0$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e quindi $Md = 0$, vale a dire: $d \in \operatorname{Ann}_{R[c]}(M)$. Ma M è fedele come $R[c]$-modulo, pertanto $d = 0$. Ricordiamo che $J = I_n c - L$, dove L è una matrice a termini in R. Da ciò segue facilmente che, sviluppando il determinante di J, si ha $0 = d = c^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_i c^i$ per opportuni elementi r_i di R, quindi c è intero su R. □

Corollario 10.4. *Sia R un sottoanello unitario dell'anello commutativo A. Se A è finitamente generato come R-modulo, allora A è un ampliamento intero di R.*

Dimostrazione. Per ogni $c \in A$, A stesso verifica la condizione richiesta dalla (iii) del lemma 10.3. □

I prossimi risultati sono generalizzazioni dirette (con dimostrazioni molto simili) di analoghi risultati sulle estensioni algebriche dei campi. È utile iniziare con un lemma in cui l'unica cosa a cui fare attenzione è il preciso significato dell'enunciato.

Lemma 10.5. *Sia R un anello commutativo unitario, A una R-algebra commutativa unitaria che sia finitamente generata come R-modulo e B un A-modulo finitamente generato. Allora B è finitamente generato come R-modulo.*

Prima della dimostrazione, definiamo bene le strutture coinvolte. Abbiamo in partenza due omomorfismi di anelli unitari: l'omomorfismo di struttura $\xi\colon R \to A$, che definisce A come R-algebra, e l'azione di modulo $\rho\colon A \to \operatorname{End}(B, +)$, che definisce la struttura di A-modulo su B. Quindi B è strutturato come R-modulo dall'azione $\xi\rho\colon R \to \operatorname{End}(B, +)$; è a questo modulo che si riferisce l'enunciato. Le operazioni esterne sono compatibili tra loro in questo senso: per ogni $r \in R$, $a \in A$ e $b \in B$ si ha: $(ba)r = (b^{a^\rho})^{r^{\xi\rho}} = b^{(ar^\xi)^\rho} = b(ar)$.

Dimostrazione. Per opportuni insiemi finiti $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ abbiamo $A = XR$ e $B = YA$. Dalle osservazioni appena fatte sulla compatibilità tra le operazioni coinvolte segue facilmente $B = Y(XR) = (YX)R$ (si confronti questa situazione con quella dell'esercizio 1.D.2). Quindi B è generato, come R-modulo, dall'insieme finito $\{xy \mid x \in X \wedge y \in Y\}$. □

Lemma 10.6. *Sia A un anello commutativo unitario e sia R un suo sottoanello unitario. Supponiamo che esistano un numero finito di elementi $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tali che $A = R[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, che a_i sia intero su $R[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}]$. Allora A è un ampliamento intero di R ed è finitamente generato come R-modulo.*

Dimostrazione. Si può ragionare per induzione su n. Il risultato è ovvio per $n = 0$. Supponiamo $n > 0$ e che l'asserto valga per $n - 1$, allora $R_1 := R[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ è finitamente generato come R-modulo. Poiché a_n è intero su R_1, il lemma 10.3 mostra che A è finitamente generato come R_1-modulo e quindi, grazie al lemma 10.5, concludiamo che A è finitamente generato come R-modulo. Una diretta applicazione del corollario 10.4 completa la dimostrazione. □

[3] $\operatorname{adj}(J)$ è la matrice dei complementi algebrici di J; come nel caso delle matrici quadrate su un campo, si ottiene $J \operatorname{adj}(J) = \operatorname{adj}(J) J = I_n \det J$

Corollario 10.7. *Sia R un sottoanello unitario dell'anello commutativo A. Allora l'insieme $\bar{R}$ degli elementi di A che siano interi su R costituisce un sottoanello unitario di A contenente R.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in \bar{R}$. Allora $a - b$ e ab appartengono a $R[a, b]$, che, per il lemma 10.6, è un ampliamento intero di R. Dunque $a - b$ e ab sono interi su R, quindi appartengono a $\bar{R}$. L'asserto segue facilmente. □

Questo anello $\bar{R}$ prende il nome di *chiusura intera* (o integrale) di R in A. La chiusura intera di $\bar{R}$ in A coincide con $\bar{R}$; in questo consiste la proprietà di transitività per gli ampliamenti interi:

Corollario 10.8. *Siano A, B e C anelli commutativi unitari. Se A è un ampliamento intero di B e B è un ampliamento intero di C, allora A è un ampliamento intero di C.*

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Allora a è intero su B, quindi $f(a) = 0$ per un opportuno polinomio monico $f \in B[x]$. Sia F l'insieme (finito) dei coefficienti non nulli di f, e sia $B_1 = C[F]$. Allora $f \in B_1[x]$, quindi a è intero su B_1. Dal lemma 10.6 segue che $B_1[a]$ è un ampliamento intero di C, quindi a è intero su C. Ciò mostra che A è un ampliamento intero di C. □

Fissiamo alcune notazioni. La chiusura intera di $\mathbb{Z}$ nel campo complesso (o, equivalentemente, nella chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}}$ di $\mathbb{Q}$ contenuta in $\mathbb{C}$) viene indicata con $\overline{\mathbb{Z}}$ ed è nota come l'*anello degli interi algebrici*. Come abbiamo già detto, $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$; questa proprietà si esprime dicendo che $\mathbb{Z}$ è un anello integralmente chiuso. In generale, un *anello integralmente chiuso* è, per definizione, un dominio di integrità unitario che coincida con la sua chiusura intera nel suo campo dei quozienti. Sono integralmente chiusi $\mathbb{Z}$ e più in generale tutti gli anelli fattoriali, come stiamo per vedere.

Lemma 10.9. *Siano R un anello fattoriale e $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$. Siano u, v due elementi coprimi di R tali che $v \neq 0$ e, nel campo dei quozienti di R, $f(u/v) = 0_R$. Allora, in R, u divide a_0 e v divide a_n.*

Dimostrazione. Si ha $0_R = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i / v^i$; moltiplicando per v^n otteniamo $0_R = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i v^{n-i} = a_0 v^n + \sum_{i=1}^{n} a_i u^i v^{n-i}$. Ne segue che u divide $a_0 v^n$; ma u è coprimo con v^n, dunque $u|_R\, a_0$. Similmente, da $0_R = a_n u^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i v^{n-i}$ deduciamo $v|_R\, a_n$. □

Corollario 10.10. *Gli anelli fattoriali sono integralmente chiusi.*

Dimostrazione. Siano R un anello fattoriale e $\bar{R}$ la chiusura intera di R nel suo campo dei quozienti. Sia poi $c \in \bar{R}$. Allora $c = u/v$ per opportuni elementi $u, v \in R$, tra loro coprimi e tali che $v \neq 0_R$; inoltre esiste un polinomio monico $f \in R[x]$ tale che $f(c) = 0_R$. Il lemma 10.9 comporta che v divida il coefficiente direttore 1_R di f; ma allora $v \in \mathcal{U}(R)$ e quindi $c \in R$. Pertanto $\bar{R} = R$, quindi R è integralmente chiuso. □

Più in generale (si veda l'osservazione 10.A.2), gli elementi interi su un anello fattoriale che appartengano ad un campo che lo contenga hanno un'utilissima caratterizzazione.

Proposizione 10.11. *Siano K un campo, R un suo sottoanello unitario e Q il campo dei quozienti di R contenuto in K. Sia $c \in K$. Se K è fattoriale, c è intero su R se e solo se c è algebrico su Q ed il suo polinomio minimo su Q appartiene a $R[x]$.*

Dimostrazione. Supponiamo c intero su R; allora c è (ovviamente) algebrico su Q. Sia f il polinomio minimo di c su Q e sia g un polinomio monico appartenente a $R[x]$ tale che $g(c) = 0$. Allora f è monico e divide g in $Q[x]$, quindi $f \in R[x]$ per il lemma 5.9. Ciò mostra che la condizione è necessaria. La sufficienza è immediata: se il polinomio minimo f di c su Q è in $R[x]$ allora c è intero su R perché f è monico. □

Ad esempio, i numeri complessi interi algebrici sono esattamente i numeri algebrici il cui polinomio minimo ha tutti coefficienti interi.

Concludiamo questa sezione con un importante lemma.

Lemma 10.12. *Siano R un anello commutativo unitario e A un suo ampliamento intero. Siano poi P e Q ideali di A tali che P sia primo e $P \subseteq Q$. Se $P \cap R = Q \cap R$, allora $P = Q$.*

Dimostrazione. Sia $c \in Q$, e tra i polinomi monici $f \in R[x]$ scegliamone uno di grado minimo per la condizione $f(c) \in P$ (il fatto che c è intero su R garantisce l'esistenza di almeno un tale polinomio). Posto $r = f(0)$, possiamo scrivere $f = xg + r$ per un opportuno g, monico, in $R[x]$; ovviamente $r \in R$ e g ha grado minore di quello di f, quindi $g(c) \notin P$. D'altra parte $f(c) = cg(c) + r$, quindi da $f(c) \in P \subseteq Q$ e $c \in Q$ ricaviamo $r \in Q$. Ma allora $r \in Q \cap R = P \cap R$, dunque $cg(c) = f(c) - r \in P$. Dal momento che P è primo e $g(c) \notin P$, otteniamo così $c \in P$. Dunque $Q = P$. □

Ci possiamo fermare un attimo sul contenuto di questo lemma. Quello che ne ricaviamo è che se A è un ampliamento intero di R, ogni catena finita di ideali primi di A dà luogo, se intersecata con R, ad una catena di ideali primi di R *della stessa lunghezza*. Dunque, la dimensione di A non può superare quella di R. In realtà, è possibile dimostrare che le dimensioni di A e di R coincidono; una dimostrazione è suggerita come esercizio 10.A.6.

Un caso particolare è questo interessante risultato (la cui tesi prescrive che sia A che R abbiano dimensione 0).

Proposizione 10.13. *Sia A un dominio di integrità, ampliamento intero del suo sottoanello (unitario) R. Allora A è un campo se e solo se R è un campo.*

Dimostrazione. Sia A un campo, e sia $0_R \neq r \in R$. Allora r è invertibile in A e, per il corollario 10.2, dal fatto che r^{-1} è intero su R segue $r^{-1} \in R[r] = R$; dunque $r \in \mathcal{U}(R)$. Vediamo così che R è un campo.

Viceversa, sia R un campo. Sia M un ideale massimale di A. Evidentemente $R \not\subseteq M$, perché $1_R \notin M$, e $R \cap M \lhd R$, dunque $R \cap M = 0 = R \cap 0$, quindi $M = 0$ (vale a dire: A è un campo) per il lemma 10.12. □

Esercizi.

10.A.1. $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ è un esempio di dominio di integrità unitario non integralmente chiuso. Infatti la sezione aurea $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ è nel campo dei quozienti (immerso nel campo complesso) di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, ma non in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, eppure è radice del polinomio $x^2 - x - 1$, quindi è un intero algebrico e, in particolare, intera su $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Questo è un modo un po' indiretto per provare che $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ non è un anello fattoriale.

10.A.2. Come suggerito dalla frase che lo segue, il corollario 10.10 è un caso particolare della proposizione successiva. Infatti, se R è un anello fattoriale, K un suo campo dei quozienti e c un elemento di K, allora il polinomio minimo di c su K è $f = x - c$. Quindi, una volta data per nota la proposizione 10.11, da essa segue $f \in R[x]$ e quindi $c \in R$, provando così il corollario 10.10. Abbiamo preferito fornire comunque una dimostrazione indipendente del corollario, del tutto elementare, che non richieda la teoria degli anelli di polinomi sugli anelli fattoriali.

10.A.3. Sia A un anello commutativo, ampliamento intero del suo sottoanello unitario R. Se φ è un omomorfismo di anelli unitari di dominio A, allora $A^{\vec{\varphi}}$ è un ampliamento intero di $R^{\vec{\varphi}}$. Dedurne che per ogni $H \lhd A$ l'anello A/H è ampliamento intero di $R + H/H$ (isomorfo a $R/R \cap H$).

10.A.4. Sia A anello commutativo, ampliamento intero del suo sottoanello unitario R, e sia $\varnothing \neq S \subseteq R$. Identificato $S^{-1}R$ con un sottoanello (unitario) di $S^{-1}A$, come indicato nell'esercizio 9.A.9, verificare che $S^{-1}A$ è un ampliamento intero di $S^{-1}R$.

10.A.5. Sia A un anello commutativo, ampliamento intero del suo sottoanello unitario R. Provare che per ogni $P \in \operatorname{Spec}(R)$ esiste $Q \in \operatorname{Spec}(A)$ tale che $P = R \cap Q$. Lo si può fare seguendo i passi qui suggeriti.

i) Sia $S = R \smallsetminus P$. Allora $S^{-1}A$ è un ampliamento intero di R_P (esercizio 10.A.4); utilizzando l'esercizio 9.B.11 verificare che se l'espansione di P in R_P è l'intersezione di un ideale primo K di $S^{-1}A$ con R_P, allora P è l'intersezione dela contrazione di K in A con R, e vale quindi proprietà richiesta.

ii) Quanto al punto precedente mostra che è sufficiente provare l'asserto nel caso in cui P sia massimale. Si può allora assumere $P \lhd\cdot R$, e basta provare che PA è un ideale proprio in A (se lo è, è contenuto in un ideale massimale di $A\dots$).

iii) Se $PA = A$, allora $PA_1 = A_1$ per un opportuno sottoanello A_1 di A che sia un ampliamento di R finitamente generato come R-modulo. Ragionando per induzione sul numero dei generatori, basta allora provare l'asserto nel caso in cui $A = R[c]$ per un opportuno $c \in A$. Ragionando come al primo passo, si può ulteriormente assumere che R sia locale (con ideale massimale P).

iv) Ragionando come al primo passo, si vede che si può ulteriormente assumere che R sia locale (con ideale massimale P). Fatta quest'assunzione, sia $f = f_0 + xf_1$ un polinomio di grado minimo tra quelli monici in $R[x]$ di cui c sia radice. Se, per assurdo, $PA = A$, allora $1_R = g(c)$ per un opportuno polinomio $g = g_0 + xg_1$ a coefficienti in P di grado minore di quello di f. Inoltre, poiché R è locale, $u := cg_1(c) = 1_R - g_0 \in \mathcal{U}(R)$, quindi $c \in \mathcal{U}(A)$ e $c^{-1} = u^{-1}g_1(c)$. Di conseguenza, c è radice del polinomio $h := c^{-1}f = f_0u^{-1}g_1 + f_1 \in R[x]$. Ma h è monico e ha grado minore di quello di $f\dots$

10.A.6. Utilizzando (anche) l'esercizio precedente, provare che se l'anello commutativo A è un ampliamento intero del suo sottoanello unitario R, allora A e R hanno o entrambi dimensione (di Krull) infinita o la stessa dimensione (finita).

10.2 Anelli di Bézout ed anelli di valutazione

Come già accennato nella sezione 3.4, un *anello di Bézout* è, per definizione, un dominio di integrità unitario R in cui ogni ideale finitamente generato è principale. Naturalmente, perché ciò accada, è sufficiente che, scelti comunque $a, b \in R$, l'ideale $aR + bR$ da essi generato sia principale, ovvero: esista $d \in R$ tale che $aR + bR = dR$. Le considerazioni svolte nella sezione 3.4 mostrano che questa condizione implica che d sia un massimo comun divisore tra a e b. Quindi possiamo anche dire, in modo un po' informale, che un dominio di integrità unitario è un anello di Bézout se e solo se "in R vale il teorema di Bézout":

Proposizione 10.14. *Sia R un dominio di integrità unitario. Allora R è un anello di Bèzout se e solo se, per ogni $a, b \in R$, esiste in R un divisore comune ad a e b che sia combinazione lineare di a e b a coefficienti in R. Ogni tale d è un massimo comun divisore tra a e b.*

Dimostrazione. Per un elemento d di R, dire che d è un divisore comune ad a e b equivale a dire che dR contiene aR e bR, quindi $aR + bR$; dire che d è combinazione lineare di a e b in R, equivale a dire che, viceversa, $dR \subseteq aR + bR$. Si ottiene così l'enunciato. □

Sono ovviamente anelli di Bézout gli anelli principali, anzi, è chiaro che gli anelli principali sono precisamente gli anelli di Bézout noetheriani, ma esistono diversi esempi di anelli di Bézout

non principali. Uno, anche se non dimostreremo questo fatto, è l'anello $\overline{\mathbb{Z}}$ degli interi algebrici introdotto nella sezione precedente, un altro è presentato nell'esempio 10.B.2; tanti altri ancora sono ottenibili dalla proposizione 10.15 e dal lemma 10.17.

Esempi ed Esercizi.

10.B.1. Provare che un anello di Bézout fattoriale è necessariamente principale.

10.B.2. Sia $R = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$, l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali con termine noto intero. Come è facile verificare, R è un sottoanello unitario di $\mathbb{Q}[x]$; meno immediato è che R è un anello di Bézout non principale. Iniziamo dalla seconda proprietà: se p è un intero primo, la successione $(p^{-n}xR)_{n\in\mathbb{N}^+}$ di ideali di R è strettamente crescente, quindi R non è noetheriano. Per provare che R è di Bézout, fissiamo $f, g \in R$; l'obiettivo è quello di trovare in $fR + gR$ un elemento che, in R, sia un divisore comune a f e g. Sia d un MCD in $\mathbb{Q}[x]$ tra f e g. Poiché d è definito a meno di associati, possiamo scegliere un tale d in modo che il suo termine noto d_0 sia un MCD in $\mathbb{Z}$ tra i termini noti f_0 e g_0 di f e g (fare attenzione: questo ovviamente vale se $d_0 \neq 0$, ma vale anche se $d_0 = 0$, perché in questo caso x divide d, quindi f e g e dunque $f_0 = g_0 = 0$). Proveremo che (sicuramente se $d_0 \neq 0$, a meno di raffinare la scelta di d altrimenti) un tale d è proprio l'elemento di $fR + gR$ che stiamo cercando.

Innanzitutto, serve verificare che d divida f e g in R. Esistono $h, k \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $f = dh$ e $g = dk$, quindi $f_0 = d_0h(0)$ e $g_0 = d_0k(0)$. Se $d_0 \neq 0$, abbiamo $h(0) = f_0/d_0 \in \mathbb{Z}$, quindi $h \in R$ e $d|_R f$; in modo analogo $d|_R g$. Iniziamo allora a considerare questo caso e assumiamo $d_0 \neq 0$, vale a dire: almeno uno tra f_0 e g_0 non è 0. Per fissare le idee, supponiamo $f_0 \neq 0$. Poiché $\mathbb{Q}[x]$ è principale, esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = \alpha f + \beta g$. Ora, α e β non sono univocamente determinati: per ogni $q \in \mathbb{Q}[x]$, se $\alpha_q = \alpha + qk$ e $\beta_q = \beta - qh$ si ha infatti $d = \alpha_q f + \beta_q g$. Per raggiungere il nostro scopo basterà scegliere q in modo che α_q e β_q siano in R. Ricordando che $h(0) \neq 0$, perché $f_0 \neq 0$, poniamo $q = \beta(0)/h(0)$. Allora $\beta_q(0) = 0$ e quindi, da una parte $\beta_q \in R$, dall'altra $d_0 = \alpha_q(0)f_0$, cioè $\alpha_q(0) = f_0/d_0 \in \mathbb{Z}$ e quindi $\alpha_q \in R$. A questo punto abbiamo dimostrato che, *nell'ipotesi* $f_0 \neq 0$, $d \in fR + gR$, quindi $dR = fR + gR$. Ovviamente si può procedere in modo analogo nell'ipotesi $g_0 \neq 0$; resta solo da considerare il caso in cui $f_0 = g_0 = 0$, quello cioè in cui sia f che g siano multipli di x in $\mathbb{Q}[x]$. Se $f = g = 0$, ovviamente, non c'è nulla da dimostrare. Nell'altro caso esiste $\lambda \in \mathbb{N}^+$ tale che x^λ divida sia f che g (in $\mathbb{Q}[x]$), ma $x^{\lambda+1}$ non divida almeno uno dei due. Posto $f = x^\lambda f^*$ e $g = x^\lambda g^*$, esiste $\mu \in \mathbb{N}^+$ tale che sia $f_1 := \mu f^*$ che $g_1 := \mu g^*$ sono in R. Dal momento che almeno uno di questi due polinomi ha termine noto non nullo, per il caso precedente si ha $d_1R = f_1R + g_1R$ per un opportuno $d_1 \in R$. Moltiplicando per $(1/\mu)x^\lambda$ (che è in R perché $\lambda > 0$) e ponendo $ds = (1/n)x^\lambda d_1$, otteniamo $dR = fR + gR$.

Per definizione, un *anello di valutazione* è un dominio di integrità unitario R che verifichi una delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti (e quindi tutte):

- (AV_1) l'insieme degli ideali di R è totalmente ordinato per inclusione;
- (AV_2) l'insieme degli ideali principali di R è totalmente ordinato per inclusione;
- (AV_3) per ogni $a, b \in R$, si ha $a|_R\, b$ o $b|_R\, a$;
- (AV_4) detto K il campo dei quozienti di R, per ogni $c \in K$ si ha $c \notin R \Rightarrow c^{-1} \in R$.

Vediamo perché queste condizioni sono tra loro equivalenti. Ovviamente (AV_1) implica (AV_2), ed è anche chiaro che (AV_2), (AV_3) e (AV_4) sono tra loro equivalenti (dire che un elemento $c = a/b$ di K, dove $a, b \in K$, appartiene a R significa precisamente dire che, in R, b divide a). Infine, assunta (AV_2), se I e J sono due ideali di R tra loro non confrontabili, esistono $a \in I \setminus J$ e

$b \in J \setminus I$; poiché $aR \subseteq I$ e $b \notin I$ allora $bR \not\subseteq aR$; similmente $aR \not\subseteq bR$. Otteniamo così due ideali principali di R non confrontabili tra loro, in contraddizione con (AV_2). Proviamo così che (AV_2) implica (AV_1) e l'equivalenza delle (AV_{1-4}) è ora dimostrata.

Sono ovviamente esempi di anelli di valutazione tutti i campi; esempi più interessanti sono dati dalle localizzazioni di $\mathbb{Z}$ discusse nella sezione 9.2.

Un'altra caratterizzazione degli anelli di valutazione è la seguente.

Proposizione 10.15. *Gli anelli di valutazione sono tutti e soli gli anelli di Bézout locali.*

Dimostrazione. Sia R un anello di valutazione. Allora R è un dominio di integrità unitario. Se $a, b \in R$, poiché aR e bR sono tra loro confrontabili, uno dei due coincide con $aR + bR$, che è dunque principale. Dunque R è un anello di Bézout. Inoltre R è locale: se avesse due ideali massimali distinti questi non potrebbero essere confrontabili tra loro per inclusione, contro la definizione (si veda (AV_1)) di anello di valutazione.

Viceversa, sia R un anello di Bézout locale, siano a e b due elementi di R e sia d un loro massimo comun divisore. Se $d = 0_R$ allora $a = b = 0_R$ e $a|_R\, b$. Altrimenti, da $dR = aR + bR$, moltiplicando (in $Q(R)$) per d^{-1},[4] otteniamo $R = \alpha R + \beta R$, dove $\alpha, \beta \in R$ e $a = d\alpha$, $b = d\beta$. Ma R è locale, quindi due ideali propri di R non possono essere comassimali; allora uno tra αR e βR coincide con R, vale a dire: uno tra α e β è invertibile. Pertanto d è associato ad uno tra a e b; si ha allora $a|_R\, b$ nel primo caso, $b|_R\, a$ nel secondo. Abbiamo così provato che R verifica la condizione (AV_3) ed è dunque un anello di valutazione. □

Corollario 10.16. *Ogni anello di valutazione noetheriano è principale.*

Gli anelli principali di valutazione sono anche noti, con terminologia più tradizionale, come *anelli di valutazione discreta* (la ragione sarà chiarita dall'osservazione 10.C.4); alcuni autori limitano l'uso di questa espressione al caso degli anelli principali di valutazione che non siano campi (che sono, banalmente, sia anelli di valutazione che anelli principali).

Il prossimo lemma fornisce un metodo (generale, come suggerito dall'esercizio 10.C.1) che fornisce esempi di anelli di valutazione: dato un campo K, tra le coppie (A, H) dove A è un sottoanello unitario di K e H ne è un ideale proprio, quelle massimali per inclusione (nel senso più ovvio) sono costituite da un anello di valutazione e dal suo ideale massimale.

Lemma 10.17. *Sia K un campo, sia R un suo sottoanello unitario e sia I un ideale proprio di R. Sia poi $\mathcal{S}$ l'insieme delle coppie (A, H), dove A è un sottoanello di K contenente R e H è un ideale proprio di A contenente I. Consideriamo $\mathcal{S}$ ordinato dalla relazione $\preceq$, definita da: per ogni $(A_1, H_1), (A_2, H_2) \in \mathcal{S}$, $(A_1, H_1) \preceq (A_2, H_2)$ se e solo se $A_1 \subseteq A_2$ e $H_1 \subseteq H_2$. Allora $(\mathcal{S}, \preceq)$ è induttivo ed ha elementi massimali; se (V, M) è uno di questi, allora V è un anello di valutazione e M è il suo ideale massimale; inoltre K è il campo dei quozienti di V.*

Dimostrazione. Che $\preceq$ sia una relazione d'ordine è ovvio; quasi altrettanto ovvio è che $(\mathcal{S}, \preceq)$ è un insieme induttivo. Infatti, sia $\{(A_j, H_j) \mid j \in J\}$ una catena non vuota in $(\mathcal{S}, \preceq)$, e siano $A = \bigcup\{A_j \mid j \in J\}$ e $H = \bigcup\{H_j \mid j \in J\}$. Allora A è un sottoanello di K contenente R; inoltre $1_A = 1_R \notin H$ e $H \lhd A$: che H costituisca un sottogruppo di $(A, +)$ è ovvio; se $h \in H$ e $a \in A$ esiste $j \in J$ tale che $h \in H_j$ e $a \in A_j$, quindi $ha \in H_j \subseteq H$. Dunque $(A, H) \in \mathcal{S}$. Il lemma di Zorn assicura quindi l'esistenza di qualche elemento massimale in $\mathcal{S}$. Sia (V, M) un tale elemento massimale; ovviamente M è un ideale massimale in V; resta da provare che V è di valutazione. Per farlo basterà provare che, per ogni $c \in K$, o $c \in V$ oppure $c^{-1} \in V$; la qual cosa implica anche che K è il campo dei quozienti di V.

[4] ovvero, con la terminologia che verrà introdotta più avanti, per l'ideale frazionario $(dR)^{-1}$

Sia $c \in K \setminus V$. La $\preceq$-massimalità di (V, M) implica $(V[c], MV[c]) \notin \mathcal{S}$,[5] quindi $MV[c] = V[c]$, ovvero $1_R \in MV[c]$. Come è facile verificare, $MV[c] = \{f(c) \mid f \in M[x]\}$, dove abbiamo indicato con $M[x]$ l'ideale generato da M in $V[x]$, che è costituito dai polinomi i cui coefficienti appartengono a M. Esiste dunque $f \in M[x]$ tale che $1_K = f(c)$. Ragionando per assurdo, supponiamo $c^{-1} \notin V$. Come nel caso di c, questo comporta l'esistenza di $g \in M[x]$ tale che $1_K = g(c^{-1})$. Posto $n = \nu f$ e $m = \nu g$, supponiamo di aver scelto f e g in modo che $n + m$ abbia il minimo valore possibile. Per fissare le idee, sia $n \geq m$. Se $g = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, moltiplicando per c^n entrambi i membri di $1_K = g(c^{-1})$ abbiamo $(1_K - a_0)c^n = \sum_{i=n-m}^{n-1} a_{n-i} c^i$. D'altra parte, $1_K = (1_K - a_0)f(c) + a_0$ e nel secondo membro di questa equazione si può sostituire il termine $(1_K - a_0)c^n$ con $\sum_{i=n-m}^{n-1} a_{n-i} c^i$, grazie all'equazione precedente. Si ottiene in questo modo un polinomio $f_1 \in M[x]$, di grado minore di n, tale che $f_1(c) = 1_K$.[6] Ciò contraddice la scelta di n e m; si conclude così la dimostrazione. □

Non è difficile provare che, come gli anelli fattoriali, anche gli anelli di valutazione sono integralmente chiusi: in questo consiste la prima parte della dimostrazione del prossimo risultato. Il lemma 10.17 permette in un certo senso di invertire questa osservazione, fornendo una descrizione della chiusura intera di un dominio di integrità unitario nel suo campo dei quozienti.

Proposizione 10.18. *Sia R un dominio di integrità unitario e sia K il suo campo dei quozienti. Detto $\mathcal{V}$ l'insieme dei sottoanelli di K contenenti R che siano di valutazione, $\bigcap \mathcal{V}$ è la chiusura intera di R in K.*

Dimostrazione. Sia $V \in \mathcal{V}$, e sia $c \in K \setminus V$. Allora $c^{-1} \in V$; ce lo assicura la condizione (AV_4) nella definizione di anello di valutazione. Se c è intero su R, allora $c \in R[c^{-1}]$ per il corollario 10.2. Ma $R[c^{-1}] \subseteq V$, questa è dunque una contraddizione, sicché c non è intero su R. Abbiamo così provato che la chiusura intera di R in K è contenuta in $\bigcap \mathcal{V}$.

Viceversa, sia $c \in \bigcap \mathcal{V}$. Se c non è intero su R, allora $c \notin A := R[c^{-1}]$. Dunque $H := c^{-1}A$ è un ideale proprio di A, quindi, applicando il lemma 10.17, otteniamo un sottoanello di valutazione V di R tale che $A \subseteq V$ e H sia contenuto nell'ideale massimale di V. Allora $V \in \mathcal{V}$ e $c^{-1} \notin \mathcal{U}(V)$, dunque $c \notin V$, il che contraddice l'assunzione $c \in \bigcap \mathcal{V}$. Dunque: c è intero su R; la dimostrazione è così completa. □

Esercizi, Esempi, Osservazioni.

10.C.1. Sia R un anello di valutazione, I il suo ideale massimale e K il suo campo dei quozienti. Verificare che l'insieme $\mathcal{S}$ definito come nel lemma 10.17 a partire da K, R e I ha proprio (R, I) come unico elemento. Di conseguenza, ogni anello di valutazione è ottenibile dalla costruzione nel lemma 10.17.

10.C.2. Verificare che tutti gli anelli di frazioni non nulli di un anello di valutazione sono anelli di valutazione.

10.C.3. Sia R un anello fattoriale in cui gli irriducibili sono tutti associati tra loro. Descriverne gli ideali principali e dedurre che R è un anello principale di valutazione. Un anello con le proprietà qui richieste per R è l'anello delle serie formali $K[[x]]$, per un qualsiasi campo K.

10.C.4. Sia $(G, +, \leq)$ un gruppo abeliano totalmente ordinato, cioè un gruppo abeliano $(G, +)$ su cui è definita una relazione di ordine totale $\leq$ tale che per ogni $g \in G$ l'applicazione $a \in G \mapsto a + g \in G$ sia (strettamente) crescente. Se K è un campo, una *valutazione* da K

[5] $MV[c]$ va letto come $M(V[c])$, l'ideale di $V[c]$ generato da M. Come sostanzialmente osservato appena oltre, esso coincide con il sottoanello $M[c]$ generato da $M \cup \{c\}$ in $V[c]$.

[6] per quanto irrilevante sia, osserviamo che $f_1 = a_0 + (1_K - a_0)(f - bx^n) + b\sum_{i=n-m}^{n-1} a_{n-i} x^i$, dove b è il coefficiente direttore di f.

a G è un omomorfismo v (di gruppi) dal gruppo moltiplicativo K^* di K a G tale che, per ogni $a, b \in K^*$ si abbia $(a+b)^v \geq \min\{a^v, b^v\}$, a condizione che $(a+b)^v$ sia definito, cioè $a \neq -b$. Spesso ci si libera di quest'ultima clausola aggiungendo a G un simbolo $+\infty$ (non appartiene a G) con l'usuale interpretazione convenzionale: si estendono sia l'ordinamento di G che la sua operazione a $\hat{G} = G \cup \{+\infty\}$ in modo che $+\infty$ sia il massimo di $\hat{G}$ e verifichi la proprietà di assorbimento: $g + (+\infty) = (+\infty) + g = +\infty$ per ogni $g \in \hat{G}$; si prolunga poi v ponendo ${0_K}^v = +\infty$. In questo modo v diventa un'applicazione $K \to \hat{G}$, ma ovviamente $\hat{G}$ non è più un gruppo.

Si può dimostrare che se v è una valutazione, come sopra descritta, $R_v := \{k \in K \mid k^v \geq 0_G\} \cup \{0_K\}$ è un sottoanello di K (detto l'anello della valutazione v) ed è un anello di valutazione del senso da noi definito. Infatti, per ogni $c \in K^*$, se $c \notin R_v$, cioè $c^v < 0_G$, allora $(c^{-1})^v > 0_G$, quindi $c^{-1} \in R_v$ (in particolare: $K = Q(R_v)$). Si verifica che gli elementi invertibili di R_v sono precisamente quelli che hanno valutazione (cioè immagine mediante v) uguale a 0_G, dunque l'ideale massimale di R_v è $M_v = \{k \in K \mid k^v > 0_G\} \cup \{0_K\}$. La valutazione v descrive la relazione di divisibilità in R_v, nel senso che i divisori di un elemento non nullo a di R_v sono precisamente quegli elementi $b \in R_v$ tali che $b^v \leq a^v$.

Viceversa, se R è un anello di valutazione, nel senso da noi definito, il gruppo $\mathfrak{F}_P(R)$ dei suoi ideali frazionari principali è totalmente ordinato dalla relazione $\supseteq$ di inclusione inversa, e, se $K = Q(R)$, l'applicazione $\digamma : k \in K \mapsto kR \in \mathfrak{F}_P(R)$ è una valutazione. Come è chiaro, l'anello della valutazione $\digamma$ è proprio R.

Possiamo concludere che la nostra definizione di anello di valutazione equivale a quella appena descritta in questa osservazione.

Aggiungiamo ancora: non è difficile provare (esercizio 10.C.6) che gli anelli di valutazione principali sono precisamente quelli che possono essere definiti da valutazioni a valori in $\mathbb{Z}$. Questa è l'origine del nome anelli di valutazione discreta che per essi si usa.

10.C.5. Facciamo qualche esempio di valutazione e compariamo questi con gli esempi che abbiamo già visto di anelli di valutazione. Iniziamo dall'esempio più banale: ogni campo K è un anello di valutazione; una valutazione che lo descrive come tale è l'omomorfismo nullo da K^* ad un qualsiasi gruppo abeliano totalmente ordinato.

Un esempio più significativo: per ogni intero primo p ed ogni $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, sia $p^{v_p(n)}$ la massima potenza di p che divide n. Si verifichi (per esercizio) che l'applicazione $v_p \colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ che ad ogni numero razionale non nullo a/b (con a e b interi) associa $v_p(a) - v_p(b)$ è (ben definita e) una valutazione (che $\mathbb{Z}$ sia un gruppo abeliano totalmente ordinato dall'ordinamento usuale dovrebbe essere chiaro). L'anello della valutazione v_p è evidentemente $\mathbb{Q}_{p'}$.

L'applicazione v_p è la cosiddetta *valutazione p-adica* definita sui razionali ed ha grande importanza, ad esempio, nella costruzione del campo dei numeri p-adici. È noto che le valutazioni p-adiche (una per ciascun primo p) e la valutazione banale (l'omomorfismo nullo) sono (in un senso che andrebbe precisato) essenzialmente le sole valutazioni definite sul campo razionale.

L'idea della valutazione p-adica si può estendere, in modo ovvio, sostituendo a p un primo in un qualsiasi anello fattoriale R e a $\mathbb{Q}$ il campo $Q(R)$. Ad esempio, per ogni campo K si definisce la valutazione x-adica da $K(x)^*$ a $\mathbb{Z}$ associando ad un rapporto f/g tra due polinomi non nulli a coefficienti in K l'intero $v_x(f) - v_x(g)$, dove $x^{v_x(f)}$ è la massima potenza di x che divide f (cioè la molteplicità di 0_K come radice di f) e $v_x(g)$ è definito similmente. Analogamente si può definire la valutazione x-adica sull'anello dei quozienti di $K[[x]]$ (che è di valutazione, si veda l'esercizio 10.C.3). In entrambi i casi, $v_x(f)$ ha una semplice descrizione in termini dei coefficienti di f, quale?

10.C.6. Provare l'affermazione conclusiva nell'osservazione 10.C.4, cioè che gli anelli principali di valutazione sono tutti e soli gli anelli delle valutazioni a valori in $(\mathbb{Z}, +, \leq)$. Per farlo, si

verifichi innanzitutto che se R è un anello principale di valutazione, allora o R è un campo (e quindi l'anello di una valutazione nulla) oppure il suo ideale massimale è della forma pR per un opportuno elemento irriducibile p, ed in questo caso R è l'anello della valutazione p-adica (definita nell'esempio 10.C.5) in un suo campo dei quozienti. Viceversa, se R è, nel senso definito nell'osservazione 10.C.4, l'anello di una valutazione a valori in $(\mathbb{Z}, +)$, osservato che gli elementi di R hanno valutazione non negativa, si verifichi che ogni ideale non nullo di R ha un elemento non nullo di valutazione minima e che questo ne è un generatore.

10.C.7. Scelto comunque un gruppo abeliano totalmente ordinato G, si possono costruire esempi di anelli di valutazione che abbiano il gruppo ordinato degli ideali principali frazionari isomorfo a G. Per farlo si può partire dall'*algebra gruppo* RG costruita su un dominio di integrità unitario R: questa è una R-algebra (commutativa, unitaria) di sostegno l'insieme delle famiglie $(r_g)_{g\in G} \in R^G$ a supporto finito, tali cioè che l'insieme $\{g \in G \mid r_g \neq 0_R\}$, in cui l'addizione è definita come addizione puntuale, il prodotto tra due elementi $(r_g)_{g\in G}$ e $(s_g)_{g\in G}$ è la famiglia $(t_g)_{g\in G}$, dove, per ogni $g \in G$, t_g è definito come $\sum_{h\in G} r_h s_{g-h}$ (questa operazione è abitualmente chiamata *prodotto di convoluzione*); il prodotto esterno tra un $(s_g)_{g\in G} \in RG$ ed un $r \in R$ è $(s_g r)_{g\in G}$. Si lascia a chi legge la verifica che tutto sia correttamente definito. Talvolta si introduce un simbolo aggiuntivo, x, e si indicano gli elementi $(r_g)_{g\in G}$ di RG come $\sum_{g\in G} r_g x^g$; con questa convenzione notazionale le operazioni definite estendono formalmente quelle che usiamo manipolando polinomi, avendosi $x^g x^h = x^{g+h}$ per ogni $g, h \in G$ (non troppo sorprendentemente: per $G = \mathbb{Z}$ $R\mathbb{Z}$ è isomorfo al sottoanello $R[x, x^{-1}] = \{x^{-n} f \mid n \in \mathbb{N} \wedge f \in R[x]\}$ del campo dei quozienti dell'anello di polinomi $R[x]$; una costruzione leggermente diversa condotta a partire dal monoide $(\mathbb{N}, +)$ anziché G fornisce proprio $R[x]$). Se, per ogni $r \in RG \setminus 0$, poniamo $r^v = \min g \in G \mid r_g \neq 0_G$, si verifica facilmente che per ogni $r, s \in RG \setminus 0$ si ha $(rs)^v = r^v s^v$ e, se $r \neq -s$, $(r + s)^v \geq \min\{r^v, s^v\}$. Segue da ciò che, se $K = Q(RG)$ l'applicazione v che a ciascun $r/s \in K^*$ (con $r, s \in RG$) associa $r^v - s^v$ è una valutazione suriettiva a valori in G. Pertanto l'anello di questa valutazione: $\{r/s \mid r, s \in RG \wedge s \neq 0 \wedge s^v \leq r^v\}$ è di valutazione ed ha la proprietà richiesta.

11 Funtori Hom e moduli proiettivi

Vengono qui introdotti, in modo ridotto all'essenziale, alcune nozioni di carattere omologico, allo scopo di introdurre la nozione di modulo proiettivo. Non viene trattata la nozione, duale, di modulo iniettivo.

La teoria verrà svolta solo per moduli e non per premoduli. La ragione è che in questo contesto non siamo interessati all'anello degli scalari su cui i (pre)moduli sono costruiti, quindi non si perde in generalità nel sostituire eventuali premoduli su un anello commutativo R con i corrispondenti moduli sull'anello accresciuto definito da R.

11.1 Sequenze di moduli

Fissiamo, per tutta questa sezione, un anello commutativo unitario R. Per sequenza di moduli si intende una famiglia di omomorfismi di R-moduli $(\alpha_i)_{i\in I}$ indiciata in un intervallo I dell'insieme dei numeri interi tale che, per ogni $i \in I$, a meno che i non sia il massimo di I il dominio di α_{i+1} coincida col codominio di α_i (dunque, la richiesta è che omomorfismi consecutivi nella famiglia siano sempre componibili, nell'ordine in cui appaiono). Rappresenteremo una tale sequenza con scritture come

$$\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_{i+2} \xrightarrow{\alpha_{i+2}} \cdots \qquad (*)$$

dove, chiaramente, abbiamo indicato, per ogni $i \in I$, con A_i il dominio di α_i. Se i è un elemento di I diverso dal suo eventuale minimo, si dice che la sequenza è quasi esatta al livello i (o, informalmente e in modo potenzialmente ambiguo, in [corrispondenza di] A_i) se $\alpha_{i-1}\alpha_i = 0$ (con 0 indichiamo un qualsiasi omomorfismo nullo; in questo caso quello da A_{i-1} a A_{i+1}); ovviamente questo equivale a richiedere $\operatorname{im}\alpha_{i-1} \subseteq \ker\alpha_i$. Una sequenza che sia quasi esatta ad ogni livello (escluso l'eventuale minimo di I) si dice *quasi esatta* o *complesso di catene*. Anche se non è essenziale, osserviamo che ogni sequenza di moduli come in $(*)$ si può riguardare come restrizione di una sequenza indiciata in $\mathbb{Z}$, che è quasi esatta se lo è la sequenza originaria: è sufficiente prolungarla con omomorfismi nulli, ad esempio ponendo $A_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ che sia minore di $\min I$ o maggiore di $\max I + 1$ (qualora questi esistano) e, di conseguenza $\alpha_n = 0$, per ogni tale $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus I$.

Una sequenza $(\alpha_i)_{i\in I}$ di R-moduli si dice poi *esatta* al livello i se e solo se $\operatorname{im}\alpha_{i-1} = \ker\alpha_i$; la si dice esatta se è esatta ad ogni livello (escluso, come sopra, $\min I$).

Vediamo qualche esempio. Dire che una sequenza come

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

è esatta significa dire $A = 0$, perché certamente A è il nucleo dell'omomorfismo di destra, quindi dire che la sequenza è esatta (in A) significa dire che A coincide con l'immagine dell'omomorfismo di sinistra, che è il sottomodulo nullo di A. Più in generale, l'esattezza di sequenze della forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \qquad \text{o} \qquad A \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

significa che α è un monomorfismo, nel primo caso, o che β è un epimorfismo, nel secondo. Per la prima sequenza abbiamo infatti che l'immagine dell'omomorfismo a sinistra di A è 0, quindi l'esattezza della sequenza equivale a $\ker\alpha = 0$; per quanto riguarda la seconda invece sappiamo

che l'omomorfismo a destra di B ha per nucleo B stesso, quindi l'esattezza della sequenza equivale a $\operatorname{im}\beta = B$.

Il primo caso interessante è quello delle *sequenze esatte corte*, cioè sequenze della forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma} C \longrightarrow 0,$$

dove A, B e C sono moduli arbitrari, che, alla luce di quanto osservato nel paragrafo precedente possiamo scrivere (e scriveremo) in modo più compatto come

$$A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C.$$

Le sequenze esatte corte permettono di esprimere in modo preciso la nozione, che abbiamo già introdotto informalmente, di estensione di moduli. Abbiamo infatti:

Lemma 11.1. *Sia $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$ una sequenza esatta corta di moduli. Allora, se $A_0 = \operatorname{im}\alpha$, si ha che A_0 è un sottomodulo di B isomorfo ad A e tale che $B/A_0 \simeq C$. Viceversa, scelti comunque un modulo B, un suo sottomodulo A_0 ed isomorfismi $\varphi\colon A \to A_0$ e $\psi\colon B/A_0 \to C$, gli omomorfismi $\alpha\colon \in A \mapsto a^{\varphi} \in B$ e $\gamma\colon b \in B \mapsto (b + A_0)^{\psi} \in C$ definiscono una sequenza esatta corta $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$.*

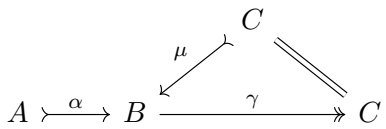
Dimostrazione. Per la prima parte dell'enunciato: ovviamente $A_0 \simeq A$; inoltre $A_0 = \ker\gamma$ perché la sequenza data è esatta, quindi $B/A_0 = B/\ker\gamma \simeq \operatorname{im}\gamma = C$. Viceversa, se A_0, α e γ sono come nella seconda parte dell'enunciato, è evidente che $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$ è una sequenza esatta corta, dal momento che α è un monomorfismo, γ è un epimorfismo e $A_0 = \operatorname{im}\alpha = \ker\gamma$. □

D'ora in avanti chiameremo *estensione* di moduli ogni sequenza esatta corta; più precisamente una estensione di un R-modulo A mediante un R-modulo C è, per definizione, una sequenza esatta corta di R-moduli della forma $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$. In questo contesto ci si riferisce informalmente a B come modulo estensione, giustificando così l'uso che abbiamo già fatto di questo termine.

Come ovvio esempio, se M è un modulo e N un suo sottomodulo, è una estensione (di N mediante M/N) la sequenza $N \hookrightarrow M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/N$, dove π è l'epimorfismo canonico.

Estensioni spezzate Dati comunque due R-moduli A e C è sempre possibile costruire estensioni di A mediante C; la maniera più facile è costruire la somma diretta (esterna) $B = A \oplus C$ ed usare il monomorfismo $A \rightarrowtail B$ e la proiezione $B \twoheadrightarrow C$ canoniche per costruire la sequenza esatta corta richiesta. Le estensioni di questo tipo si caratterizzano in termini degli omomorfismi che le descrivono, come stiamo per vedere.

Un'estensione $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$ di R-moduli si dice *spezzata* se e solo se esiste un R-omomorfismo $\mu\colon C \to B$ tale che $\mu\gamma = \mathrm{id}_C$. Se esiste, un tale μ è ovviamente iniettivo, questo spiega perché μ viene spesso chiamato un *mono spezzante* per l'estensione data. Le estensioni spezzate sono dunque quelle che dànno luogo ad un diagramma commutativo di questa forma:



Proposizione 11.2. *Sia $\mathcal{E}\colon A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$ una estensione di moduli. Allora $\mathcal{E}$ è spezzata se e solo se $B = \operatorname{im}\alpha \oplus K$ per un opportuno sottomodulo K di B.*

Dimostrazione. Poniamo $A_0 := \operatorname{im}\alpha$. Supponiamo che $\mathcal{E}$ sia spezzata e chiamiamo μ un suo mono spezzante. Sia $K = \operatorname{im}\mu$. Allora $K \cap A_0 = 0$: infatti, se $k \in K \cap A_0$ allora $k = c^{\mu}$ per un opportuno $c \in C$, ma allora da $\mu\gamma = \mathrm{id}_C$ e $k \in A_0 = \ker\gamma$ segue $c = c^{\mu\gamma} = k^{\gamma} = 0_C$,

quindi $k = c^\mu = 0_B$. Inoltre, per ogni $b \in B$ si ha $b^{\gamma\mu\gamma} = b^\gamma$, quindi $(b - b^{\gamma\mu})^\gamma = 0_C$, cioè $b - b^{\gamma\mu} \in \ker\gamma = A_0$. Allora $b = (b - b^{\gamma\mu}) + b^{\gamma\mu} \in A_0 + \operatorname{im}\mu = A_0 + K$. Con ciò è provato che, se $\mathcal{E}$ è spezzata, allora A_0 è un sommando diretto in B.

Viceversa, supponiamo $B = A_0 \oplus K$ per un opportuno sottomodulo K di B. Detta ζ la restrizione di γ a K, abbiamo $\ker\zeta = K \cap \ker\gamma = K \cap A_0 = 0$, quindi ζ è un monomorfismo. Inoltre $C = \operatorname{im}\gamma = A_0^{\vec{\gamma}} + K^{\vec{\gamma}} = K^{\vec{\gamma}} = \operatorname{im}\zeta$, dal momento che $A_0^{\vec{\gamma}} = 0$, quindi ζ è anche suriettiva. Dunque, ζ è un isomorfismo. Sia $\mu = \zeta^{-1}\iota$, dove ι è l'immersione di K in B. Allora $\mu\colon C \to B$ e, per ogni $c \in C$, $c^{\mu\gamma} = c^{\mu\zeta} = c$, quindi $\mu\gamma = \mathrm{id}_C$, vale a dire: μ è un mono spezzante per $\mathcal{E}$, che risulta così spezzata. □

Le estensioni realizzate come somma diretta possono essere caratterizzare anche in modo duale, in termini cioè di un *epi spezzante*, vale a dire, con le stesse notazioni della proposizione precedente, di un R-omomorfismo $\varepsilon\colon B \to A$ tale che $\alpha\varepsilon = \mathrm{id}_A$. Ovviamente ogni tale ε è effettivamente un epimorfismo.

Proposizione 11.3. *Sia $\mathcal{E}\colon A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$ una estensione di moduli. Allora $\mathcal{E}$ è spezzata se e solo se ammette un epi spezzante*

La dimostrazione è lasciata per esercizio: consiste nel verificare, in modo analogo a quanto fatto per la proposizione 11.2, che l'estensione data ha un epi spezzante se e solo se $\operatorname{im}\alpha$ è un sommando diretto in B.

Esercizi ed Osservazioni.

11.A.1. Dimostrare la proposizione 11.3.

11.A.2. Sia $\mathcal{E}\colon A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$ una estensione di moduli. È chiaro che esiste sempre un'applicazione (iniettiva) $\mu\colon C \to B$ tale che $\mu\gamma = \mathrm{id}_C$. La condizione che definisce l'essere $\mathcal{E}$ un'estensione spezzata è che tra tutte le tali possibili applicazioni μ ce ne sia almeno una che sia un omomorfismo di R-moduli. Discorso analogo vale per la nozione di epi spezzante.

11.A.3. Anche per almeno un'altra categoria, quella dei gruppi (e, in verità, per molte altre), hanno senso le nozioni di estensione (come sequenza esatta corta) e di estensione spezzata, e valgono, con dimostrazioni analoghe, risultati corrispondenti a quelli enunciati per le categorie di moduli. C'è però un'importante differenza: l'esistenza di un mono spezzante per una estensione di gruppi equivale al fatto che l'estensione si realizzi come prodotto semidiretto, l'esistenza di un epi spezzante equivale invece ad una decomposizione in prodotto diretto. Quindi, mentre per le estensioni di moduli l'esistenza di un mono spezzante e di un epi spezzante sono proprietà equivalenti, lo stesso non vale per le estensioni di gruppi, per le quali la seconda proprietà è decisamente più forte della prima.

Osserviamo infine che la terminologia relativa alle sequenze di moduli si estende ad un caso molto simile, quello in cui $(\alpha_i)_{i\in I}$ sia un famiglia di omomorfismi di R-moduli a due a due componibili nel verso contrario a quello considerato in $(*)$:

$$\cdots \longrightarrow A_{i+2} \xrightarrow{\alpha_{i+2}} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \cdots \qquad (**)$$

Questo caso non differisce da quello considerato prima se non per una ridefinizione degli indici: basta sostituire l'intervallo I con $I^- := \{-i \mid i \in I\}$ per ottenere la sequenza di moduli $(\alpha_{-i})_{i\in I^-}$, il cui studio è ovviamente del tutto equivalente a quello di $(\alpha_i)_{i\in I}$. Si dice che quella rappresentata in $(**)$ è una sequenza quasi esatta, o una sequenza esatta, se la sequenza $(\alpha_{-i})_{i\in I^-}$ ha la stessa proprietà. Nel caso in cui $(\alpha_i)_{i\in I}$ sia quasi esatta, essa prende anche il nome di *complesso di cocatene*.

11.2 I funtori Hom

Siano R un anello commutativo unitario, A e B due R-moduli. L'insieme B^A delle applicazioni da A a B ha una struttura di R-modulo, quella di prodotto diretto di $|A|$ copie di B: $B^A = \prod_{a\in A} B$. L'operazione additiva di B^A non è altro che l'addizione puntuale (per essere chiari: se $f, g \in B^A$, allora $f = (a^f)_{a\in A}$ e $g = (a^g)_{a\in A}$, dunque $f + g = (a^f + a^g)_{a\in A}$ è l'applicazione $a \in A \mapsto a^f + a^g \in B$); il prodotto esterno è invece descritto da $fr\colon a \in A \mapsto a^f r \in B$ per ogni $f \in B^A$ e $r \in R$.

Sia $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ l'insieme degli R-omomorfismi da A a B. Non è difficile verificare che $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ è un R-sottomodulo di B^A. Infatti, per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ e per ogni $r \in R$, sia

$$\alpha + \beta\colon a \in A \longmapsto a^\alpha + a^\beta \in B$$

che

$$\alpha r\colon a \in A \longmapsto a^\alpha r = (ar)^\alpha \in B$$

sono R-omomorfismi, dal momento che, per ogni $x, y \in A$ e $s \in R$ abbiamo:

$$(x + y)^{\alpha+\beta} = (x + y)^\alpha + (x + y)^\beta = x^\alpha + y^\alpha + x^\beta + y^\beta = x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta}$$

e

$$(xs)^{\alpha r} = (xs)^\alpha\, r = (x^\alpha s)r = x^\alpha(sr) = x^\alpha(rs) = (x^\alpha r)s = x^{\alpha r}s;$$

si noti che qui è essenziale la commutatività di R.

Fissiamo un R-modulo M. Possiamo utilizzare M e le considerazioni appena fatte per associare ad ogni R-modulo A l'R-modulo $A_* = \mathrm{Hom}(M, A)$. Inoltre, se A e B sono R-moduli, ad ogni $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ possiamo associare l'R-omomorfismo α_* da A_* a B_* così definito: $\alpha_*\colon \varphi \in \mathrm{Hom}(M, A) \mapsto \varphi\alpha \in \mathrm{Hom}(M, B)$. Come è evidente, se α e β sono R-omomorfismi componibili (nell'ordine dato), cioè se il dominio di β coincide col codominio di α, allora $(\alpha\beta)_* = \alpha_*\beta_*$; inoltre, se α è l'omomorfismo identico in A allora α_* è l'omomorfismo identico in A_*. In teoria delle categorie, queste proprietà vengono espresse dicendo che questa trasformazione (di moduli in moduli e omomorfismi in omomorfismi) è un funtore covariante (dalla categoria degli R-moduli in sé). Non approfondiremo questi aspetti generali né tenteremo di dare le definizioni formali pertinenti, ci limiteremo ad usare queste espressioni in relazione al nostro specifico esempio, che chiamiamo il *funtore Hom covariante* definito da M, indicato come $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, o semplicemente $\mathrm{Hom}(M, -)$ se non è necessario specificare l'anello R.

Lemma 11.4. *Siano R un anello commutativo unitario e sia $\alpha\colon A \to B$ un omomorfismo di R-moduli. Sia poi M un R-modulo. Allora l'omomorfismo α_*, immagine di α mediante il funtore $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, ha per nucleo $\{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, A) \mid \mathrm{im}\,\varphi \subseteq \ker\alpha\}$. Dunque:*
(i) $\ker\alpha_* \simeq_R (\ker\alpha)_*$, *dove quest'ultimo è l'immagine di $\ker\alpha$ mediante $\mathrm{Hom}_R(M, -)$;*
(ii) *se α è un monomorfismo, allora anche α_* è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$. Allora $\varphi^{\alpha_*} = \varphi\alpha$, dunque $\varphi \in \ker\alpha_*$ se e solo se $\varphi\alpha = 0$, ovvero se e solo se $\mathrm{im}\,\varphi \subseteq \ker\alpha$. Questo prova la prima parte dell'enunciato. Le due conseguenze elencate sono ora ovvie: per ogni $\varphi \in \ker\alpha_*$, risulta ben definita la ridotta φ' di φ a $\ker\alpha$ (perché questo sottomodulo contiene $\mathrm{im}\,\varphi$); inoltre φ' è un R-omomorfismo e l'applicazione $\varphi \mapsto \varphi'$ da $\ker\alpha_*$ a $\mathrm{Hom}_R(M, \ker\varphi)$ è un R-isomorfismo. Ma $\mathrm{Hom}_R(M, \ker\varphi) = (\ker\alpha)_*$ e così abbiamo provato (i); (ii) segue in modo ancora più ovvio. □

Il risultato appena provato viene talvolta espresso dicendo che il funtore $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ conserva i nuclei. Ne troveremo presto un'altra interpretazione.

La nozione di funtore covariante ne ha una duale, quella di funtore controvariante. Sempre per un fissato R-modulo M, il *funtore Hom controvariante* definito da M, indicato come $\mathrm{Hom}(-, M)$,

è quello che associa ad ogni R-modulo A l'R-modulo $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, M)$ e ad ogni R-omomorfismo $\alpha\colon A \to B$ l'R-omomorfismo $\alpha^*\colon \varphi \in B^* \to \alpha\varphi \in A^*$. Si noti l'"inversione" del verso della freccia (si va da $A \to B$ a $B^* \to A^*$); è questo che rende ragione del prefisso "contro" in "controvariante". Ciò che qualifica $\mathrm{Hom}(-, M)$ come funtore controvariante è il fatto che vale $(\mathrm{id}_A)^* = \mathrm{id}_{A^*}$ per ogni modulo A e $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$ per ogni coppia di omomorfismi componibili α e β.

A differenza dei funtori Hom covarianti, i funtori Hom controvarianti non conservano i nuclei, ma, come si dice, mandano nuclei in conuclei, ovvero ker in coker.[1] Per un arbitrario omomorfismo α di codominio B, $\operatorname{coker}\alpha$ è per definizione $B/\operatorname{im}\alpha$.

Lemma 11.5. *Siano R un anello commutativo unitario e sia $\alpha\colon A \to B$ un omomorfismo di R-moduli. Sia poi M un R-modulo. Allora l'omomorfismo α^*, immagine di α mediante il funtore $\mathrm{Hom}_R(-, M)$, ha per nucleo $\{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B, M) \mid \operatorname{im}\alpha \subseteq \ker\varphi\}$. Dunque:*
(i) $\ker\alpha^* \simeq_R (\operatorname{coker}\alpha)^*$, *dove quest'ultimo è l'immagine di $\operatorname{coker}\alpha$ mediante $\mathrm{Hom}_R(-, M)$;*
(ii) *se α è un epimorfismo, allora α^* è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in B^* = \mathrm{Hom}(B, M)$ si ha $\varphi^{\alpha^*} = \alpha\varphi$, quindi $\varphi \in \ker\alpha^*$ se e solo se $\operatorname{im}\alpha \subseteq \ker\varphi$; otteniamo così la descrizione di $\ker\alpha^*$ richiesta nell'enunciato. Da qui segue immediatamente che α^* è iniettivo se α è suriettivo; vale quindi la (ii). Infine, se $\varphi \in \ker\alpha^*$ allora, poiché $\operatorname{im}\alpha \subseteq \ker\varphi$, è ben definito l'$R$-omomorfismo $\varphi'\colon x + \operatorname{im}\alpha \in \operatorname{coker}\alpha \mapsto x^\varphi \in M$; si vede molto facilmente che la posizione $\varphi \mapsto \varphi'$ definisce un R-isomorfismo da $\ker\alpha^*$ a $(\operatorname{coker}\alpha)^*$, provando così la (i). □

Osservazioni.

11.B.1. Il fatto che, per due moduli A e B sull'anello commutativo unitario R, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ sia un R-sottomodulo di B^A dipende in modo essenziale dalla commutatività di R. Questa è forse la principale differenza tra la teoria dei moduli su anelli commutativi e l'analoga teoria per anelli arbitrari.

11.B.2. Le categorie di moduli ricadono in una classe piuttosto particolare, quella delle cosiddette categorie abeliane. Tra le proprietà specifiche di queste categorie (senza le quali non sarebbe possibile sviluppare la teoria a cui accenniamo in questo capitolo) sono il fatto che, come abbiamo visto, gli insiemi degli omomorfismi sono muniti di un'operazione che li struttura come gruppi abeliani (nel nostro caso quella di addizione puntuale, che li rende addirittura moduli), e che è possibile per i morfismi di queste categorie definire nozioni di ker, im, coker con le proprietà familiari—ad esempio, la validità del primo teorema di omomorfismo. Una presentazione abbastanza sintetica delle categorie abeliane si trova nel terzo capitolo del terzo volume del libro di Cohn citato tra i riferimenti bibliografici.

11.B.3. Anche i funtori Hom che abbiamo presentato qui hanno una proprietà che li distingue da altri funtori tra categorie abeliane, quella di essere funtori additivi. La proprietà, che si chiede qui di verificare, è questa: per ogni R-modulo M, scelti comunque due R-moduli A e B le applicazioni $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B) \mapsto \alpha_* \in \mathrm{Hom}_R(A_*, B_*)$ e $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B) \mapsto \alpha^* \in \mathrm{Hom}_R(A^*, B^*)$ sono omomorfismi di gruppi abeliani (anzi, nel nostro caso, addirittura di R-moduli).

11.B.4. Se R è un anello commutativo unitario, il fatto che R_R sia un R-modulo libero su $\{1_R\}$ si traduce nel fatto che, per ogni R-modulo M, $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M) \mapsto (1_R)^\alpha \in M$ sia un isomorfismo di R-moduli. Verificarlo.

[1] in questo contesto la parola 'coker' va accentata sulla seconda sillaba.

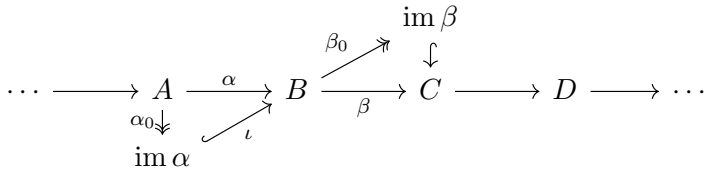
11.3 Funtori esatti

Sia F un funtore tra categorie di moduli (cioè, per due anelli commutativi unitari R ed S, un funtore dalla categoria degli R-moduli a quella degli S-moduli). Se F trasforma moduli nulli in moduli nulli e di conseguenza (esercizio!) omomorfismi nulli in omomorfismi nulli,[2] dal momento che, come ogni funtore, F rispetta la composizione tra morfismi (trasforma un morfismo $\alpha\beta$ in $\alpha^F\beta^F$ se è covariante, in $\beta^F\alpha^F$ se è controvariante), dovrebbe risultare chiaro che F trasforma ogni complesso di catene di R-moduli in un complesso di catene di S-moduli se F è covariante, in un complesso di cocatene se F è controvariante. Si dice che F è *esatto* se e solo F trasforma ogni sequenza esatta in una sequenza esatta. L'esattezza di un funtore si può equivalentemente esprimere in termini di sequenze esatte corte.

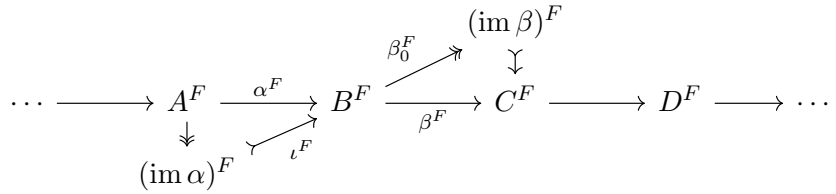
Proposizione 11.6. *Sia F un funtore tra categorie di moduli. Allora F è esatto se e solo trasforma sequenze esatte corte in sequenze esatte corte.*

Dimostrazione. Assumiamo che F sia definito nella categoria degli R-moduli (dove R è un anello commutativo unitario) e che sia covariante; la dimostrazione è analoga nel caso controvariante. Dovendo solo provare l'implicazione non ovvia, supponiamo che F trasformi ogni sequenza esatta corta in una sequenza esatta corta. Se 0 è un R-modulo nullo, allora $0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$ è una sequenza esatta corta, quindi anche $0^F \to 0^F \to 0^F \to 0^F \to 0^F$ lo è, sicché 0^F è un modulo nullo (si noti che tutti i morfismi, in entrambe le sequenze, sono identici). Dunque, F trasforma moduli nulli in moduli nulli. Sia $\theta\colon A \to B$ un omomorfismo di R-moduli. Se θ è un monomorfismo, allora $0 \to A \xrightarrow{\theta} B \to C := \operatorname{coker}\theta \to 0$ è esatta e quindi risulterà esatta anche $0 \to a^F \xrightarrow{\theta^F} B^F \to C^F \to 0$; dunque θ^F è mono. Se invece θ è epi, allora dall'esattezza di $0 \to K := \ker\theta \to A \xrightarrow{\theta} B \to 0$, segue l'esattezza di $0 \to K^F \to A \xrightarrow{\theta^F} B^F \to 0$, sicché θ^F è epi. Vediamo così che F trasforma monomorfismi in monomorfismi ed epimorfismi in epimorfismi.

Sia ora data un'arbitraria sequenza esatta $\mathcal{E}\colon \cdots \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to D \to \cdots$ di R-moduli. Per provare che F è un funtore esatto basterà mostrare che la sequenza ottenuta applicando F ad $\mathcal{E}$, vale a dire $\mathcal{E}^F\colon \cdots \to A^F \xrightarrow{\alpha^F} B^F \xrightarrow{\beta^F} C^F \to D^F \to \cdots$, è esatta. A questo scopo, sarà sufficiente provarne l'esattezza in B^F. Dalla $\mathcal{E}$ ricaviamo



dove gli epimorfismi α_0 e β_0 sono le ovvie ridotte di α e β. Trasformando questi morfismi con F, che come abbiamo visto conserva le proprietà di essere mono o epi, abbiamo



Ora, chiaramente $\operatorname{im}\iota = \operatorname{im}\alpha$ e $\ker\beta_0 = \ker\beta$, dunque la sequenza $\operatorname{im}\alpha \overset{\iota}{\rightarrowtail} B \overset{\beta_0}{\twoheadrightarrow} \operatorname{im}\beta$ rappresentata nel primo diagramma dalle frecce diagonali è esatta (corta). Per l'ipotesi su F anche la sua

[2] questa proprietà è verificata dai funtori Hom ai quali siamo qui interessati, ma più in generale da tutti i funtori additivi)

trasformata $(\operatorname{im}\alpha)^F \overset{\iota^F}{\rightarrowtail} B^F \overset{\beta_0^F}{\twoheadrightarrow} (\operatorname{im}\beta)^F$ è esatta, dunque $\operatorname{im}\iota^F = \ker\beta_0^F$. Poiché α^F è composta da un epimorfismo e da ι^F, sia ha $\operatorname{im}\alpha^F = \operatorname{im}\iota^F$, mentre $\ker\beta^F = \ker\beta_0^F$, dal momento che β^F è composta da β_0^F ed un monomorfismo. Allora $\operatorname{im}\alpha^F = \ker\beta^F$, vale a dire: $\mathcal{E}^F$ è esatta in B^F, come richiesto. Questo conclude la dimostrazione. □

La rilevanza delle sequenze esatte corte ai fini dell'esattezza di un funtore suggerisce le seguenti definizioni. Un funtore F tra categorie di moduli si dice *esatto a sinistra* se, per ogni sequenza esatta corta $\mathcal{E}\colon 0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\gamma}{\to} C \to 0$ è esatta $0 \to A^F \overset{\alpha^F}{\to} B^F \overset{\gamma^F}{\to} C^F$ se F è covariante, o $0 \to C^F \overset{\gamma^F}{\to} B^F \overset{\alpha^F}{\to} A^F$ se F è controvariante. Si dice invece che F è *esatto a destra* se, per ogni sequenza esatta corta come $\mathcal{E}$ è esatta $A^F \overset{\alpha^F}{\to} B \overset{\gamma^F}{\to} C \to 0$, se F è covariante, o $C^F \overset{\gamma^F}{\to} B^F \overset{\alpha^F}{\to} A^F \to 0$, se F è controvariante.

È chiaro che per un funtore covariante (risp. controvariante) F tra categorie di moduli sono equivalenti le proprietà:

(*i*) F è esatto a sinistra e trasforma epimorfismi (risp. monomorfismi) in epimorfismi;
(*ii*) F è esatto a destra e trasforma monomorfismi (risp. epimorfismi) in monomorfismi;
(*iii*) F è esatto a sinistra e a destra;
(*iv*) F è esatto.

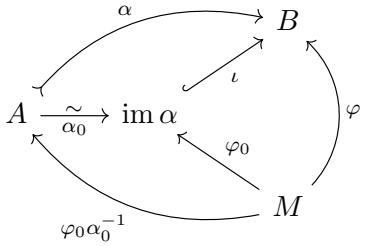
I funtori Hom non sono in generale esatti (si veda l'esempio 11.C.4) ma, in conseguenza diretta dei lemmi 11.4 e 11.5, sono esatti a sinistra:

Proposizione 11.7. *Siano R un anello commutativo unitario e M un R-modulo. Allora i funtori* $\operatorname{Hom}(M,-)$ *e* $\operatorname{Hom}(-,M)$ *sono entrambi esatti a sinistra.*

Dimostrazione. Sia data una sequenza esatta corta $\mathcal{E}\colon A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} C$. Usando per i morfismi le notazioni già introdotte, $\operatorname{Hom}(M,-)$ trasforma $\mathcal{E}$ nella sequenza quasi esatta

$$0 \to \operatorname{Hom}(M,A) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(M,B) \xrightarrow{\gamma_*} \operatorname{Hom}(M,C) \to 0.$$

Per provare che $\operatorname{Hom}(M,-)$ è esatto a sinistra dobbiamo verificare che questa sequenza sia esatta in $\operatorname{Hom}(M,A)$ (cioè che α_* sia un monomorfismo) ed in $\operatorname{Hom}(M,B)$ (cioè che $\ker\gamma_*$ sia contenuto in $\operatorname{im}\alpha_*$). Che α_* sia un monomorfismo è stabilito dal lemma 11.4. Sia poi $\varphi \in \ker\gamma_*$. Dunque, $\varphi \in \operatorname{Hom}(M,B)$ e, per lo stesso lemma 11.4, abbiamo $\operatorname{im}\varphi \subseteq \ker\gamma = \operatorname{im}\alpha$, quindi possiamo considerare la ridotta φ_0 di φ a $\operatorname{im}\alpha$, e scrivere φ come $\varphi_0\iota$, dove ι è l'immersione di $\operatorname{im}\alpha$ in B. Similmente, $\alpha = \alpha_0\iota$, dove α_0 è la ridotta di α a $\operatorname{im}\alpha$ ed è un isomorfismo.

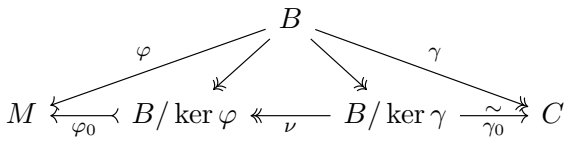


Come il diagramma suggerisce, $\varphi = \varphi_0\alpha_0^{-1}\alpha = (\varphi_0\alpha_0^{-1})\alpha_*$, infatti $\varphi_0\alpha_0^{-1}\alpha = \varphi_0\alpha_0^{-1}\alpha_0\iota = \varphi_0\iota = \varphi$. Di conseguenza, $\varphi \in \operatorname{im}\alpha_*$, come richiesto, sicché $\operatorname{Hom}(M,-)$ è esatto a sinistra.

La dimostrazione per $\operatorname{Hom}(-,M)$ è analoga: partendo dalla stessa sequenza esatta corta $\mathcal{E}$ introdotta sopra, bisogna dimostrare l'esattezza di

$$0 \to \operatorname{Hom}(C,M) \xrightarrow{\gamma^*} \operatorname{Hom}(B,M) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(A,M).$$

Essendo già noto che γ^* è un monomorfismo per il lemma 11.5 e $\gamma^*\alpha^* = 0$, bisogna dunque provare $\ker\alpha^* \subseteq \operatorname{im}\gamma^*$. Sia $\varphi \in \ker\alpha^*$. Per il lemma 11.5, $\ker\gamma = \operatorname{im}\alpha \subseteq \ker\varphi$, quindi è ben definito l'epimorfismo $\nu\colon b + \ker\gamma \in B/\ker\gamma \longmapsto b + \ker\varphi \in B/\ker\varphi$. Otteniamo così un diagramma commutativo



dove i due epimorfismi senza nome sono epimorfismi canonici e φ_0 e γ_0 sono ricavati dal primo teorema di omomorfismo. Otteniamo così $\varphi = \gamma\gamma_0^{-1}\nu\varphi_0 = (\gamma_0^{-1}\nu\varphi_0)^{\gamma^*} \in \operatorname{im}\gamma^*$. Ciò completa la dimostrazione. □

Esercizi, Osservazioni, Esempi.

11.C.1. Se r è un elemento dell'anello commutativo unitario R, si può definire un funtore covariante dalla categoria degli R-moduli in sé associando ad ogni R-modulo A il suo sottomodulo Ar e ad ogni R-omomorfismo $\alpha\colon A \to B$ il morfismo $a \in Ar \mapsto a^\alpha \in Br$ indotto per restrizione e riduzione da α. Questo funtore trasforma monomorfismi in monomorfismi ed epimorfismi in epimorfismi, ma, in generale, non è esatto (né a destra né a sinistra).

Ad esempio, scegliendo $\mathbb{Z}$ come R ed un qualsiasi intero maggiore di 1 come r, la sequenza esatta corta $r\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_r$ (in cui appare l'epimorfismo canonico) viene trasformata da questo funtore in una sequenza non esatta nel termine centrale.

Si lascia a chi legge la verifica della correttezza della definizione del funtore e delle affermazioni fatte.

11.C.2. Verificare che il funtore presentato all'esempio precedente è esatto se e solo se $r^2R = rR$.

11.C.3. I funtori esatti a sinistra o a destra possono equivalentemente essere definiti senza fare riferimento alle sequenze esatte corte. Dovrebbe infati essere chiaro che un funtore covariante è esatto a sinistra (risp. a destra) se e solo se trasforma ogni sequenza esatta della forma $0 \to A \to B \to C$ (risp. della forma $A \to B \to C \to 0$) in una sequenza esatta della stessa forma. Discorso analogo si può fare per i funtori controvarianti.

11.C.4. Fissato un intero $n > 1$, consideriamo la sequenza esatta corta di gruppi abeliani $\mathcal{E}\colon n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$, dove l'epimorfismo è quello canonico. Come è facile verificare, $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \simeq \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, n\mathbb{Z}) = 0$ (perché gli omomorfismi mandano elementi periodici in elementi periodici), quindi $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, -)$ trasforma $\mathcal{E}$ in $0 \to 0 \to 0 \to \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \to 0$, che non è esatta perché $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \neq 0$ (difatti $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n$). Vediamo così che $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, -)$ non è un funtore esatto.

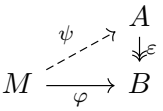
Neanche $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(-, \mathbb{Z}_n)$ è esatto. Abbiamo infatti $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \simeq \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n \simeq \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$ (si veda l'esercizio 11.B.4), quindi la trasformata di $\mathcal{E}$ mediante $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(-, \mathbb{Z}_n)$, cioè la sequenza $0 \to \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \to \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \to \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \to 0$ non può essere esatta.

11.4 Moduli proiettivi

La non-esattezza dei funtori Hom covarianti suggerisce l'importantissima nozione di modulo proiettivo. Per definizione, un modulo M sull'anello commutativo unitario R è *proiettivo* se e solo se il funtore $\operatorname{Hom}_R(M, -)$ è esatto, cioè, vista la proposizione 11.7, esatto a destra. Risulta, come stiamo per vedere, che i moduli proiettivi sono tutti e soli i sommandi diretti dei moduli liberi.

Teorema 11.8. *Sia M un modulo sull'anello commutativo unitario R. Sono equivalenti le affermazioni:*

(i) *M è proiettivo;*
(ii) *il funtore $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ trasforma epimorfismi in epimorfismi;*
(iii) *vale la* proprietà del sollevamento: *scelti comunque un epimorfismo $\varepsilon\colon A \twoheadrightarrow B$ di R-moduli e $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,B)$, esiste un $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M,A)$ tale che $\varphi = \psi\varepsilon$;*[3]
(iv) *ogni sequenza esatta corta della forma $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow M$ è spezzata;*
(v) *M è sommando diretto di un R-modulo libero.*

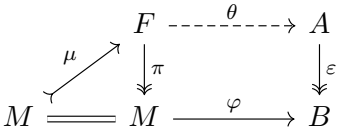


Dimostrazione. L'equivalenza tra (i) e (ii) è ovvia, dal momento che $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ è esatto a sinistra e i funtori esatti a sinistra sono esatti se e solo trasformano epimorfismi in epimorfismi. La (iii) non è altro che una riformulazione della (ii): ciò che richiede è che, per ogni epimorfismo $\varepsilon\colon A \twoheadrightarrow B$ ogni elemento di $\mathrm{Hom}_R(M,B)$ sia immagine mediante ε_* di un elemento di $\mathrm{Hom}_R(M,A)$, cioè che ε_* sia suriettiva. Dunque, (i), (ii) e (iii) sono equivalenti tra loro.

Valga (iii). Per ogni sequenza esatta corta $\mathcal{E}\colon A \rightarrowtail B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$, la (iii) garantisce l'esistenza di un $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M,B)$ tale che $\mathrm{id}_M\,\psi = \varepsilon$. Tale ψ è un mono spezzante per $\mathcal{E}$, quindi $\mathcal{E}$ è spezzata e vale la (iv).

Per la proposizione 4.20 esistono un modulo libero F ed un epimorfismo $\varepsilon\colon F \twoheadrightarrow M$, abbiamo così la sequenza esatta corta $\ker\varepsilon \hookrightarrow F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$. Se vale (iv), allora questa sequenza è spezzata, sicché M è isomorfo ad un sommando diretto di F e vale (v).

Supponiamo infine che valga (v), quindi $F = M \oplus K$ è libero, su una base $X \subset F$, per un qualche R-modulo K. Siano $\mu\colon M \rightarrowtail F$ e $\pi\colon F \twoheadrightarrow M$ il monomorfismo e la proiezione canonica rispetto a questa decomposizione diretta. Useremo questi dati per provare la (iii). Siano dati i morfismi $\varepsilon\colon A \twoheadrightarrow B$ (epi) e $\varphi\colon M \to B$. Per ogni $x \in X$ esiste $a_x \in A$ tale che $x^{\pi\varphi} = a_x^{\varepsilon}$, dal momento che ε è suriettiva. Allora la proprietà universale dei moduli liberi assicura l'esistenza di un morfismo $\theta\colon F \to A$ tale che $x^{\theta} = a_x$ per ogni $x \in X$. Ma allora $x^{\theta\varepsilon} = x^{\pi\varphi}$ per ogni $x \in X$ e quindi $\theta\varepsilon = \pi\varphi$ perché X genera F.



Sia ora $\psi = \mu\theta$. Allora $\psi\varepsilon = \mu\theta\varepsilon = \mu\pi\varphi = \varphi$. Quindi ψ è un sollevamento di φ lungo ε. La dimostrazione è completa. □

In termini meno astratti, la condizione di spezzamento in (iv) viene anche espressa in questo modo: se B è un R-modulo ed A/B è un quoziente di B isomorfo ad M, allora A è un sommando diretto in B. Spesso si fa riferimento a questa come alla *proprietà proiettiva* (di M).

Il teorema appena provato garantisce che i moduli liberi sono proiettivi, ma non è difficile trovare esempi di moduli proiettivi che non sono liberi. Infatti, se l'anello commutativo unitario R è somma diretta dei suoi ideali propri H e K, allora, essendo R_R libero, sia H che K sono proiettivi perché verificano la condizione (v) del teorema. Poiché i moduli liberi non nulli sono fedeli mentre $HK = 0$, né H né K sono liberi. Un caso particolare: se a e b sono interi coprimi maggiori di 1, l'anello $\mathbb{Z}_{ab}$ è somma diretta di sui ideali, quello generato da $[a]_{ab}$ (di ordine b) e quello generato da $[b]_{ab}$ (di ordine a); entrambi questi ideali sono $\mathbb{Z}_{ab}$-proiettivi, ma non liberi.

Va anche detto che esistono importanti tipi di anelli R con la proprietà che ogni R-modulo proiettivo sia libero. Sono tra questi gli anelli principali, perché si può dimostrare che ogni

[3] un tale ψ viene spesso detto un *sollevamento* di φ lungo ε. Nella letteratura matematica in inglese la proprietà del sollevamento è nota come *lifting property*.

sottomodulo di un modulo libero su un anello principale è esso stesso libero (si vedano a questo proposito l'osservazione 11.D.1 e l'esercizio che segue). Ciò vale, in particolare, per i moduli su $\mathbb{Z}$, ovvero i gruppi abeliani, quindi i gruppi abeliani proiettivi sono precisamente quelli liberi. A livello meno elementare possiamo citare un teorema di Kaplansky che stabilisce che *se R è un anello commutativo locale, ogni R-modulo proiettivo è libero* (per un caso particolare si veda l'esercizio 11.D.3), uno di Hyman Bass, secondo il quale *ogni modulo proiettivo non finitamente generato su un anello commutativo unitario noetheriano che non abbia idempotenti non banali* (cioè che non sia decomponibile in somma diretta di ideali non nulli) *è libero* ed un teorema, ancora più profondo, dimostrato indipendentemente da Donald Quillen e Andrei Suslin: *se R è un anello di polinomi ad un numero finito di indeterminate su un campo, ogni R-modulo proiettivo finitamente generato è libero.*

Un'altra conseguenza del teorema 11.8 è che una somma diretta è proiettiva se e solo se lo sono i sommandi che vi appaiono:

Corollario 11.9. *Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di moduli sull'anello commutativo unitario R. Allora $\coprod_{i\in I} A_i$ è proiettivo se e solo se A_i è proiettivo per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Se $\coprod_{i\in I} A_i$, allora, per il teorema 11.8, esiste un R-modulo B tale che $F := B \amalg \coprod_{i\in I} A_i$ sia libero. Ma allora, per ogni $i \in I$, si ha $F \simeq A_i \amalg B \amalg \coprod_{i\neq j\in I} A_j$, quindi, per lo stesso teorema, A_i è proiettivo. Viceversa, se ciascuno dei moduli A_i è proiettivo, per ogni $i \in I$ esiste un modulo B_i tale che $F_i := A_i \amalg B_i$ sia libero. Ma $F := \coprod_{i\in I} F_i$ è libero, essendo una somma diretta di moduli isomorfi a R_R, e $F \simeq \coprod_{i\in I} A_i \amalg \coprod_{i\in I} B_i$, quindi $\coprod_{i\in I} A_i$ è proiettivo. □

Corollario 11.10. *Siano A e B sottomoduli di un modulo M. Allora esiste una sequenza esatta corta*

$$A \cap B \xrightarrow[x\mapsto(x,x)]{\mu} A \amalg B \xrightarrow[(a,b)\mapsto a-b]{\varepsilon} A + B.$$

Inoltre, se $A + B$ è proiettivo:
(i) *$A \amalg B \simeq (A \cap B) \amalg (A + B)$;*
(ii) *A e B sono proiettivi se e solo se $A \cap B$ è proiettivo.*

Dimostrazione. Considerata la somma diretta (esterna) $A \amalg B$, è chiaro che $\varepsilon\colon (a, b) \in A \amalg B \mapsto a - b \in A + B$ è un epimorfismo, di nucleo $\{(x, x) \mid x \in A \cap B\}$. Da ciò segue che, effettivamente, quella indicata nell'enunciato è una sequenza esatta corta. Se $A + B$ è proiettivo, questa sequenza è spezzata per il teorema 11.8, quindi $A \amalg B \simeq (A \cap B) \amalg (A + B)$ e vale la (i). La (ii) segue dalla (i) e dal corollario 11.9. □

Abbiamo infine un'ulteriore caratterizzazione dei moduli proiettivi, legata alla nozione di base duale, probabilmente familiare dalla teoria degli spazi vettoriali di dimensione finita.

Sia X un insieme di generatori di un modulo M sull'anello commutativo unitario R. Una *base duale* per X (o per meglio dire, per la coppia (X, M)) è una famiglia $(\alpha_x)_{x\in X}$ di R-omomorfismi da M a R_R che verifica queste due proprietà per ogni $a \in M$:
(i) l'insieme $\{x \in X \mid a^{\alpha_x} \neq 0_R\}$ è finito;
(ii) $a = \sum_{x\in X} x a^{\alpha_x}$,
dove la somma in (ii) è ben definita essendo effettivamente estesa solo all'insieme finito descritto in (i).

Lemma 11.11. *Siano M un modulo sull'anello commutativo unitario R ed X un suo insieme di generatori. Allora M è proiettivo se e solo se esiste per (X, M) una base duale.*

Dimostrazione. Assumiamo che M sia proiettivo e verifichiamo l'esistenza di una base duale per (X, M). Iniziamo col supporre che M sia un modulo libero su X. Per ogni $x \in X$ definiamo

come α_x l'unico R-omomorfismo $M \to R_R$ che manda x in 1_R ed ogni $y \in X \setminus \{x\}$ in 0_R. Dal momento che $M = \bigoplus_{x\in X} xR$, ogni $a \in M$ si può scrivere, in modo unico, come $a = \sum_{x\in X} xa_x$, dove ciascuno degli a_x è in R e $\{x \in X \mid a_x \neq 0_M\}$ è finito. Evidentemente, per ogni $x \in X$, si ha $a^{\alpha_x} = a_x$. Da ciò segue che $(\alpha_x)_{x\in X}$ è una base duale.[4]

Passiamo ora al caso in cui M sia un modulo proiettivo arbitrario, generato da X. Consideriamo un modulo libero F su X; possiamo supporre $X \subseteq F$. Per la proprietà universale dei moduli liberi, esiste un epimorfismo $\pi\colon F \twoheadrightarrow M$ tale che $x^\pi = x$ per ogni $x \in X$. D'altra parte, poiché M è proiettivo e quindi l'estensione $\ker\pi \hookrightarrow F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M$ è spezzata, esiste un monomorfismo $\mu\colon M \rightarrowtail F$ tale che $\mu\pi = \mathrm{id}_M$. Per quanto visto sopra, (X, F) ha una base duale $(\alpha_x)_{x\in X}$. Allora, per ogni $a \in M$, l'insieme $\{x \in X \mid a^{\mu\alpha_x} \neq 0_M\}$ è finito e $a^\mu = \sum_{x\in X} xa^{\mu\alpha_x}$. Applicando π deduciamo da questa uguaglianza $a = a^{\mu\pi} = \sum_{x\in X} x^\pi a^{\mu\alpha_x} = \sum_{x\in X} xa^{\mu\alpha_x}$, dove la combinazione lineare è, in questo caso, calcolata in M. Vediamo così che $(\mu\alpha_x)_{x\in X}$ è una base duale per (X, M). La condizione è dunque necessaria.

Proviamo ora la sufficienza. Supponiamo che $(\alpha_x)_{x\in X}$ sia una base duale per (X, M); verificheremo per M la proprietà del sollevamento. Siano $\varepsilon\colon A \twoheadrightarrow B$ un epimorfismo e $\varphi\colon M \to B$ un omomorfismo di R-moduli. Per ogni $x \in X$ esiste (e fissiamo) $a_x \in A$ tale che $x^\varphi = a_x^\varepsilon$. Per ogni $a \in M$ l'insieme $\{x \in X \mid a^{\alpha_x} \neq 0_M\}$ è finito e quindi è ben definita l'applicazione

$$\psi\colon a \in M \mapsto \sum_{x\in X} a_x a^{\alpha_x} \in A.$$

Come è facile verificare, ψ è un R-omomorfismo. Inoltre, per ogni $a \in M$, si ha

$$a^{\psi\varepsilon} = \Big(\sum_{x\in X} a_x a^{\alpha_x}\Big)^\varepsilon = \sum_{x\in X} a_x^\varepsilon a^{\alpha_x} = \sum_{x\in X} x^\varphi a^{\alpha_x} = \Big(\sum_{x\in X} xa^{\alpha_x}\Big)^\varphi = a^\varphi.$$

Pertanto $\psi\varepsilon = \varphi$; ciò prova che la condizione (iii) del teorema 11.8 è verificata, quindi M è proiettivo. □

Esempi, Osservazioni, Esercizi.

11.D.1. Non è difficile provare che se tutti gli ideali di un anello commutativo unitario R sono liberi come R-moduli, allora R è principale (farlo come esercizio; un passaggio essenziale è l'osservazione che R è integro perché tutti i suoi ideali non nulli sono fedeli). Nell'esercizio che segue viene anche suggerito come provare che, viceversa, se R è principale ed F è un R-modulo libero, ogni sottomodulo di F è libero. Si giustifica così l'affermazione fatta nel testo che tutti i moduli proiettivi su un anello principale sono liberi.

Aggiungiamo che, più in generale, si può dimostrare che se R è un anello principale ogni sottomodulo di una somma diretta di R-moduli ciclici è esso stesso una somma diretta di moduli ciclici, ma le relativa dimostrazione è meno elementare.

11.D.2. Sia F un modulo libero sull'anello principale R. Provare, ragionando come segue, che ogni sottomodulo di F è libero. Innanzitutto, a questo scopo, si può assumere senza perdere in generalità che F sia una somma diretta $\bigoplus_{i<\alpha} A_i$, dove α è un ordinale e ciascuno degli A_i sia un R-modulo isomorfo a R_R. Sia $M \leq F$. Per ogni ordinale $\beta \leq \alpha$, sia $M_\beta = M \cap \bigoplus_{i<\beta} A_i \leq M$. Osservare che, per ogni $\beta < \alpha$, o $M_{\beta+1} = M_\beta$ oppure $M_{\beta+1} \simeq M_\beta \oplus R_R$, (qui è utile la proprietà proiettiva). Fatto questo, la conclusione segue facilmente.

[4] Nel caso in cui R sia un campo e quindi M sia uno spazio vettoriale di base X, questa è la consueta base duale di M incontrata in corsi elementari di algebra lineare che, se M ha dimensione finita, costituisce una base dello spazio duale $\mathrm{Hom}(M, R_R)$.

11.D.3. Provare questo caso particolare del teorema di Kaplansky menzionato nel testo: se R è un anello commutativo locale, ogni R-modulo proiettivo M finitamente generato è libero. Suggerimento: detto n il minimo numero di generatori richiesti per M, esiste un R-modulo P tale che $F := M \oplus P$ sia libero di rango n. Se $J \lhd\cdot R$, ragionare sullo (R/J)-spazio vettoriale F/FJ per ottenere $P = 0$.

11.D.4. Oltre a quella di modulo proiettivo è di grande importanza anche la nozione duale, cioè quella di modulo iniettivo. Per definizione, un modulo M è iniettivo se e solo se il funtore $\mathrm{Hom}(-, M)$ è esatto, cioè conserva i monomorfismi. Per i moduli iniettivi vale, almeno in parte una caratterizzazione come quella data nel teorema 11.8: M è iniettivo se e solo se vale la duale della proprietà del sollevamento (in sostanza: ogni omomorfismo $A \to M$ si prolunga a qualsiasi modulo contenente A come sottomodulo), ovvero se e solo se M è sommando diretto di ogni modulo di cui sia sottomodulo (questa è la duale della proprietà proiettiva).

Così come i moduli proiettivi sono legati alla nozione di modulo libero, i moduli iniettivi sono legati alla nozione di modulo divisible (un R-modulo è divisible quando $M = Mr$ per ogni $r \in R \smallsetminus 0$[5]). Infatti, se R è un dominio di integrità unitario, ogni R-modulo iniettivo è divisibile; il viceversa vale se R è un anello principale o anche, più in generale, se R è un anello di Dedekind. Ad esempio, questo significa che i gruppi abeliani iniettivi sono precisamente quelli divisibili.

I moduli iniettivi non saranno più discussi in queste note; per informazioni più dettagliate si rimanda ad un qualsiasi testo di algebra.

[5] alcuni autori utilizzano definizioni differenti di divisibilità; le differenze riguardano il caso in cui r sia un divisore dello zero

12 Anelli di Dedekind

In questo capitolo introdurremo un'importante classe di domini di integrità noetheriani, quella degli anelli di Dedekind.

12.1 Ideali frazionari

In questa sezione, salvo avviso contrario, con R si indicherà un dominio di integrità unitario e $K = Q(R)$ sarà il suo campo dei quozienti.

K ha una ovvia struttura di R-algebra, quindi di R-modulo; si chiamano *ideali frazionari* di R gli R-sottomoduli non nulli A di K tali che $(R : A)_R = \mathrm{Ann}_R(A + R/R) \neq 0$, tali cioè che $Ar \subseteq R$ per qualche $r \in R \smallsetminus 0$. È facile verificare che questa condizione equivale all'essere $(R : A)_K \neq 0$. Gli ideali frazionari di R che siano contenuti in R sono esattamente gli ideali non nulli di R, e si chiamano in questo contesto *ideali interi*. Indichiamo con $\mathfrak{F}(R)$ e $\mathfrak{I}^*(R)$, rispettivamente, l'insieme degli ideali frazionari e quello degli ideali interi di R.

Se $A \in \mathfrak{F}(R)$, ogni R-sottomodulo non nullo A_0 di A è ancora un ideale frazionario, dal momento che $(R : A)_R \subseteq (R : A_0)_R$. Si ha anche:

Lemma 12.1. *Se $A, B \in \mathfrak{F}(R)$, allora $A \cap B$, AB, $A + B$, $(A : B)_K \in \mathfrak{F}(R)$.*

Dimostrazione. È chiaro che le parti di K prese in esame sono tutte R-sottomoduli di K. Siano $0_R \neq a \in (R : A)_R$ e $0_R \neq b \in (R : B)_R$. Allora, se X è uno tra $A \cap B$, AB e $A + B$, si ha $Xab \subseteq R \cap X$ e, poiché R è un dominio di integrità, $ab \neq 0_R$ e $Xab \neq 0$, quindi X è un ideale frazionario. Infine, $0 \neq Ab \subseteq (A : B)_K$ e, se $0_R \neq x \in B$, allora $ax \neq 0_R$ e $ax(A : B)_K \subseteq R$, quindi $(A : B)_K \in \mathfrak{F}(R)$. □

È particolarmente significativo il fatto che $\mathfrak{F}(R)$ sia stabile rispetto alla moltiplicazione (tra parti di K). Questo, unitamente all'osservazione che $AR = A$ per ogni R-sottomodulo A di K, garantisce che $\mathfrak{F}(R)$, munito dell'operazione di moltiplicazione tra ideali frazionari, sia un monoide commutativo di elemento neutro R. È a questa struttura di monoide che faremo implicitamente riferimento nel nostro studio di $\mathfrak{F}(R)$. Osserviamo subito che $\mathfrak{I}^*(R)$ costituisce un sottomonoide di $\mathfrak{F}(R)$.

Gli R-sottomoduli ciclici non nulli di K sono ideali frazionari—ad essi ci si riferisce come ideali frazionari principali. La cosa è piuttosto ovvia: per ogni $k \in K \smallsetminus 0$ si ha $k^{-1} \in (R : kR)_K$, quindi $(R : kR)_K \neq 0$. Più precisamente, gli ideali frazionari principali sono elementi invertibili in $\mathfrak{F}(R)$: con le notazioni fissate, l'inverso di kR è proprio $k^{-1}R$. Possiamo riguardare questa osservazione come conseguenza di una considerazione più generale: indicando con K^* il gruppo moltiplicativo di K, l'applicazione

$$k \in K^* \longmapsto kR \in \mathfrak{F}(R)$$

è un omomorfismo di monoidi; la sua immagine è l'insieme degli ideali frazionari principali di R, quindi costituisce un sottogruppo del gruppo degli invertibili di $\mathfrak{F}(R)$. Indicheremo questo sottogruppo con $\mathfrak{F}_P(R)$.

12.2. *Ogni R-sottomodulo finitamente generato e non nullo di K è un ideale frazionario.*

Dimostrazione. Ogni R-sottomodulo finitamente generato è somma di un numero finito di ideali frazionari principali, quindi l'asserto segue dal lemma 12.1. □

Il prossimo lemma è tanto semplice quanto utile; esso permette di ridurre molte questioni riguardanti gli ideali frazionari al caso degli ideali interi.

Lemma 12.3. *Per ogni $A \in \mathfrak{F}(R)$ esistono un ideale intero A_1 ed un ideale frazionario principale U tali che $A = A_1U$. Di conseguenza, A_1 è sia R-isomorfo che associato in $\mathfrak{F}(R)$ ad A.*

Dimostrazione. Per definizione, esiste $r \in R \setminus 0$ tale che $A_1 := Ar \subseteq R$. Essendo $A_1 \neq 0$, abbiamo $A_1 \in \mathfrak{I}^*(R)$; ovviamente $A = A_1(r^{-1}R)$ e quindi, dal momento che $r^{-1}R \in \mathfrak{U}(\mathfrak{F}(R))$, vediamo che A e A_1 sono associati. Infine, l'applicazione $a \in A \mapsto ar \in A_1$ è un R-isomorfismo. □

Caratterizziamo ora gli ideali frazionari invertibili, cioè gli elementi invertibili di $\mathfrak{F}(R)$.

Lemma 12.4. *Siano A un ideale frazionario di R e L un R-sottomodulo di K. Allora:*
(i) *se A è invertibile, $(L : A)_K = LA^{-1}$ e, in particolare, $A^{-1} = (R : A)_K$;*
(ii) *sono equivalenti:*
  a) *A è invertibile;*
  b) *$A(R : A)_K = R$;*
  c) *$1_R \in A(R : A)_K$.*

Dimostrazione. Sia A invertibile. Ovviamente $L = ALA^{-1}$, quindi $LA^{-1} \subseteq (L : A)_K$. D'altra parte $A(L : A)_K \subseteq L$ e quindi, moltiplicando per A^{-1}, $(L : A)_K \subseteq LA^{-1}$. Abbiamo così $(L : A)_K = LA^{-1}$. Ponendo $L = R$ se ne ricava $(R : A)_K = RA^{-1} = A^{-1}$. Vale dunque la (i).

La (ii) ne è immediata conseguenza: la (b) è ovviamente equivalente a (c) e comporta che A abbia $(R : A)_K$ come inverso. □

Proposizione 12.5. *Sia $A \in \mathfrak{F}(R)$. Allora A è invertibile in $\mathfrak{F}(R)$ se e solo se A è proiettivo come R-modulo. Inoltre, se A è invertibile allora A è finitamente generato come R-modulo.*

Dimostrazione. Supponiamo A proiettivo. Il lemma 12.3 mostra che A è isomorfo ad un ideale intero che risulta invertibile se e solo se A è invertibile. Dunque, senza perdere in generalità, possiamo assumere che A stesso sia intero. Sia X un insieme di generatori di A e sia $(\alpha_x)_{x\in X}$ una corrispondente base duale, quindi per ogni $a \in A$ si ha che $\{x \in X \mid a^{\alpha_x} \neq 0_R\}$ è finito e $a = \sum_{x\in X} xa^{\alpha_x}$. Assumendo $a \neq 0_R$ e moltiplicando (in K) per a^{-1} abbiamo anche $1_R = \sum_{x\in X} xy_x$, dove $y_x = a^{-1}a^{\alpha_x}$ per ogni $x \in X$. Per ogni $c \in A$ e $x \in X$ si ha poi $ca^{\alpha_x} = (ca)^{\alpha_x} = ac^{\alpha_x}$, perché α_x è un omomorfismo di R-moduli, dunque $cy_x = ca^{-1}a^{\alpha_x} = aa^{-1}c^{\alpha_x} = c^{\alpha_x} \in R$. Ciò mostra che ciascuno degli elementi y_x è in $(R : A)_K$. Allora $1_R = \sum_{x\in X} xy_x \in A(R : A)_K$, quindi $A(R : A)_K = R$ e A invertibile per il lemma 12.4.

Viceversa, sia A invertibile. Esistono allora $n \in \mathbb{N}$ ed elementi $a_1, \dots, a_n \in A$ e $b_1, \dots, b_n \in A^{-1}$ tali che $1_R = \sum_{i=1}^n a_ib_i$. Per ogni $a \in A$ si ha $a = \sum_{i=1}^n a_i(ab_i)$, dove ciascuno degli elementi ab_i è in R, perché $b_i \in A^{-1} = (R : A)_K$. Pertanto $A = \sum_{i=1}^n a_iR$, vale a dire: A è generato da $X := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (quindi A è finitamente generato). Inoltre, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ l'applicazione $\alpha_i \colon a \in A \mapsto ab_i \in R$ è un omomorfismo di R-moduli. Avendo già osservato che $a = \sum_{i=1}^n a_ia^{\alpha_i}$ per ogni $a \in R$, concludiamo che gli omomorfismi α_i permettono di definire una base duale per X e quindi, per il lemma 11.11, A è proiettivo. □

Esercizi e Osservazioni.

12.A.1. Il lemma 12.3 offre una descrizione esplicita degli ideali frazionari: ogni ideale frazionario si ottiene moltiplicando un ideale intero per l'inverso (in K) di un elemento non nullo di R.

12.A.2. Se R è noetheriano, ogni ideale frazionario di R è finitamente generato come R-modulo, quindi noetheriano. Possiamo dedurre che l'insieme degli ideali frazionari di R (ordinato per inclusione) è a condizione massimale?

12.A.3. Costruire, per qualche dominio di integrità unitario R, un ideale frazionario di R contenente R che non sia finitamente generato come R-modulo.

12.A.4. Ricordando dalla sezione 5.2 che l'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$ ad una indeterminata è un anello fattoriale (noetheriano) in cui sia 2 che x sono irriducibili, mostrare che, posto $H = 2\mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x]$, si ha $(\mathbb{Z}[x] : H)_{Q(\mathbb{Z}[x])} = \mathbb{Z}[x]$, quindi H è un ideale (finitamente generato) non invertibile.

12.A.5. Sia R un dominio di integrità unitario e supponiamo che $\mathfrak{I}^*(R)$ sia un monoide cancellativo. Provare che R è integralmente chiuso. Suggerimento: se c è un elemento di $K = Q(R)$ che sia intero su R, allora $R[c]$ è un ideale frazionario ....

12.2 Anelli di Dedekind

Per definizione, un anello di Dedekind è un dominio di integrità unitario che verifica una delle seguenti condizioni, che, come mostrano il lemma 12.3 e la proposizione 12.5, sono tra loro equivalenti:

- ogni ideale di R è proiettivo;
- ogni ideale non nullo di R è invertibile;
- ogni ideale frazionario di R è invertibile;
- $\mathfrak{F}(R)$ è un gruppo.

La proposizione 12.5 mostra anche che *tutti gli anelli di Dedekind sono noetheriani*. Avendo già osservato che gli ideali principali non nulli di un dominio di integrità sono sempre invertibili, concludiamo che tutti gli anelli principali sono di Dedekind. Dunque, quella degli anelli di Dedekind è una classe di domini di integrità intermedia tra quella degli anelli principali e quella degli anelli noetheriani. Come si vedrà nel teorema 13.7, gli anelli degli interi algebrici in estensioni finite del campo razionale forniscono esempi di anelli di Dedekind che spesso non sono principali (un anello di questo tipo è $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$); altri importanti esempi appaiono in geometria algebrica, come anelli di coordinate di curve affini. $\mathbb{Z}[x]$ è invece un esempio di dominio di integrità unitario noetheriano che non è di Dedekind; questo è facile da dimostrare direttamente (vedi esercizio 12.A.4), ma segue, in modo ancora più semplice, da considerazioni generali, ad esempio dal teorema 12.7 perché l'ideale generato da x in questo anello è primo ma non massimale.

Gli anelli di Dedekind ammettono varie, interessanti caratterizzazioni. La prima che dimostreremo coinvolge il fatto che il monoide degli ideali interi di ogni anello di Dedekind è fattoriale. A questo proposito, osserviamo subito che, qualunque sia il dominio di integrità unitario R, la relazione di divisibilità in R comprende quella di inclusione inversa, nel senso che, per ogni $A, B \in \mathfrak{I}^*(R)$, se A divide B (cioè $B = AC$ per un ideale $C \in \mathfrak{I}^*(R)$), allora $A \supseteq B$. Di conseguenza, due elementi che siano associati in $\mathfrak{I}^*(R)$ devono necessariamente coincidere; in altre parole: la relazione 'essere elementi associati' in $\mathfrak{I}^*(R)$ è la relazione di uguaglianza, sicché, nelle notazioni del capitolo 2, $\mathfrak{I}^*(R) \simeq \widetilde{\mathfrak{I}^*(R)}$ e la relazione di divisibilità in $\mathfrak{I}^*(R)$ è una relazione d'ordine. Allora, per il teorema 2.5, $\mathfrak{I}^*(R)$ è fattoriale se e solo se è cancellativo e $(\mathfrak{I}^*(R), |)$ è un

reticolo a condizione minimale. Altra ovvia conseguenza è che l'elemento neutro, R, è l'unico elemento invertibile di $\mathfrak{I}^*(R)$.

Ci tornerà utile, anche più avanti, la seguente osservazione:

Lemma 12.6. *Siano I e J ideali non nulli del dominio di integrità unitario R e supponiamo I invertibile. Allora I divide J in $\mathfrak{I}^*(R)$ se e solo se $I \supseteq J$.*

Dimostrazione. Come appena osservato, $I \supseteq J$ se $I|J$. Viceversa, $J = I(I^{-1}J)$ e, se $I \supseteq J$, allora $I^{-1}J = (R : I)_K J \subseteq R$, dunque $I^{-1}J \in \mathfrak{I}^*(R)$ e $I|J$. □

Teorema 12.7. *Sia R un anello di Dedekind. Allora $\mathfrak{I}^*(R)$ è un monoide fattoriale. Inoltre,*

(i) *la relazione di divisibilità in $\mathfrak{I}^*(R)$ coincide con l'inclusione inversa. Vale a dire: per ogni $I, J \in \mathfrak{I}^*(R)$, I divide J in $\mathfrak{I}^*(R)$ se e solo se $I \supseteq J$;*

(ii) *gli ideali primi non nulli in R sono massimali (cioè: R ha dimensione di Krull al più 1);*

(iii) *ogni ideale proprio e non nullo di R è prodotto di ideali primi. Tale decomposizione è unica, a meno dell'ordine dei fattori.*

Dimostrazione. La (i) segue immediatamente dal lemma 12.6. Per ulteriore conseguenza, $\mathfrak{I}^*(R)$, come insieme ordinato (per divisibilità), è anti-isomorfo a $(\mathfrak{I}^*(R), \subseteq)$, che è un sottoreticolo del reticolo degli ideali di R, perché l'intersezione di due ideali non nulli di R è ancora non nullo. Ora, R è noetheriano—l'abbiamo visto sopra—quindi $(\mathfrak{I}^*(R), |)$ è un reticolo a condizione minimale. Infine, $\mathfrak{I}^*(R)$ è un monoide cancellativo, in quanto sottomonoide del gruppo $\mathfrak{F}(R)$, dunque $\mathfrak{I}^*(R)$ è fattoriale per il teorema 2.5.

Gli elementi irriducibili in $\mathfrak{I}^*(R)$ sono gli atomi del reticolo $(\mathfrak{I}^*(R), |)$; ovviamente questi devono coincidere con i coatomi del reticolo $(\mathfrak{I}^*(R), \subseteq)$, il duale di $(\mathfrak{I}^*(R), |)$, cioè con gli ideali massimali di R. Abbiamo così che ogni elemento di $\mathfrak{I}^*(R)$, ad eccezione dell'unico invertibile R, si scrive in un unico modo, a meno dell'ordine dei fattori, come prodotto di ideali massimali di R; vale dunque (iii). Per completare la dimostrazione basta mostrare che vale la (ii). Sia $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$. Allora P è un prodotto di ideali massimali di R, ed essendo P primo uno dei fattori di questo prodotto deve essere contenuto in P, e quindi coincidere con P. Dunque P è massimale. □

Corollario 12.8. *Sia R un anello di Dedekind. Allora $\mathfrak{F}(R)$ è un gruppo abeliano libero sulla base dell'insieme degli ideali primi di R non nulli.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathfrak{F}(R)$. Esiste $r \in R \setminus 0$ tale che $Ar \in \mathfrak{I}^*(R)$. Dal teorema 12.7 segue che sia rR che Ar sono prodotti di ideali primi non nulli, quindi $A = (Ar)(rR)^{-1}$ è prodotto di ideali primi ed inversi di ideali primi. Dunque l'insieme degli ideali primi non nulli di R genera $\mathfrak{F}(R)$. Supponiamo ora che questi ideali primi non nulli non siano tra loro indipendenti, quindi che esistano ideali primi $P_1, P_2, \dots, P_n$ non nulli ed a due a due distinti, ed interi non nulli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tali che $\prod_{i=1}^n P_i^{\lambda_i} = R$ (ricordiamo che R è l'elemento neutro di $\mathfrak{I}^*(R)$). Non si perde in generalità nell'assumere, per un certo intero non negativo $s \leq n$, che $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s > 0$ e $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_n < 0$. Si ha allora $H := \prod_{i=1}^s P_i^{\lambda_i} = \prod_{i=s+1}^n P_i^{-\lambda_i}$, quindi H risulta essere un ideale non nullo di R con due fattorizzazioni essenzialmente diverse in prodotto di ideali primi. Questo è escluso dal teorema 12.7. Otteniamo così una contraddizione, il che completa la dimostrazione. □

Segue del teorema 12.7 anche una semplice descrizione degli ideali primari e delle decomposizioni primarie minimali di ideali negli anelli di Dedekind; come già osservato nel caso di $\mathbb{Z}$ (ma più in generale lo stesso discorso si sarebbe potuto adattare a tutti gli anelli principali, per i quali la descrizione degli ideali primari è analoga, come indicato nell'esercizio 7.A.1) le decomposizioni primarie minimali in questi anelli si possono identificare con le fattorizzazioni in prodotti di potenze di (ideali) primi a due a due distinti.

Proposizione 12.9. *Sia R un anello di Dedekind. Allora:*
(i) *gli ideali primari di R sono tutte e sole le potenze degli ideali primi con esponenti positivi;*
(ii) *se H è un ideale non banale di R, allora H ha, a meno dell'ordine dei fattori, un'unica decomposizione primaria minimale, ovvero $\mathcal{D} = \{P_1^{\lambda_1}, P_2^{\lambda_2}, \dots, P_n^{\lambda_n}\}$, dove $H = P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \cdots P_n^{\lambda_n}$ è una fattorizzazione di H in prodotto di potenze di ideali primi a due a due distinti; più precisamente: per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $0 \neq P_i \in \operatorname{Spec}(R)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}^+$ e, se $i \neq j$, allora $P_i \neq P_j$.*

Dimostrazione. Iniziamo dalla (i). Sia Q un ideale primario di R. Se $Q = 0$ allora Q è (potenza di) primo. Se $Q \neq 0$, invece, $P = \sqrt{Q}$ è un ideale massimale, in quanto ideale primo non nullo di R, quindi è l'unico ideale primo di R contenente Q, vale a dire: l'unico divisore primo di Q in $\mathfrak{I}^*(R)$. Pertanto Q è una potenza di P. Viceversa, sia $\lambda \in \mathbb{N}^+$. Ovviamente $0 = 0^\lambda$ è primo; se poi $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$, allora $P = \sqrt{P^\lambda} \lhd\cdot R$ per il teorema 12.7, quindi P^λ è P-primario. La (i) è così dimostrata.

Per provare la (ii), sia $0 \neq H \lhd R$ e sia $\mathcal{D} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ una decomposizione primaria minimale di H, dove gli ideali Q_i sono a due a due distinti. Come segue da (i), per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ abbiamo $Q_i = P_i^{\lambda_i}$, dove $P_i = \sqrt{Q_i}$ e $\lambda_i \in \mathbb{N}^+$. Essendo i radicali P_i a due a due distinti e quindi comassimali in R, anche gli ideali Q_i sono a due a due comassimali, sicché $H = Q_1 Q_2 \cdots Q_n = P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \cdots P_n^{\lambda_n}$. Questa è una fattorizzazione di H come prodotto di primi e, come sappiamo dal teorema 12.7, questa è unica a meno dell'ordine dei fattori. Da ciò segue l'asserto. □

A proposito di quest'ultimo enunciato, è anche evidente che se $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$ e $n, m \in \mathbb{N}$, allora $P^n = P^m$ se e solo se $n = m$. Inoltre, poiché gli anelli di Dedekind hanno dimensione al più 1, l'unicità della decomposizione primaria si può anche far seguire, in modo diretto, dall'esercizio 7.C.4.

12.2.1 Altre caratterizzazioni e loro conseguenze

Presentiamo qui altre tre caratterizzazioni degli anelli di Dedekind. Le prime due portano immediatamente ad alcune conseguenze strutturali; la terza avrà conseguenze molto importanti che verranno discusse nel capitolo 13.

Invertibilità di primi

Per verificare che un dominio di integrità unitario sia di Dedekind basta verificare che siano invertibili gli ideali primi non nulli. Si ha infatti:

Lemma 12.10. *Sia R un dominio di integrità unitario. Allora l'insieme degli ideali non invertibili di R ha elementi massimali rispetto all'inclusione, e ciascuno di essi è un ideale primo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli ideali di R che non sono invertibili; tra questi c'è l'ideale nullo, quindi $\mathcal{S} \neq \varnothing$. L'unione di una qualsiasi catena di elementi di $\mathcal{S}$ è ancora un elemento di $\mathcal{S}$: se non lo fosse sarebbe un ideale finitamente generato (per la proposizione 12.5), quindi dovrebbe essere il massimo della catena stessa, dunque un elemento di $\mathcal{S}$. Pertanto $\mathcal{S}$ è induttivo ed il lemma di Zorn assicura l'esistenza di elementi massimali in $\mathcal{S}$. Sia P uno di essi, dobbiamo mostrare che P è un ideale primo. Ovviamente $P \neq R$, dal momento che $R \notin \mathcal{S}$. Ragionando per assurdo, supponiamo che P non sia primo. Allora esiste $a \in R \setminus P$ tale che $(P : a)_R \neq P$, dunque P è propriamente contenuto sia in $P + aR$ che in $(P : a)$ e, per la massimalità di P, né $P + aR$ né $(P : a)$ sono in $\mathcal{S}$. Questi due ideali sono dunque invertibili. Poiché gli ideali principali sono invertibili, è di conseguenza invertibile anche $(P : a)aR = P \cap aR$. Siamo così in condizione di utilizzare il corollario 11.10: per la proposizione 12.5 sia $P + aR$ che $P \cap aR$ sono proiettivi,

dunque P è proiettivo e di conseguenza invertibile. Questa è una contraddizione, perché fornisce $P \notin \mathcal{S}$. È così provato che P è primo.[1] □

Corollario 12.11. *Sia R un dominio di integrità unitario. Allora R è di Dedekind se e solo se ogni suo ideale primo non nullo è invertibile.*

Dimostrazione. Il lemma 12.10 garantisce che R ha un ideale massimale P tra quelli non invertibili, e questo è certamente primo. Se ogni ideale primo non nullo di R è invertibile, allora $P = 0$ e quindi ogni ideale non nullo di R è invertibile, dunque R è di Dedekind. L'implicazione inversa è ovvia. □

Ulteriore conseguenza di questo corollario è che gli ideali primi in un dominio di integrità unitario determinano anche la proprietà di essere o meno un anello principale.

Corollario 12.12. *Sia R un dominio di integrità unitario. Allora R è un anello principale se e solo se ogni suo ideale primo è principale.*

Dimostrazione. Gli ideali principali non nulli sono invertibili, quindi, se ogni ideale primo di R è principale, allora R è di Dedekind per il corollario 12.11. Ma allora ogni ideale non nullo di R è prodotto di ideali primi, quindi principali, e dunque è esso stesso principale. □

In effetti la conclusione di quest'ultimo corollario vale non solo nell'ipotesi che R sia integro. Infatti è stato dimostrato (R. Gilmer, 1969; esercizio 12.B.6) che *se R è un anello commutativo unitario ed ogni ideale primo di R è principale, tutti gli ideali di R sono principali.* Questo risultato non vale per anelli non unitari, come è facile riconoscere considerando anelli commutativi a prodotto costante nullo.

Il corollario 12.12 ha sua volta altri sviluppi; come stiamo per vedere utilizzando quel poco di teoria degli anelli di Dedekind già sviluppata è possibile, ad esempio, anche caratterizzare gli anelli principali tra quelli fattoriali.

Proposizione 12.13. *Per un dominio di integrità unitario R sono equivalenti:*
(i) *ogni ideale primo di R è principale;*
(ii) *R è principale;*
(iii) *R è fattoriale e di Dedekind;*
(iv) *R è fattoriale ed ha dimensione al più* 1.

Dimostrazione. Le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) sono già note. Valga la (iv) e sia $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$. Se $0 \neq Q \in \operatorname{Spec}(R)$ e $Q \subseteq P$, allora $Q = P$ perché $Q \lhd\cdot R$. Dunque P è minimale tra gli ideali primi non nulli di R e quindi è principale per il corollario 3.11; ciò prova la (i). A questo punto la dimostrazione è completa. □

Vediamo così, in particolare, che per un anello di Dedekind le proprietà di essere un anello fattoriale e di essere un anello principale sono equivalenti. Questo fatto è di gran significato, ad esempio, per la teoria dei numeri; ci torneremo più avanti, nella sezione 13.4.

Prodotti di primi

Passiamo ora ad un'altra caratterizzazione: dimostreremo che ogni dominio di integrità unitario in cui tutti gli ideali propri siano prodotti di ideali primi è un anello di Dedekind. A questo scopo introduciamo un lemma che prova l'unicità della fattorizzazione di un ideale in prodotto di ideali primi che siano cancellabili.

[1] Una dimostrazione alternativa è suggerita nell'esercizio 12.B.3

Lemma 12.14. *Siano R un anello commutativo ed H un suo ideale proprio che sia cancellabile in $\mathfrak{I}(R)$. Allora le eventuali fattorizzazioni di H in prodotto di ideali primi sono essenzialmente uguali, vale a dire: differiscono tra loro solo per l'ordine dei fattori.*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo che H abbia due fattorizzazioni essenzialmente distinte: $H = P_1P_2\cdots P_s = Q_1Q_2\cdots Q_t$, dove $s,t \in \mathbb{N}^+$ e $P_1, P_2, \dots, P_s$, $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ sono ideali primi di R. Essendo divisori di H, anche questi ideali primi sono cancellabili nel semigruppo (moltiplicativo) $\mathfrak{I}(R)$ degli ideali di R. Possiamo assumere che $s+t$ sia il minimo intero positivo tale che una doppia fattorizzazione di questo tipo esista per un ideale cancellabile di R.

Sia P un elemento minimale di $\{P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t\}$ (rispetto all'inclusione). Senza perdere in generalità possiamo assumere $P = P_h$ per un $h \in \{1, 2, \dots, s\}$. Allora $P \supseteq H = Q_1Q_2\cdots Q_t$ e quindi $P \supseteq Q_k$ per un $k \in \{1, 2, \dots, t\}$. Ora, la minimalità di P implica $P = Q_k$.

Supponiamo $s \neq 1 \neq t$. Allora, per la cancellabilità di P si ha $H_1 := \prod_{i=1,\, i\neq h}^{s} P_i = \prod_{i=1,\, i\neq k}^{t} Q_i$. Queste due fattorizzazioni dell'ideale H_1 hanno meno fattori rispetto alle date fattorizzazioni di H quindi, per la minimalità di $s+t$, (e poiché H_1 è cancellabile in quanto prodotto di cancellabili) concludiamo che queste due fattorizzazioni di H_1 differiscono tra loro solo per l'ordine dei fattori. Da ciò si ricava subito la stessa conclusione per le due fattorizzazioni originali di H, questa è una contraddizione. Dunque, $s = 1$ oppure $t = 1$. Ovviamente $s = t = 1$ porta immediatamente alla stessa contraddizione. Nell'altro caso abbiamo $H = P = PK$ per un opportuno ideale proprio K (ad esempio, $K = \prod_{i=1,\, i\neq k}^{t} Q_i$ se $t > 1$). Allora $P = PK = PR \subseteq P$, quindi $PK = PR$ e così $K = R$, ancora una contraddizione. Ora la dimostrazione è completa. □

Questo lemma si applica, in particolare, al caso in cui R sia un dominio di integrità unitario ed H ne sia un ideale invertibile.

Teorema 12.15. *Sia R un dominio di integrità unitario. Allora R è un anello di Dedekind se e solo se ogni ideale proprio di R è prodotto di ideali primi.*

Dimostrazione. Una implicazione è già nota dal teorema 12.7; proveremo l'altra. Supponiamo dunque che ogni ideale di R sia prodotto di ideali primi. Supponiamo anche di sapere che:

$$\text{ogni ideale primo invertibile di } R \text{ è un ideale massimale.} \tag{$*$}$$

Siano P un ideale primo non nullo di R e $a \in P \smallsetminus 0$. Per ipotesi, $aR = P_1P_2\cdots P_n$ per opportuni ideali primi $P_1, P_2, \dots, P_n$. Essendo aR invertibile, anche i suoi divisori P_i sono invertibili, e quindi massimali per $(*)$. Inoltre $P \supseteq aR = P_1P_2\cdots P_n$, quindi esiste $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $P \supseteq P_i$. Ma abbiamo appena osservato che P_i è massimale, quindi $P = P_i$; come ulteriore conseguenza, P è invertibile. Abbiamo provato che, se, oltre l'ipotesi, vale $(*)$, ogni ideale primo non nullo di R è invertibile, quindi R è di Dedekind per il corollario 12.11.

Basterà allora provare $(*)$. A questo scopo, sia P un ideale primo ed invertibile di R. Se P non è massimale esiste $a \in R \smallsetminus P$ tale che $P + aR \neq R$. Per ipotesi, gli ideali $P + aR$ e $P + a^2R$ sono entrambi prodotti di ideali primi: esistono dunque ideali primi $P_1, P_2, \dots, P_r$ e $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$, tutti contenenti P, tali che $P + aR = P_1P_2\cdots P_r$ e $P + a^2R = Q_1Q_2\cdots Q_s$. Indichiamo con $\bar{}$ le immagini mediante l'epimorfismo canonico $R \twoheadrightarrow \bar{R} := R/P$. Gli ideali $\bar{P}_i = P_i/P$ e $\bar{Q}_j = Q_j/P$ sono ovviamente ancora primi, ed si ha $\bar{a}\bar{R} = \bar{P}_1\bar{P}_2\cdots\bar{P}_r$ e $\bar{a}^2\bar{R} = \bar{Q}_1\bar{Q}_2\cdots\bar{Q}_s$. Dunque, l'ideale (principale, e dunque invertibile) $\bar{a}^2\bar{R}$ del dominio di integrità $\bar{R}$ ha due fattorizzazioni in prodotto di primi: quella appena data e quella ricavabile dalla fattorizzazione di $\bar{a}\bar{R}$, cioè $\bar{a}^2\bar{R} = (\bar{a}\bar{R})^2 = \bar{P}_1^2\bar{P}_2^2\cdots\bar{P}_r^2$. Per il lemma 12.14 queste due fattorizzazioni possono differire solo per l'ordine dei fattori, quindi $s = 2r$ e, a meno di riordinare gli ideali Q_j, possiamo assumere, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\bar{P}_i = \bar{Q}_{2i-i} = \bar{Q}_{2i}$. Ma, ricordiamo, sia gli ideali P_i che i Q_j contengono P, quindi, $\bar{P}_i = \bar{Q}_j$ è, per ogni scelta degli indici, equivalente a $P_i = Q_j$. La conclusione è che, per ogni

$i \in \{1, 2, \dots, r\}$, si ha $P_i = Q_{2i-i} = Q_{2i}$, ne segue $P + a^2R = \prod_{j=1}^{2r} Q_j = (\prod_{i=1}^{r} P_i)^2 = (P + aR)^2$. Dal momento che $(P + aR)^2 = P^2 + aP + a^2R \subseteq P^2 + aR$, ricaviamo $P^2 \subseteq P \subseteq P^2 + aR$. Applicando la legge modulare di Dedekind (lemma 1.8), otteniamo ancora $P = P^2 + (P \cap aR)$. Essendo P primo, $P \cap aR = aP$. Allora $P = P^2 + aP = P(P + aR)$ e quindi, moltiplicando per P^{-1}, $R = P + aR$, contrariamente a quanto assunto. Questa contraddizione prova $(*)$ e completa così la dimostrazione. □

Corollario 12.16. *Ogni anello di frazioni non nullo di un anello di Dedekind è un anello di Dedekind.*

Dimostrazione. Sia $S^{-1}R$ un anello di frazioni dell'anello di Dedekind R. Ogni ideale proprio di $S^{-1}R$ è l'espansione di un ideale di R, ha quindi la forma H^e per un opportuno ideale proprio H di R. Poiché R è di Dedekind, $H = P_1P_2 \cdots P_n$ per opportuni $P_1, P_2, \dots, P_n \in \operatorname{Spec}(R)$. Allora $H^e = P_1^e P_2^e \cdots P_n^e$, e ciascuno degli ideali P_i^e o è primo in $S^{-1}R$ oppure coincide con $S^{-1}R$ (e in questo caso non contribuisce alla fattorizzazione). Dunque, H^e è prodotto di ideali primi in $S^{-1}R$. Per il teorema 12.15 possiamo concludere che, se non è nullo, $S^{-1}R$ è di Dedekind.[2] □

Esercizi e Osservazioni.

12.B.1. Dedurre la conclusione dell'esercizio 12.A.4 dal lemma 12.6, dopo aver provato che H non divide $x\mathbb{Z}[x]$.

12.B.2. È possibile dimostrare, ma la cosa richiede più teoria di quanta ne abbiamo sviluppato qui, che vale una forma più forte del teorema 12.7. Si ha infatti che *se R è un dominio di integrità unitario e $\mathfrak{I}^*(R)$ è un monoide fattoriale, allora R è un anello di Dedekind.*

12.B.3. Dimostrare in modo alternativo il lemma 12.10 utilizzando il lemma 12.6 per provare che, con le notazioni usate nella dimostrazione del lemma 12.10, ogni elemento massimale P di $\mathcal{S}$ è primo. Suggerimento: si tratta di escludere che si possa avere $IJ \subseteq P$ per ideali I, J di R propriamente contenenti P.

12.B.4. Il lemma 12.14 si può equivalentemente riformulare così: se R è un anello commutativo e H un ideale cancellabile in $\mathfrak{I}(R)$, allora H ha, a meno dell'ordine dei fattori, al massimo una fattorizzazione in prodotto di ideali primi. Questo perché, come osservato nell'esercizio 2.C.4, gli elementi cancellabili in un semigruppo commutativo costituiscono una parte chiusa satura.

12.B.5. Sia R un dominio di integrità unitario, sia $H \lhd R$ e sia $\varnothing \neq S \subseteq R$. Provare che se H è invertibile, allora l'espansione di H in $S^{-1}R$ è invertibile (come ideale di $S^{-1}R$). Ricavare una dimostrazione alternativa del corollario 12.16.

12.B.6. Sia R un anello commutativo unitario. Provare che l'insieme degli ideali non principali di R è induttivo e che ogni suo elemento massimale è un ideale primo. Dedurne che se tutti gli ideali primi di R sono principali, allora tutti gli ideali di R sono principali. (Suggerimento: usare il lemma 3.4.)

Un teorema di Emmy Noether

Passiamo ora ad un terzo, importantissimo, teorema di caratterizzazione degli anelli di Dedekind come domini di integrità unitari noetheriani, integralmente chiusi e di dimensione al più 1. Questo risultato è essenzialmente dovuto ad Emmy Noether, che iniziò negli anni venti del novecento lo studio sistematico degli anelli di Dedekind. In realtà la procedura seguita da Noether è inversa rispetto a quella seguita in queste note: lei assunse una variante di questa proprietà (precisamente

[2] per una dimostrazione diversa si veda l'esercizio 12.B.5.

quella di essere un dominio di integrità noetheriano, integralmente chiuso a quozienti propri artiniani) come definizione degli anelli di Dedekind e ne dedusse le proprietà di invertibilità e di fattorizzazione per i loro ideali.

Premettiamo all'enunciato del teorema di Noether una semplice osservazione generale sugli ideali degli anelli noetheriani.

Lemma 12.17. *Sia R un anello commutativo unitario noetheriano. Allora ogni ideale non nullo di R contiene un prodotto di ideali primi non nulli.*

Dimostrazione. Sia $0 \neq H \lhd R$. Se $H = R$ è chiaro che H contiene un ideale primo. Se invece $H \neq R$, allora H ha una decomposizione primaria $\mathcal{D} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ (teorema 7.12) e, per il corollario 3.15, per ciascun i, se $P_i = \sqrt{Q_i}$, esiste $\lambda_i \in \mathbb{N}$ tale che $P_i^{\lambda_i} \subseteq Q_i$. Dunque $H \supseteq Q_1 Q_2 \cdots Q_n \supseteq P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \cdots P_n^{\lambda_n}$, la qual cosa prova l'asserto dal momento che ciascuno degli ideali P_i è primo. □

Teorema 12.18. *Per un dominio di integrità unitario noetheriano R sono equivalenti:*
(i) *R è di Dedekind;*
(ii) *ogni localizzazione di R ad un ideale massimale è un anello di valutazione;*
(iii) *R è integralmente chiuso ed ha dimensione al più 1.*

Dimostrazione. Indichiamo con K il campo dei quozienti di R. Se R è di Dedekind e $S^{-1}R$ è una sua localizzazione non nulla, allora anche $S^{-1}R$ è un anello di Dedekind, per il corollario 12.16, ed ha un unico ideale massimale M. Ma allora tutti gli ideali non banali di $S^{-1}R$ sono potenze di M e quindi sono confrontabili tra loro. Per questo motivo $S^{-1}R$ è un anello di valutazione; è così provato che (i) implica (ii).

Supponiamo ora che valga (ii). Segue immediatamente dalle proposizioni 9.15 e 10.18 che la chiusura intera di R in K è proprio R, vale a dire: R è integralmente chiuso. Se poi $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$ e $P \subseteq M \lhd\cdot R$, allora il teorema 9.12 mostra che l'espansione P^e di P nella localizzazione R_M di R a M è un ideale primo non nullo in R_M. Ma R_M è per ipotesi un anello noetheriano di valutazione (ricordiamo dal corollario 9.9 che gli anelli di frazioni degli anelli noetheriani sono essi stessi noetheriani) e quindi un anello principale, come mostrato dal corollario 10.16. Allora P^e è massimale in R_M, dunque coincide con M^e, l'unico ideale massimale di R_M. Ma allora, sempre per il teorema 9.12, $P = M$. Abbiamo così provato che ogni ideale primo non nullo di R è massimale, ovvero: R ha dimensione al più 1. È pertanto vero che (ii) implica (iii).

Supponiamo infine che valga (iii). Sia $0 \neq P \in \operatorname{Spec}(R)$; in accordo col corollario 12.11, per provare che R è di Dedekind basta verificare che P è invertibile. Ragionando per assurdo, supponiamo che ciò non sia vero, dunque $P(R : P)_K \neq R$. Per ipotesi, P è massimale e ovviamente $P \subseteq P(R : P)_K \subseteq R$, dunque $P(R : P)_K = P$. Allora, per ogni $c \in (R : P)_K$, si ha $Pc \subseteq P$, vale a dire: la moltiplicazione in K induce per restrizione un'operazione esterna che struttura P come modulo su $R[c]$. Questo modulo è ovviamente fedele e, visto come R-modulo, cioè come ideale di R, è finitamente generato perché R è noetheriano. È così soddisfatta per c ed R la condizione (iii) del lemma 10.3, quindi c è intero su R. Ma R è integralmente chiuso, dunque $c \in R$. Abbiamo provato: $(R : P)_K = R$. Fissiamo ora $a \in P \smallsetminus 0$. Per il lemma 12.17 esistono $n \in \mathbb{N}^+$ ed ideali primi non nulli $P_1, P_2, \dots, P_n$ di R tali che $P_1 P_2 \cdots P_n \subseteq aR$; possiamo supporre che n sia il minimo intero positivo con questa proprietà. Dal momento che $P_1 P_2 \cdots P_n \subseteq P$, almeno uno degli ideali $P_1, \dots, P_n$, supponiamo sia P_n, è incluso in P. Ma $P_n \lhd\cdot R$, perché R ha dimensione (al più) 1, quindi $P_n = P$. Da $P_1 P_2 \cdots P_{n-1} P \subseteq aR$ ricaviamo $a^{-1} P_1 P_2 \cdots P_{n-1} P \subseteq R$, ovvero $a^{-1} P_1 P_2 \cdots P_{n-1} \subseteq (R : P)_K = R$ e quindi $P_1 P_2 \cdots P_{n-1} \subseteq aR$, contraddicendo così la minimalità di n. Questa contraddizione completa la dimostrazione. □

È appena il caso di osservare che la semplice implicazione da (i) a (ii) mostra che le localizzazioni degli anelli di Dedekind (vale a dire: gli anelli di Dedekind locali) sono tutti e soli gli anelli di valutazione principali. Si può anche notare che se R è un tale anello $\mathfrak{F}(R)$ è un gruppo totalmente ordinato dalla relazione di inclusione inversa. Infatti, detto M l'ideale massimale di R, se $M \neq 0$ (cioè: se R non è un campo) in accordo con il corollario 12.8, $\mathfrak{F}(R)$ è un gruppo ciclico infinito, generato da M, e l'applicazione $n \in \mathbb{Z} \mapsto M^n \in \mathfrak{F}(R)$ è sia un isomorfismo di gruppi che in isomorfismo tra gli insiemi ordinati $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathfrak{F}(R), \supseteq)$.

12.3 Ideali in anelli di Dedekind

Il fatto che gli ideali non nulli di un anello di Dedekind costituiscono un monoide fattoriale permette di operare su di essi con tecniche elementari di uso frequente in aritmetica. Un esempio viene dall'utile osservazione che massimi comuni divisori e minimi comuni multipli possono essere facilmente interpretati nel monoide degli ideali di questi anelli.

Lemma 12.19. *Sia R un anello di Dedekind e siano I e J due suoi ideali. Allora $I + J$ e $I \cap J$ sono, rispettivamente, il massimo comun divisore ed il minimo comune multiplo tra I e J in $\mathfrak{I}(R)$. In particolare, I e J sono coprimi (in $\mathfrak{I}(R)$) se e solo se sono comassimali (in R). Inoltre, per ogni $L \lhd R$ si ha $L(I \cap J) = LI \cap LJ$.*

Dimostrazione. L'enunciato è conseguenza dal fatto che, come banalmente segue dal teorema 12.7 (i), la relazione di divisibilità in $\mathfrak{I}(R)$ coincide con l'inclusione inversa. Infatti per questo motivo $I + J$, l'estremo superiore in $(\mathfrak{I}(R), \subseteq)$ tra I e J, è l'estremo inferiore tra I e J rispetto alla divisibilità, cioè l'unico massimo comun divisore nel monoide $\mathfrak{I}(R)$ tra I e J. Inoltre, I e J sono coprimi in $\mathfrak{I}(R)$ se e solo se l'unità R di $\mathfrak{I}(R)$ è il loro massimo comun divisore, ovvero, per quanto appena visto, se e solo se $I + J = R$, cioè se e solo se I e J sono ideali comassimali. In modo duale si prova che $I \cap J$ è il minimo comune multiplo tra I e J in $\mathfrak{I}(R)$. Infine, l'uguaglianza $L(I \cap J) = LI \cap LJ$ è ovvia se uno tra gli ideali I, J, L è nullo; nell'altro caso segue da proprietà immediate dei minimi comuni multipli in monoidi fattoriali: il prodotto tra L ed un minimo comune multiplo tra I e J è un minimo comune multiplo tra LI e LJ. □

Lemma 12.20. *Sia R un anello di Dedekind e sia $\mathcal{P}$ un insieme finito di ideali primi di R. Allora, per ogni $H \in \mathfrak{I}^*(R)$, si ha $H \supset \bigcup_{P \in \mathcal{P}} HP$.*

Dimostrazione. Ovviamente $H \supseteq \bigcup_{P \in \mathcal{P}} HP$; occorre solo provare che quest'inclusione è stretta. Possiamo chiaramente assumere che $\mathcal{P}$ non contenga l'ideale nullo. Per ogni $P \in \mathcal{P}$, sia P' il prodotto degli ideali in $\mathcal{P} \setminus \{P\}$. L'essenziale unicità delle fattorizzazioni degli ideali di R in prodotto di primi fornisce $HP' \supset HPP'$, possiamo allora fissare $a_P \in HP' \setminus HPP'$. Inoltre, P e P' sono coprimi nel monoide $\mathfrak{I}^*(R)$, quindi $HPP' = H(P \cap P') = HP \cap HP'$ per il lemma 12.19. Di conseguenza $a_P \in HP' \setminus HP$, e così, per ogni $Q \in \mathcal{P} \setminus \{P\}$, si ha $a_P \in HQ \setminus HP$ dal momento che $P' \subset Q$. Sia ora $a = \sum_{P \in \mathcal{P}} a_P$; ovviamente $a \in H$. Scelto comunque $Q \in \mathcal{P}$, gli addendi a_P che definiscono a sono tutti in HQ ad eccezione di a_Q, che non vi appartiene; se ne ricava $a \notin HQ$. Dunque $a \in H \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} HP$; con ciò il lemma è provato. □

Uno dei casi in cui è possibile applicare il precedente lemma è quello in cui $\mathcal{P}$ è la varietà di un ideale non nullo. Abbiamo infatti:

Lemma 12.21. *Sia R un anello di Dedekind e sia $H \in \mathfrak{I}^*(R)$. Allora l'insieme degli ideali di R contenenti H è finito. In altri termini: $\mathfrak{I}(R/H)$ è finito.*

Dimostrazione. In un monoide fattoriale, ogni elemento ha, a meno di associati, solo un numero finito di divisori. Dal momento che, come mostra il teorema 12.7, in $\mathfrak{I}^*(R)$ i divisori di H sono

precisamente gli ideali che lo contengono e la relazione 'essere elementi associati' è l'identità, questo basta a provare l'asserto. □

Ovvia conseguenza del lemma 12.21 è che *i quozienti propri degli anelli di Dedekind sono tutti artiniani,* cosa che del resto è vera per tutti i domini di integrità unitari noetheriani di dimensione al più uno (si veda l'esercizio 8.A.4).

Se H è un ideale non nullo di un anello di Dedekind R, è ovvio che H ha qualche multiplo in $\mathfrak{I}^*(R)$ che è un ideale principale non nullo: scelto comunque $a \in H \setminus 0$, il punto (i) del teorema 12.7 mostra che $HJ = aR$ per qualche $J \in \mathfrak{I}^*(R)$. Il prossimo lemma mostra che J può essere scelto coprimo con un arbitrario prefissato ideale non nullo.

Lemma 12.22. *Siano R un anello di Dedekind e $H, I \in \mathfrak{I}^*(R)$. Allora esiste $J \in \mathfrak{I}^*(R)$ tale che HJ sia principale e $I + J = R$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{V} = \operatorname{Var}(I)$, l'insieme degli ideali primi di R contenenti I. Per i lemmi 12.20 e 12.21, esiste $a \in H \setminus \bigcup_{P\in\mathcal{V}} HP$. Ora, $HJ = aR$ per un opportuno $J \in \mathfrak{I}^*(R)$. Se $I + J$ fosse un ideale proprio, esisterebbe un ideale massimale P contenente $I + J$; si avrebbe allora $I \subseteq P$ e quindi $P \in \mathcal{V}$, ma anche $J \subseteq P$ e quindi $aR = HJ \subseteq HP$, in contraddizione con la scelta di a. Quindi $I + J = R$ e la dimostrazione è completa.[3] □

Proposizione 12.23. *Sia R un anello di Dedekind semilocale (cioè con solo un numero finito di ideali primi). Allora R è un anello principale.*

Dimostrazione. Sia $H \in \mathfrak{I}^*(R)$, sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli ideali primi non nulli di R e sia $I = \prod_{P\in\mathcal{S}} P$. Per il lemma 12.22 esiste $J \in \mathfrak{I}^*(R)$ tale che HJ sia principale e $I + J = R$. Quest'ultima condizione e la scelta di I comportano che J non è contenuto in alcun ideale primo di R, quindi $J = R$, dunque $H = HJ$ è principale. Ciò mostra che R è un anello principale. □

Arriviamo ora ad un importante risultato: in un arbitrario anello di Dedekind i quozienti propri sono tutti anelli ad ideali principali e gli ideali sono sempre generati da al più due elementi, uno dei quali può essere scelto in modo arbitrario.

Teorema 12.24. *Siano R un anello di Dedekind e H un ideale non nullo di R. Allora:*
(i) *ogni ideale di R/H è principale;*
(ii) *per ogni $a \in H \setminus 0$ esiste $b \in H$ tale che $H = aR + bR$.*

Dimostrazione. Sia $I/H \lhd R/H$. Allora, per il lemma 12.22, esiste $J \lhd R$ tale che IJ sia principale e $R = H + J$. Allora $I = IR = IH + IJ \subseteq H + IJ$, ma $H \subseteq I$, quindi $I = H + IJ$. Allora $I/H = (IJ + H)/H$ è un ideale principale. È così provata la (i).

Sia ora $a \in H \setminus 0$. Allora R/aR è un anello ad ideali principali, per quanto appena provato. Dunque esiste $b \in R$ tale che H/aR sia generato da $b + aR$, vale a dire: $H = aR + bR$. □

Una dimostrazione alternativa per la parte (i) è nell'osservazione 12.C.1. Una conseguenza di questo stesso enunciato è il prossimo corollario.

Corollario 12.25. *Siano $I, J \in \mathfrak{I}^*(R)$, dove R è un anello di Dedekind. Allora*
(i) *$I/IJ \simeq_R R/J$;*
(ii) *$|R/IJ| = |R/I| \cdot |R/J|$.*

Dimostrazione. Per il teorema 12.24, il quoziente I/IJ è un R-modulo ciclico, quindi isomorfo a $R/\operatorname{Ann}_R(I/IJ)$. Ora, $\operatorname{Ann}_R(I/IJ) = (IJ : I)_R = I^{-1}IJ = J$ per il lemma 12.4; si ottiene così (i). Poiché $|R/IJ| = |R/I| \cdot |I/IJ|$, la (ii) ne è una ovvia conseguenza. □

[3] L'ultimo passo si potrebbe esprimere, più sinteticamente così: i divisori primi di J moltiplicati per H dividono aR, quindi tali divisori non possono essere in $\mathcal{V}$, dunque I e J sono coprimi in $\mathfrak{I}^*(R)$, ovvero comassimali.

Osservazioni.

12.C.1. Si potrebbe esser tentati dal dimostrare il teorema 12.24 ragionando (per la parte (i)) in questo modo: sappiamo che R/H ha un numero finito di ideali, quindi è certamente semilocale; allora i suoi ideali sono principali per la proposizione 12.23. Naturalmente quest'argomentazione è fallace: non è vero (a meno che H non sia primo) che R/H sia un anello di Dedekind. Però qualcosa di questa idea si può salvare ragionando in questo modo: siano $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(H)$, l'insieme dei divisori primi di H, e $S = R \setminus \bigcup \mathcal{V}$. Allora S è un sottomonoide di $(R, \cdot)$ e, per il corollario 12.16, $S^{-1}R$ è un anello di Dedekind. Inoltre, per il corollario 9.17, $S^{-1}R$ è semilocale, dunque $S^{-1}R$ è principale, per la proposizione 12.23. D'altra parte, $S = \{r \in R \mid r + H \in \mathcal{U}(R/H)\}$ è l'insieme degli elementi di R che sono invertibili modulo H. Di conseguenza, R/H è isomorfo ad un quoziente di $S^{-1}R$ (anche se non è necessario, si può osservare che $R/H = (S + H/R)^{-1}(R/H) \simeq S^{-1}R/H^e$, per il lemma 9.10). Di conseguenza, ogni ideale di R/H è principale.

12.C.2. È stato dimostrato che vale anche l'inverso del teorema 12.24, vale a dire: *un dominio di integrità unitario R è di Dedekind se e solo se in ogni suo quoziente proprio ha tutti gli ideali principali.*

13 Anelli di Dedekind in teoria dei numeri

In questo capitolo saranno illustrate alcune applicazioni della teoria svolta sinora, particolarmente di quella degli anelli di Dedekind, alla teoria dei numeri.

13.1 Anelli degli interi in campi di numeri

Si chiama *campo di numeri* un campo K di caratteristica 0 che abbia grado finito sul suo sottocampo minimo. Come sappiamo dalla teoria elementare dei campi, il sottocampo minimo di un tale K deve essere isomorfo a $\mathbb{Q}$, e K ne è necessariamente un'estensione algebrica. Di conseguenza K è isomorfo ad un sottocampo di una (qualsiasi) chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$; è allora lecito assumere, come d'ora in avanti faremo, che i campi di numeri di cui ci occuperemo sono i sottocampi della chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}}$ di $\mathbb{Q}$ nel campo complesso che (ovviamente contengano $\mathbb{Q}$ e) abbiano grado finito su $\mathbb{Q}$.

Se K è un tale campo, poniamo $Z_K := K \cap \overline{\mathbb{Z}}$; ricordiamo dalla sezione 10.1 che $\overline{\mathbb{Z}}$ è l'anello dei numeri complessi interi algebrici, un sottoanello di $\overline{\mathbb{Q}}$.[1] Allora Z_K, l'insieme degli interi algebrici appartenenti a K, è un sottoanello di K, precisamente la chiusura intera di $\mathbb{Z}$ in K. Come usuale, chiameremo Z_K anche, semplicemente, l'anello degli interi di K. Osserviamo che, per il corollario 10.10, $Z_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.

Il nostro primo scopo è quello dimostrare un risultato fondamentale della teoria dei numeri dell'ottocento, cioè il fatto che, per ogni scelta del campo di numeri K, questo anello Z_K è un anello di Dedekind. A questo scopo, utilizzando il teorema 12.18, ci basterà mostrare che Z_K è noetheriano, integralmente chiuso ed ha dimensione al più 1.

Il fatto che Z_K sia integralmente chiuso è ovvio: K contiene un campo dei quozienti $Q(Z_K)$ di Z_K e Z_K coincide con la sua chiusura intera in K, in conseguenza del corollario 10.8. Ma allora Z_K coincide con la sua chiusura intera in $Q(Z_K)$ ed è quindi, in accordo con la definizione, integralmente chiuso.

In realtà, possiamo facilmente ottenere un'informazione più precisa: $Q(Z_K)$ coincide proprio con K, come segue da un lemma elementare che sarà estremente utile.

Lemma 13.1. *Il gruppo quoziente $(\overline{\mathbb{Q}}, +)/(\overline{\mathbb{Z}}, +)$ è periodico.*

Dimostrazione. Sia $c \in \overline{\mathbb{Q}}$. Allora c è radice di un polinomio non nullo a coefficienti in $\mathbb{Q}$; moltiplicando quest'ultimo per un opportuno intero non nullo otteniamo un $f \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ tale che $f(c) = 0$. Siano n e a il grado ed il coefficiente direttore di f. Allora da $f(c) = 0$ si ricava $ac^n \in \sum_{i=0}^{n-1} c^i\mathbb{Z}$, quindi $(ac)^n = a^{n-1}(ac^n) \in \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1}c^i\mathbb{Z} \subseteq \sum_{i=0}^{n-1}(ac)^i\mathbb{Z}$, perché ciascuno degli $(ac)^i$ coinvolti in questa somma divide $a^{n-1}c^i$. Da ciò, per il lemma 10.1, segue $ac \in \overline{\mathbb{Z}}$. Abbiamo provato che $c + \overline{\mathbb{Z}}$ è periodico (di periodo divisore di a); la dimostrazione è così completa. □

Corollario 13.2. *Sia K un campo di numeri. Allora K è un campo dei quozienti del suo anello Z_K degli interi algebrici.*

Dimostrazione. Sia $Q(Z_K) = \{a/b \mid a, b \in Z_K \wedge b \neq 0\}$, il campo dei quozienti di Z_K contenuto in K. Sia $k \in K$. Essendo $K \leq \overline{\mathbb{Q}}$, il lemma 13.1 mostra l'esistenza di un intero positivo n tale che $nk \in Z_K$, ma allora $k = nk/n \in Q(Z_K)$. Dunque, $K = Q(Z_K)$. □

[1] l'anello Z_K è spesso indicato in letteratura come $\mathcal{O}_K$

Per $\mathbb{Q}$-base di K si intende una base di K visto come spazio vettoriale (su $\mathbb{Q}$).

Corollario 13.3. *Sia K un campo di numeri. Allora K ha una $\mathbb{Q}$-base costituita da interi algebrici.*

Dimostrazione. Sia B una $\mathbb{Q}$-base di K. Come mostra il lemma 13.1, per ogni $b \in B$ esiste $n_b \in \mathbb{N}^+$ tale che $n_b b \in Z_K$. Allora $\{n_b b \mid b \in B\}$ è una $\mathbb{Q}$-base di K costituita da interi algebrici. □

Il fatto che gli anelli degli interi dei campi di numeri abbiano dimensione al più 1 è una conseguenza immediata del lemma 10.12; anche in questo caso possiamo dire qualcosa in più (come del resto segue dall'osservazione nel paragrafo successivo a quello stesso lemma):

Lemma 13.4. *Sia K un campo di numeri. Allora Z_K ha dimensione di Krull* 1.

Dimostrazione. Siccome Z_K è un ampliamento intero di $\mathbb{Z}$, possiamo applicare ad esso e a $\mathbb{Z}$ il lemma 10.12; vediamo dunque che se I e J sono due ideali primi di Z_K tali che $I \subset J$, allora $I \cap \mathbb{Z} \subset J \cap \mathbb{Z}$.

Sia P un ideale primo non nullo di Z_K. Per quanto appena detto, $0 = 0 \cap \mathbb{Z} \subset P \cap \mathbb{Z}$. Allora $P \cap \mathbb{Z}$, in quanto ideale primo non nullo in $\mathbb{Z}$, è massimale in $\mathbb{Z}$. Sia M un ideale massimale di Z_K contenente P. Allora $P \cap \mathbb{Z} \subseteq M \cap \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, quindi $P \cap \mathbb{Z} = M \cap \mathbb{Z}$ e applicando di nuovo l'osservazione fatta nel primo paragrafo, $P = M$.

Abbiamo così verificato che tutti gli ideali primi non nulli di Z_K sono massimali, cioè che Z_K ha dimensione al più 1.[2] Se Z_K avesse dimensione 0, cioè se fosse un campo, anche $\mathbb{Z}$ sarebbe un campo, ovviamente una contraddizione. La dimostrazione è completa. □

13.1.1 Richiami di teoria dei campi; discriminanti di basi

Per dimostrare che gli anelli degli interi dei campi di numeri sono anelli di Dedekind, resta ancora da provare che essi sono noetheriani. Per farlo, abbiamo bisogno di alcune nozioni e risultati della teoria dei campi, che richiamiamo qui in modo rapido e senza fornire dimostrazioni. Chi fosse interessato ad approfondire il discorso può fare riferimento ad uno tra i tanti manuali di algebra disponibili.

Sia K un campo di numeri, e sia $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$ il suo grado (finito) su $\mathbb{Q}$. Un importante risultato (sulle estensioni finite separabili di campi) garantisce che esistono esattamente n omomorfismi di campi da K a $\overline{\mathbb{Q}}$. Per omomorfismo di campi intendiamo un omomorfismo di anelli unitari tra due campi; dunque gli omomorfismi di campi sono certamente non nulli e di conseguenza sono tutti monomorfismi.[3] Il sottocampo di $\overline{\mathbb{Q}}$ generato dalle immagini di questi monomorfismi è la *chiusura normale* di K (rispetto a $\mathbb{Q}$), che indichiamo con N. Chiaramente (sempre in conseguenza di risultati elementari della teoria dei campi) anche N ha grado finito su $\mathbb{Q}$. Abbiamo così esattamente n omomorfismi (di campi) da K a N; indichiamoli come $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ e chiamiamo S l'insieme da essi costituito.

Ora, N è quella che si chiama un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$. Vediamo cosa significhi ciò, limitandoci allo stretto necessario per i nostri scopi. Come già affermato in riferimento a K, esistono esattamente $m := \dim_{\mathbb{Q}} N$ omomorfismi di campi da N a $\overline{\mathbb{Q}}$. A differenza di quanto accade per K, però, questi omomorfismi (che, ricordiamo, sono iniettivi) hanno tutti per immagine N.

[2] che è ciò che ci serve al fine di dimostrare il teorema 13.7

[3] in realtà, nel caso generale il risultato sulle estensioni separabili a cui abbiamo fatto cenno è riferito ad omomorfismi di estensioni di campi (in questo caso dall'estensione $K/\mathbb{Q}$ all'estensione $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), vale a dire: omomorfismi di algebre unitarie (nel nostro caso, $\mathbb{Q}$-algebre). Ma tutti gli omomorfismi tra campi contenenti $\mathbb{Q}$ come sottocampo minimo fissano (cioè mandano in sé stesso) ogni elemento di $\mathbb{Q}$ e sono quindi omomorfismi di $\mathbb{Q}$-algebre; possiamo dunque ignorare questa distinzione.

Abbiamo così esattamente m automorfismi del campo N. Indichiamo con G il gruppo da essi costituito: $G = \operatorname{Aut} N$; questo è il *gruppo di Galois* dell'estensione $N/\mathbb{Q}$. Uno dei risultati fondamentali della teoria di Galois assicura che $\mathbb{Q}$ è precisamente il campo degli elementi fissati da G, cioè che, per ogni $a \in N$, si ha: $a \in \mathbb{Q} \iff (\forall g \in G)(a^g = a)$. Segue anche da ciò che gli elementi di K fissati da ciascuno dei σ_i sono in $\mathbb{Q}$, dal momento che ogni $g \in G$ ha uno dei σ_i come restrizione a K.[4]

Sia ora $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ una $\mathbb{Q}$-base (ordinata) di K. Ad essa associamo la matrice

$$D_{\underline{b}} := (b_j^{\sigma_i}) = \begin{pmatrix} b_1^{\sigma_1} & b_2^{\sigma_1} & \dots & b_n^{\sigma_1} \\ b_1^{\sigma_2} & b_2^{\sigma_2} & \dots & b_n^{\sigma_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_1^{\sigma_n} & b_2^{\sigma_n} & \dots & b_n^{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

a termini in N, le cui righe sono le immagini della base $\underline{b}$ mediante gli omomorfismi σ_i.

Per ogni $g \in G$ possiamo considerare la trasformata di $D_{\underline{b}}$ mediante g, cioè la matrice $D_{\underline{b}}^g := ((b_j^{\sigma_i})^g) = (b_j^{\sigma_i g})$. Ora, la composizione con g definisce una permutazione in S: l'applicazione $\sigma \in S \mapsto \sigma g \in S$ è infatti biettiva con inversa $\sigma \mapsto \sigma g^{-1}$. Dunque, $D_{\underline{b}}^g$ si ottiene da $D_{\underline{b}}$ con una permutazione delle righe. Di conseguenza, detto d il determinante $|D_{\underline{b}}|$ (che, ricordiamo, appartiene a N), abbiamo $d^g = |D_{\underline{b}}^g| \in \{d, -d\}$. Ulteriore conseguenza è che d^2 è fissato da ogni elemento di G. Per quanto richiamato prima, questo significa che $d^2 \in \mathbb{Q}$. Questo numero razionale d^2 ha un ruolo molto importante nella teoria algebrica dei numeri; esso prende il nome di *discriminante* della base $\underline{b}$, lo si indica con $\Delta(\underline{b})$. Possiamo ancora osservare che il discriminante $\Delta(\underline{b})$ dipende solo dalla base scelta, non dall'ordine in cui abbiamo rappresentato i suoi elementi o gli elementi di S: cambiare questi ordini significa solo permutare le colonne o le righe della matrice $D_{\underline{b}}$; in particolare questo permette di parlare, come d'ora in poi si farà, di discriminante di un base anche senza assumerne un ordinamento.

Abbiamo dimostrato che il discriminante di una base è un numero razionale; dimostreremo ora che questo numero è diverso da zero. Per farlo, richiamiamo un altro risultato fondamentale della teoria dei campi, noto come lemma di Dedekind: se E ed F sono campi arbitrari, l'insieme degli omomorfismi di campi da E ad F è linearmente indipendente su F. Chiariamo questo enunciato. Stiamo considerando l'insieme F^E delle applicazioni da E a F come anello di funzioni (come definito nella sezione 4.2: le operazioni di addizione e moltiplicazione sono le corrispondenti operazioni puntuali) in cui immergiamo F tramite le applicazioni costanti (cioè identifichiamo ciascun elemento $a \in F$ con l'applicazione costante a da E a F). In questo modo F^E si struttura come F-algebra, quindi in particolare come F-spazio vettoriale. Dunque, l'addizione interna in questo spazio vettoriale è l'operazione di addizione puntuale e il prodotto esterno è definito da $\sigma a \colon e \in E \mapsto e^\sigma a \in F$ per ogni $\sigma \in F^E$ e $a \in F$. Bene, l'insieme degli omomorfismi (di campi) da E a F è un sottoinsieme di questo F-spazio vettoriale F^E; il lemma di Dedekind assicura, appunto, che esso è linearmente indipendente.

Il lemma di Dedekind permette di provare che le righe della matrice $D_{\underline{b}}$ sono linearmente indipendenti tra loro. Siano infatti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in N$ tali che, per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, si abbia $0 = \sum_{i=1}^n b_j^{\sigma_i} \alpha_i = b_j^{\sum_{i=1}^n \sigma_i \alpha_i}$. Ora, $\sum_{i=1}^n \sigma_i \alpha_i$ (che non è, in generale, un omomorfismo di campi) è sicuramente un omomorfismo di $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali da K a N; il fatto che si annulli su tutti gli elementi di una $\mathbb{Q}$-base di K garantisce che è l'omomorfismo nullo. Dunque $\sum_{i=1}^n \sigma_i \alpha_i = 0$. Ma, per il lemma di Dedekind, S è linearmente dipendente su N, quindi $\alpha_i = 0$ per ogni

[4] pertanto, per ogni $k \in K$ si ha $k \in \mathbb{Q} \iff (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(k^{\sigma_i} = k)$. Benché non essenziale ai nostri fini immediati, osserviamo che molto altro si può dire a proposito delle relazioni che intercorrono tra S e G; ad esempio ciascuno dei σ_i è la restrizione a K di un automorfismo di N; questo segue dal teorema di prolungamento nella teoria elementare dei campi. Ci torneremo, con maggiori dettagli, nell'esercizio 13.B.1.

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Abbiamo così dimostrato l'indipendenza tra le righe di $D_{\underline{b}}$, quindi $D_{\underline{b}}$ non è degenere e $|D_{\underline{b}}| \neq 0$. Concludiamo così la nostra digressione nella teoria dei campi con:

Lemma 13.5. *Il discriminante di una qualsiasi $\mathbb{Q}$-base $\underline{b}$ di un campo di numeri è un numero razionale diverso da 0. Se, inoltre, $\underline{b}$ è costituita da interi algebrici, il discriminante di $\underline{b}$ è in $\mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato la prima parte dell'enunciato. Se $\underline{b}$ è costituita da interi algebrici, il suo discriminante è non solo in $\mathbb{Q}$ ma anche in $\overline{\mathbb{Z}}$, quindi in $\overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. □

Lo scopo della discussione precedente era quello di metterci in condizioni di dimostrare questo fondamentale risultato:

Proposizione 13.6. *Sia K un campo di numeri, estensione di grado n di $\mathbb{Q}$. Allora il gruppo additivo $(Z_K, +)$ è abeliano libero di rango n.*

Dimostrazione. Sappiamo, dal corollario 13.3 che K ha una $\mathbb{Q}$-base costituita da elementi di Z_K. Tra tali basi, ne possiamo scegliere una, $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, tale che $|\Delta(\underline{b})|$ (che è intero, per il lemma 13.5) abbia il minimo valore possibile. Sia B il sottogruppo di $(K, +)$ generato da $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Siccome $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ha n elementi ed è linearmente indipendente su $\mathbb{Q}$, e quindi su $\mathbb{Z}$, allora $B = \bigoplus_{i=1}^{n} b_1\mathbb{Z}$ è abeliano libero di rango n. Sarà allora sufficiente provare che B coincide con Z_K.

Ovviamente $B \leq Z_K$. Supponiamo $B \neq Z_K$, esista dunque $c \in Z_K \setminus B$. Poiché $\underline{b}$ è una $\mathbb{Q}$-base di K, esistono (univocamente determinati) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ tali che $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, ma almeno uno dei λ_i non è in $\mathbb{Z}$, perché $c \notin B$. A meno di riordinare la base $\underline{b}$, se necessario, possiamo assumere $\lambda_1 \notin \mathbb{Z}$. Esiste un intero ℓ tale che $\ell < \lambda_1 < \ell + 1$; a meno di sostituire c con $c - \ell b_1$ ($\in Z_K$), possiamo ulteriormente assumere $\ell = 0$, cioè $0 < \lambda_1 < 1$. Ora, anche $\underline{b}' := (c, b_2, \dots, b_n)$ è una $\mathbb{Q}$-base di K costituita da interi algebrici, ed abbiamo

$$D_{\underline{b}'} = D_{\underline{b}} \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \lambda_2 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ \lambda_n & & & \end{array} \right)$$

(dove naturalmente I_{n-1} è la matrice identica di rango $n-1$). Allora $|D_{\underline{b}'}| = |D_{\underline{b}}|\lambda_1$ e quindi $|\Delta(\underline{b}')| = |\Delta(\underline{b})|\lambda_1^2 < |\Delta(\underline{b})|$, in contraddizione con la scelta di $\underline{b}$. Abbiamo così ottenuto una contraddizione, provando così che $(Z_K, +)$ coincide col gruppo abeliano libero B di rango n. □

La proposizione appena provata mostra che ogni campo di numeri K ha una $\mathbb{Q}$-base che è, allo stesso tempo, una base di Z_K visto come $\mathbb{Z}$-modulo. Una tale base prende il nome di *base intera* di K.

Teorema 13.7. *Sia K un campo di numeri. Allora l'anello Z_K degli interi algebrici di K è un anello di Dedekind.*

Dimostrazione. La proposizione 13.6 mostra che il gruppo additivo di Z_K è finitamente generato, quindi a condizione massimale; allora anche l'insieme degli ideali di Z_K, che è un sottoinsieme di quello dei sottogruppi di Z_K, è a condizione massimale; dunque Z_K è noetheriano. Abbiamo già visto, nella prima parte di questa stessa sezione, che Z_K è integralmente chiuso e (lemma 13.4) ha dimensione 1. Allora il teorema 12.18 mostra che Z_K è di Dedekind. □

Vedemo nelle prossime sezioni che, da alcuni punti di vista, gli anelli degli interi in campi di numeri sono anelli di Dedekind dalla struttura piuttosto peculiare.

Osservazioni.

13.A.1. Il contenuto della proposizione 13.6 si riduce in effetti al fatto che il gruppo additivo di Z_K è finitamente generato. Infatti il gruppo additivo di K è un gruppo abeliano senza torsione, quindi tutti i suoi sottogruppi finitamente generati sono abeliani liberi. Più precisamente, essendo $(K,+)$ il gruppo additivo di uno spazio vettoriale di dimensione $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$, $(K,+)$ è una somma diretta di n copie del gruppo $(\mathbb{Q},+)$. Una volta noto che $(Z_K,+)$ è finitamente generato e che $(K,+)/(Z_K,+)$ è periodico (come segue dal lemma 13.1, essendo $Z_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$), si vede immediatamente non solo che $(Z_K,+)$ è libero, ma anche che il suo rango è n.

13.A.2. La definizione di base intera qui data è ridondante. Verificare che se K è un campo di numeri e X è una base per il gruppo (abeliano libero) additivo di Z_K, allora X è anche una $\mathbb{Q}$-base di K, quindi una base intera.

13.A.3. Sia K un campo di numeri di grado n su $\mathbb{Q}$. Un risultato ben noto della teoria dei campi, conosciuto come teorema dell'elemento primitivo, assicura che esiste $k \in K$ tale che $K = \mathbb{Q}(k)$. Come segue dal lemma 13.1, è anche possibile scegliere un tale k in Z_K (basta sostituire k con un suo multiplo, come nel corollario 13.3), quindi ogni campo di numeri è generato da un intero algebrico. Inoltre, sempre per la teoria elementare dei campi, $X := \{1, k, k^2, \dots, k^{n-1}\}$ è una $\mathbb{Q}$-base di K. Purtroppo, però, non esiste sempre un $k \in Z_K$ tale che questa base X sia una base intera.

13.2 Norma di elementi e di ideali

Lo studio delle proprietà degli interi algebrici è spesso semplificato dalle applicazioni norma che possono essere definite nei campi di numeri.

Riprendendo le notazioni utilizzate nella digressione sulla teoria dei campi nella sottosezione 13.1.1, sia K un fissato un campo di numeri, di dimensione n su $\mathbb{Q}$, e siano $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ gli n omomorfismi di campi da K alla sua chiusura normale N. Per ogni $k \in K$, si chiama *norma* di k rispetto a K, (o, più precisamente, rispetto all'estensione $K/\mathbb{Q}$) l'elemento

$$N_K(k) := \prod_{i=1}^{n} k^{\sigma_i},$$

anche denotato con $N_{K/\mathbb{Q}}(k)$. Notiamo la dipendenza di questo elemento non solo da k ma anche da K, che definisce gli omomorfismi σ_i (si veda, ad esempio, l'esercizio 13.B.1). Come è ovvio $N_K(k) \in N$, ma si ha, più precisamente, $N_K(k) \in \mathbb{Q}$. Come sappiamo dai richiami in 13.1.1, per verificarlo basta provare $(N_K(k))^g = N_K(k)$ per ogni automorfismo g di N. Ma, come anche abbiamo osservato, $\{\sigma_1 g, \sigma_2 g, \dots, \sigma_n g\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, quindi $(N_K(k))^g = \prod_{i=1}^n k^{\sigma_i g} = \prod_{i=1}^n k^{\sigma_i} = N_K(k)$; dunque effettivamente $N_K(k) \in \mathbb{Q}$. Se poi $k \in Z_k$, si ha anche $N_K(k) \in \overline{\mathbb{Z}}$ (ovviamente: ciascuno dei k^{σ_i} è un intero algebrico se lo è k), quindi $N_K(k) \in \overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. Osservando infine che l'applicazione $k \in K \mapsto N_K(k) \in N$ è il prodotto puntuale degli omomorfismi moltiplicativi σ_i, otteniamo che la norma rispetto a K definisce omomorfismi di monoidi

$$k \in (K,\cdot) \longmapsto N_K(k) \in (\mathbb{Q},\cdot) \qquad \text{e} \qquad k \in (Z_K,\cdot) \longmapsto N_K(k) \in (\mathbb{Z},\cdot).$$

Il secondo, in modo particolare, è di grande utilità nello studio delle proprietà di divisibilità in Z_K. Ad esempio:

Lemma 13.8. *Con le notazioni correnti, siano $a, b \in Z_K$. Allora:*

(i) *$a = 0$ se e solo se $N_K(a) = 0$;*

(ii) *se* $a|_{Z_K} b$, *allora* $N_K(a)|_{\mathbb{Z}} N_K(b)$;
(iii) $a|_{Z_K} N_K(a)$;
(iv) $a \in \mathcal{U}(Z_K)$ *se e solo se* $|N_K(a)| = 1$;
(v) a *e* b *sono associati in* Z_K *se e solo se* $a|_{Z_K} b$ *e* $|N_K(a)| = |N_K(b)|$;
(vi) *se* $a \notin \mathcal{U}(Z_K)$ *e non esiste alcun* $c \in Z_K$ *tale che* $N_K(c)$ *sia, in* $\mathbb{Z}$, *un divisore non banale di* $N_K(a)$, *allora* a *è irriducibile in* Z_K;
(vii) *se* $N_K(a)$ *è primo (e non zero) in* $\mathbb{Z}$, *allora* a *è irriducibile in* Z_K.

Dimostrazione. La (i) è evidente dalla definizione e dal fatto che i σ_i sono tutti monomorfismi. Per la (ii): se $b = ac$ per un qualche $c \in Z_K$, allora $N_K(b) = N_K(a)N_K(c)$, e $N_K(c) \in \mathbb{Z}$.

(iii): l'asserto è ovvio se $a = 0$; assumiamo dunque $a \neq 0$. Uno tra gli omomorfismi σ_i è l'immersione (insiemistica) di K in $\overline{\mathbb{Q}}$; senza perdere in generalità, supponiamo che sia σ_1. Allora $a^{-1}N_K(a) = \prod_{i=2}^{n} a^{\sigma_i}$; questo mostra che $a^{-1}N_K(a) \in K \cap \overline{\mathbb{Z}} = Z_K$, dunque a divide $N_K(a)$ in Z_K, come richiesto.

(iv): se a è invertibile in Z_K, allora anche la sua norma lo è in $\mathbb{Z}$ (gli omomorfismi di monoidi mandano invertibili in invertibili), quindi $|N_K(a)| = 1$. Viceversa, abbiamo appena visto con la (iii) che a divide $N_K(a)$ in Z_K, quindi se $|N_K(a)| = 1$, allora $a \in \mathcal{U}(Z_K)$.

(v): si ha $a|_{Z_K} b$ e $|N_K(a)| = |N_K(b)|$ se e solo se esiste $u \in Z_K$ tale che $b = au$ e $|N_K(u)| = 1$ (questo è vero anche nel caso $a = 0$). Pertanto la (v) segue da (iii).

(vi): se a non è né invertibile né irriducibile in Z_K, allora a ha in Z_K un divisore non banale c; segue allora da (v) che $N_K(c)$ è, in $\mathbb{Z}$, un divisore non banale di $N_K(a)$.

(vii) è infine un'immediata conseguenza di (vi). □

Si vedranno, tra gli esempi di fattorizzazioni discussi nella sezione 13.5, ma anche negli esercizi 13.D.3 e 13.C.6, numerosi esempi di elementi irriducibili in anelli di interi in campi di numeri la cui norma non sia un primo in $\mathbb{Z}$. È anche possibile avere due elementi non associati con la stessa norma, ad esempio $1 + 2i$ e $2 + i$ hanno questa proprietà nell'anello degli interi di Gauss, che è l'anello degli interi del campo $\mathbb{Q}[i]$, brevemente discusso più avanti.

Dal lemma 13.8 segue anche che ogni ideale non nullo H di Z_K ha intersezione non nulla con $\mathbb{Z}$: se $0 \neq h \in H$, allora la (iii) mostra che vale: $0 \neq N_K(h) \in hZ_K \cap \mathbb{Z} \subseteq H \cap \mathbb{Z}$. Si può dedurre da questo fatto una peculiare proprietà degli anelli degli interi dei campi di numeri: quella di avere *tutti i quozienti propri finiti*:

Corollario 13.9. *Se* K *è un campo di numeri, per ogni* $H \lhd Z_K$, *se* $H \neq 0$ *il quoziente* Z_K/H *è finito.*

Dimostrazione. Come appena osservato, la norma ℓ di un elemento non nullo di H è un intero non nullo appartenente a H. Allora $\ell Z_K \subseteq H$, quindi il gruppo additivo di Z_K/H è periodico (di esponente divisore di ℓ). Ma questo gruppo è finitamente generato, per la proposizione 13.6, ed i gruppi abeliani periodici finitamente generati sono finiti. Dunque Z_K/H è finito. □

Si noti che se R è un arbitrario anello di Dedekind e $0 \neq H \lhd R$, benché sia vero che R/H ha solo un numero finito di ideali, come osservato nel lemma 12.21, questo quoziente può avere cardinalità arbitraria, anche se R è addirittura principale. Ad esempio, se F è un campo l'anello dei polinomi ad una indeterminata $F[x]$ ha il quoziente $F[x]/(x)$ che è isomorfo ad F.

Tornando al nostro campo d numeri K, ricordiamo dal corollario 12.25 che se H e I sono ideali non nulli di Z_K, allora $|Z_K/HI| = |Z_K/H| \cdot |Z_K/I|$; dunque

$$H \in \mathfrak{I}^*(Z_K) \longmapsto |Z_K/H| \in (\mathbb{N}^+, \cdot)$$

è un omomorfismo di monoidi. Questo giustifica, almeno in parte, il fatto che l'indice $|Z_K/H|$ viene anche chiamato norma dell'ideale (non nullo) H.

In misura maggiore questa terminologia è giustificata da un'altra notevole proprietà degli anelli che stiamo considerando, espressa dalla seguente proposizione che mostra come, a meno del segno, la funzione indice estenda al monoide degli ideali interi la norma degli elementi non nulli:

Proposizione 13.10. *Per ogni campo di numeri K ed ogni $a \in Z_K \setminus \{0\}$, si ha $|Z_K/aZ_K| = |N_K(a)|$.*

Non dimostreremo questa proposizione nel caso generale, ma solo in quello, per noi particolarmente significativo, in cui K sia un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$, vale a dire: quando K coincide con la sua chiusura normale in $\overline{\mathbb{Q}}$.

Assunta questa ipotesi, sia come sopra $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$. Sia poi G il gruppo degli automorfismi del campo K; allora $|G| = n$. Sia infine $0 \neq a \in Z_K$. Abbiamo $\ell := N_K(a) = \prod_{\sigma\in G} a^\sigma$ e quindi, come osservato poco sopra, il corollario 12.25 fornisce $|Z_K/\ell Z_K| = \prod_{\sigma\in G} |Z_K/a^\sigma Z_K|$. Ora, $|Z_K/a^\sigma Z_K| = |Z_K/aZ_K|$ per ogni $\sigma \in G$, dal momento che σ induce per restrizione un automorfismo di Z_K, quindi $|Z_K/\ell Z_K| = |Z_K/aZ_K|^n$. D'altra parte $\ell \in \mathbb{Z}$ e $(Z_K, +)$ è un gruppo abeliano libero di rango n, dunque isomorfo a $\bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{Z}, +)$, quindi $Z_K/\ell Z_K \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ha ordine $|\ell|^n$. In conclusione $|\ell|^n = |Z_K/aZ_K|^n$, e quindi $|\ell| = |Z_K/aZ_K|$, come richiesto dall'enunciato della proposizione 13.10.

Va infine almeno menzionato l'analogo additivo della norma: la *traccia*. Con le stesse notazioni utilizzate per definire la norma, per ogni $k \in K$, la traccia $T_K(k)$ di k rispetto a K è definita da $T_K(k) = \sum_{i=1}^n k^{\sigma_i}$. Ragionando come fatto per la norma si verifica che $T_K(k) \in \mathbb{Q}$ e $T_K(k) \in \mathbb{Z}$ se $k \in Z_K$. L'applicazione $k \mapsto T_K(k)$ da $(K, +)$ a $(\mathbb{Q}, +)$, è un omomorfismo, e ne induce un altro da $(Z_K, +)$ a $(\mathbb{Z}, +)$.

Esercizi e osservazioni.

13.B.1. Un risultato della teoria dei campi, di cui abbiamo già menzionato un caso particolare, mostra che se N è un campo di numeri e K è un suo sottocampo, posto $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$ e $m = \dim_K N$, esistono esattamente m omomorfismi di K-algebre unitarie da N a $\overline{\mathbb{Q}}$ (vale a dire: omomorfismi di campi da N a $\overline{\mathbb{Q}}$ che fissano ogni elemento di K). Partendo da questo risultato, e dall'informazione che ogni omomorfismo $K \to N$ si prolunga ad un automorfismo di N, provare che ciascuno degli n omomorfismi di campi da K a $\overline{\mathbb{Q}}$ ha esattamente m prolungamenti ad N e dedurne che, per ogni $a \in K$ si ha $N_N(k) = (N_K(k))^m$.

13.B.2. Sia a un numero complesso algebrico, e sia $K = \mathbb{Q}(a)$. Se $n = \dim_{\mathbb{Q}}(K)$ e $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sono gli n omomorfismi (di campi) da K alla sua chiusura normale N in $\overline{\mathbb{Q}}$, allora $f := \prod_{i=1}^n (x - a^{\sigma_i})$ è un polinomio a coefficienti in N che viene fissato da ciascuno degli omomorfismi (di anelli unitari) $\sum_{j=0}^m k_j x^j \in K[x] \longmapsto \sum_{j=0}^m k_j^{\sigma_i} x^j \in N[x]$ indotti dai σ_i. Se ne deduce che $f \in \mathbb{Q}[x]$ (e $f \in \mathbb{Z}[x]$ se $a \in Z_K$). Chiaramente $f(a) = 0$ e, poiché f ha grado n, si ottiene così che f è il polinomio minimo di a rispetto a $\mathbb{Q}$.

Sia la norma che la traccia di a rispetto a K appaiono, a meno del segno, come coefficienti di f: evidentemente $N_K(a) = (-1)^n c_0$ e $T_K(a) = -c_{n-1}$, dove $c_0 = f(0)$ e c_{n-1} sono il termine noto e il coefficiente relativo a x^{n-1} di f.

13.B.3. Sia $\sigma\colon K \to L$ un isomorfismo tra due campi di numeri, e sia $a \in K$. È ovvio che vale $N_K(a) = N_L(a^\sigma)$; dedurre dai due esercizi/osservazioni precedenti che se $a^\sigma \in L$ vale anche $N_K(a) = N_K(a^\sigma)$.

13.3 Interi in campi quadratici

I campi di numeri più facili da analizzare, a parte $\mathbb{Q}$ stesso, sono i *campi quadratici*, cioè le estensioni di grado 2 su $\mathbb{Q}$. Sia K un tale campo. Se $k \in K \setminus \mathbb{Q}$ allora, ovviamente, $K = \mathbb{Q}[k]$ e k è radice di un polinomio monico $x^2 + sx + t \in \mathbb{Q}[x]$. Ma allora $k = (-s + \varepsilon\sqrt{\delta})/2$, dove $\varepsilon \in \{1, -1\}$ e $\delta = s^2 - 4t$; segue subito che anche $\sqrt{\delta}$ è un generatore di K e $K = \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. Scritto δ come u/v, dove u e v sono interi (e $v \neq 0$), se w è il massimo intero positivo il cui quadrato divida uv in $\mathbb{Z}$, allora $\sqrt{\delta} = (w/|v|)\sqrt{d}$ e quindi $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, dove $d = uv/w^2$ è un intero libero da quadrati, vale a dire: non divisibile (sempre in $\mathbb{Z}$) per il quadrato di alcun primo. Concludiamo che *ogni campo quadratico ha la forma $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ per un opportuno $d \in \mathbb{Z}$ libero da quadrati.* Naturalmente, affinché K abbia effettivamente grado 2 (cioè $K \neq \mathbb{Q}$) occorre e basta assumere $d \neq 1$ (teniamo presente che, se $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$, allora $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, dal momento che $\sqrt{d} \in \overline{\mathbb{Z}}$).

Fissato dunque un intero $d \neq 1$ libero da quadrati, sia $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Il nostro primo scopo è quello di identificare Z_K; ovviamente $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subseteq Z_K$, perché $\sqrt{d}$ è un intero algebrico. L'insieme $\{1, \sqrt{d}\}$ è una $\mathbb{Q}$-base di K, come sappiamo dalla teoria elementare dei campi, quindi ogni elemento di K si può scrivere come $\alpha + \beta\sqrt{d}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$; inoltre, l'applicazione $\sigma\colon \alpha + \beta\sqrt{d} \in K \mapsto \alpha - \beta\sqrt{d} \in K$ è un automorfismo di K (come segue dal teorema di prolungamento, o da verifica diretta). Siccome sappiamo che esistono esattamente due omomorfismi di campi da K a $\overline{\mathbb{Q}}$, σ è l'unico automorfismo non identico di K, e la norma e la traccia di $a = \alpha + \beta\sqrt{d} \in K$ sono: $N_K(a) = aa^\sigma = \alpha^2 - d\beta^2$ e $T_K(a) = 2\alpha$.

Sia $a \in Z_K$. Continuiamo ad adottare la notazione precedente, ma scriviamo (come ovviamente lecito) α e β, rispettivamente, come u/w e v/w, dove u, v e w sono interi che non hanno divisori primi in comune, e $w > 0$. Dunque $a = (u + v\sqrt{d})/w$; inoltre $N_K(a) = (u^2 - dv^2)/w^2$ e $T_K(a) = 2u/w$ sono in $\mathbb{Z}$. Supponiamo che u e w non siano coprimi; esista dunque un primo p che li divide entrambi. Dall'espressione per la norma ricaviamo $p^2|_{\mathbb{Z}}\, w^2|_{\mathbb{Z}}\, u^2 - dv^2$, quindi $p^2|_{\mathbb{Z}}\, dv^2$. Ora, siccome u, v e w sono coprimi, p non divide v, quindi $p^2|_{\mathbb{Z}}\, d$, il che contraddice l'assunzione che d sia libero da quadrati. Pertanto u e w sono coprimi, e da $2u/w = T_K(a) \in \mathbb{Z}$, cioè $w|_{\mathbb{Z}}\, 2u$ ricaviamo $w|_{\mathbb{Z}}\, 2$. Dunque $w \in \{1, 2\}$. Se $w = 1$, allora $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Supponiamo $w = 2$. Allora $w^2|_{\mathbb{Z}}\, u^2 - dv^2$ diventa $u^2 \equiv_4 dv^2$. Ora, u è dispari, perché u e w sono coprimi, quindi $u^2 \equiv_4 1$ e $dv^2 \equiv_4 1$. Quest'ultima congruenza mostra che anche v è dispari, quindi $v^2 \equiv_4 1$ ed infine $d \equiv_4 1$. Abbiamo così provato che $Z_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (e quindi $\{1, \sqrt{d}\}$ è una base intera di K) se $d \not\equiv_4 1$. Nel caso $d \equiv_4 1$ la situazione è effettivamente diversa, infatti $b := (1 + \sqrt{d})/2$ è radice del polinomio monico $(x - b)(x - b^\sigma) = (x - (1 + \sqrt{d})/2)(x - (1 - \sqrt{d})/2) = x^2 - x + (1 - d)/4$, che in questo caso ha coefficienti in $\mathbb{Z}$, quindi $b \in Z_K \setminus \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Possiamo inoltre provare che $\{1, b\}$ è una base intera di K. Poiché è chiaro che 1 e b sono $\mathbb{Q}$-linearmente indipendenti, a questo scopo basterà provare che Z_K è generato, come gruppo abeliano, da 1 e b. Come visto sopra, ogni elemento a di Z_K si rappresenta come $(u + v\sqrt{d})/w$, dove $u, v \in \mathbb{Z}$ e $w \in \{1, 2\}$ e, se $w = 2$, u e v sono dispari. Allora $a = \lambda + \mu b$, dove $\mu = 2v/w$ e $\lambda = (u - v)/w$ sono interi, e questo prova il nostro asserto. Abbiamo così dimostrato:

Teorema 13.11. *Sia d un numero intero libero da quadrati diverso da 1, e sia $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Allora:*

(i) *se $d \not\equiv_4 1$, allora $Z_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ e $\{1, \sqrt{d}\}$ è una base intera di Z_K.*

(ii) *se $d \equiv_4 1$, allora $Z_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ e $\{1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\}$ è una base intera di Z_K.*

Un'esempio interessante: abbiamo visto nell'esempio 10.A.1 che l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ non è integralmente chiuso, quindi non è di Dedekind. Questo è in accordo con i risultati appena provati: l'anello degli interi algebrici di $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ è $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$, che è quindi integralmente chiuso, e non $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, che quindi non lo è. Allo stesso modo, qualsiasi sia l'intero d libero da quadrati e diverso da 1 ma

congruo a 1 modulo 4, l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è integralmente chiuso, avendo $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ come chiusura intera nel suo campo dei quozienti, e quindi non è fattoriale, per il corollario 10.10.

L'anello degli interi di Gauss Il primo anello di interi algebrici (diverso da $\mathbb{Z}$) ad essere studiato sistematicamente (da C.F. Gauss) è stato quello del campo $\mathbb{Q}[i]$, generato dall'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$. Poiché $-1 \not\equiv_4 1$, il teorema 13.11 mostra che quest'anello è $\mathbb{Z}[i]$, che prende il nome di *anello degli interi di Gauss*. Questo anello ha molte notevoli proprietà. Non solo è fattoriale, ma è addirittura euclideo: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, se $b \neq 0$ esistono $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $a = bq + r$ e $N_{\mathbb{Q}[i]}(r) < N_{\mathbb{Q}[i]}(b)$ (si veda, a proposito, l'esercizio 13.C.5). Si noti che l'unico automorfismo non identico in $\mathbb{Q}[i]$ è quello indotto dal coniugio complesso, quindi la norma di un qualsiasi elemento di $\mathbb{Q}[i]$ è la sua usuale norma complessa.

Esercizi. (Vanno affrontati tenendo ben presente il lemma 13.8).
13.C.1. Determinare gli elementi invertibili nell'anello degli interi algebrici di $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ nei casi $d = -1$ e $d = -3$.
13.C.2. Dimostrare che se d è un intero *negativo* libero da quadrati e diverso da -1 e -3, i soli elementi invertibili nell'anello degli interi algebrici di $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ sono 1 e -1.
13.C.3. Trovare infiniti elementi invertibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, l'anello degli interi di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Per farlo è sufficiente trovarne uno di periodo moltiplicativo infinito.
13.C.4. Trovare, in $\mathbb{Z}[i]$, un elemento di norma 2 e mostrare così che 2 non è irriducibile.
13.C.5. Attraverso semplici considerazioni geometriche sul piano complesso, provare che per ogni numero complesso z esiste $\zeta \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $N_{\mathbb{Q}[i]}(z - \zeta) \leq 1/2$ e dedurne che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, se $b \neq 0$ esistono $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $a = bq + r$ e $N_{\mathbb{Q}[i]}(r) \leq N_{\mathbb{Q}[i]}(b)/2 < N_{\mathbb{Q}[i]}(b)$, dunque, come affermato sopra, $\mathbb{Z}[i]$ è effettivamente un anello euclideo (si noti anche che tali q ed r non sono univocamente determinati da a e b).
13.C.6. Verificare che il quadrato di un numero intero è necessariamente congruo a 0 o a 1 modulo 4 e quindi $N_{\mathbb{Q}[i]}(a) \not\equiv_4 -1$ per ogni $a \in \mathbb{Z}[i]$. Dedurne che ogni numero intero positivo primo che sia congruo a -1 modulo 4 è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$.
13.C.7. Sia p un numero intero positivo primo che sia congruo a 1 modulo 4. Sapendo che, in questa ipotesi, esiste un intero $a \in \mathbb{Z}$ tale che $a^2 \equiv_p -1$ e che $\mathbb{Z}[i]$ è un anello fattoriale, provare che p non è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ (suggerimento: p divide $a^2 + 1 \ldots$).

13.4 Kummer e Dirichlet

Come già detto, gli anelli degli interi dei campi di numeri sono anelli di Dedekind dalla struttura non comune. Una loro proprietà di finitezza è già apparsa come corollario 13.9; un'altra è espressa da un famoso teorema di Ernst Kummer che ci limiteremo qui ad enunciare.

Il gruppo delle classi

Il *gruppo delle classi* (o 'delle classi di ideali') di un arbitrario un anello di Dedekind R è il quoziente $\mathfrak{F}(R)/\mathfrak{F}_P(R)$ del suo gruppo degli ideali frazionari modulo il sottogruppo costituito dagli ideali frazionari principali. Ricordando che per un anello di Dedekind le proprietà di essere fattoriale e quella di essere principale sono equivalenti (proposizione 12.13), possiamo considerare il gruppo delle classi di R come ciò che allontana R dall'essere fattoriale. Ad esempio: *un anello di Dedekind è fattoriale se e solo se il suo gruppo delle classi è identico.*

Già nel 1847 Kummer dimostrò un risultato che, tradotto nella terminologia moderna diventa:

Teorema 13.12. *Il gruppo delle classi dell'anello degli interi algebrici di un arbitrario campo di numeri è necessariamente finito.*

Questo è una delle pietre miliari nella storia della teoria dei numeri.

Un teorema di molto successivo, provato per la prima volta da L.E. Claborn nel 1966, mostra quanto la situazione sia diversa nel caso di anelli di Dedekind arbitrari:

Teorema 13.13. *Per ogni gruppo abeliano G esiste un anello di Dedekind R tale che $\mathfrak{F}(R)/\mathfrak{F}_P(R)$ sia isomorfo a G.*

Detto in altri (informali) termini: la struttura del gruppo delle classi di un generico anello di Dedekind è del tutto arbitraria.

Tornando al teorema di Kummer, esso mostra che, nel senso a cui si è accennato sopra, se K è un campo di numeri Z_K non è solo un anello di Dedekind, ma è un anello di Dedekind non lontanissimo dall'essere principale, ovvero fattoriale. Ad esempio, se $H \lhd Z_K$ ed il gruppo delle classi di K ha ordine ℓ (il che si esprime dicendo che il *numero delle classi* di K è ℓ), sappiamo per certo che H^ℓ è principale; se $\ell \leq 2$ e $I, J \lhd Z_K$, allora almeno uno tra I, J e IJ è principale; ovviamente $\ell = 1$ se e solo se Z_K è fattoriale. Molti risultati assolutamente non banali della teoria dei numeri dipendono da stime sul numero delle classi di specifici campi di numeri.

I risultati di carattere generale in questo ambito sono pochi e molto difficili da dimostrare. Tra essi il problema principale è quello di determinare quali campi di numeri abbiano anello degli interi fattoriale, vale a dire: numero delle classi 1. Le risposte sono così frammentarie che tuttora non è noto se esistano (ovviamente a meno di isomorfismi) infiniti campi di numeri con questa proprietà. Nel caso apparentemente più semplice, quello dei campi quadratici, il problema era addirittura già stato posto da Gauss e studiato quindi con impegno da molti matematici, tra i quali appunto Kummer, anche perché legato a tentativi di dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, ma solo nel 1966 si è riuscito a risolverne un importante caso determinando l'elenco dei numeri negativi liberi da quadrati d per i quali l'anello degli interi del campo $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (descritto nel teorema 13.11) sia fattoriale.[5] La corrispondente lista per il caso $d > 1$ (molto più difficile da trattare[6]) è certamente più lunga,[7] ma non si sa neanche se sia finita o infinita.

Il teorema degli invertibili di Dirichlet e il gruppo moltiplicativo di un campo di numeri

Un altro notevole teorema, provato nel 1846 da Dirichlet, mostra che il gruppo degli invertibili dell'anello degli interi di un campo di numeri è sempre finitamente generato. Vediamo come sia possibile dedurre da questo risultato la stuttura del gruppo moltiplicativo K^* di un campo di numeri K.

Ricordiamo, dalla sezione 12.1, l'omomorfismo di gruppi $\digamma : k \in K^* \mapsto kZ_K \in \mathfrak{F}(Z_K)$, e ricordiamo anche il corollario 13.2: $K = Q(Z_K)$. Abbiamo $\operatorname{im}\digamma = \mathfrak{F}_P(Z_K)$ e, come si vede facilmente, $\ker\digamma$ è il gruppo $\mathcal{U}(Z_K)$ degli invertibili di Z_K. Dunque, $K^*/\mathcal{U}(Z_K) \simeq \mathfrak{F}_P(Z_K)$. Ora, $\mathfrak{F}_P(Z)_K$ è un gruppo abeliano libero, in quanto sottogruppo del gruppo abeliano libero $\mathfrak{F}(R)$ (si vedano il corollario 12.8 e l'esercizio 11.D.2), quindi, per la proprietà proiettiva, l'estensione $\mathcal{U}(Z_K) \hookrightarrow K^* \twoheadrightarrow K^*/\mathcal{U}(Z_K)$ è spezzata e $K^* = \mathcal{U}(Z_K) \times F_0$ per un opportuno $F_0 \simeq \mathfrak{F}_P(Z_K)$. Ora, $\mathcal{U}(Z_K)$ è, per il teorema di Dirichlet, un gruppo abeliano finitamente generato, e la struttura di questi gruppi è nota: sono prodotti diretti di un gruppo finito C (quello costituito dagli elementi

[5] per soddisfare la curiosità: la lista è molto breve, contiene solo nove numeri: -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67 e -163. Il fatto che questa lista sia completa è noto come teorema di Baker-Stark-Heegner.

[6] un motivo è che mentre nel caso $d < 0$ tutti gli elementi non nulli hanno norma positiva, nel caso $d > 1$ appaiono anche elementi a norma negativa, e questo rende molto più facile risolvere le equazioni che capita di incontrare, come dovrebbero indicare gli esercizi 13.C.

[7] contiene 38 interi minori di 100, a cominciare da 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, ma, ad esempio, non 10 né 15 né 26.

periodici) per un gruppo abeliano libero di rango finito: $\mathcal{U}(Z_K) = C \times U_0$ (ma si legga anche oltre, a questo proposito). Ora C è un sottogruppo finito di K^* e, per un risultato elementare della teoria dei campi, i sottogruppi finiti dei gruppi moltiplicativi dei campi sono tutti ciclici. Dunque, C è ciclico. Posto $F = \langle U_0, F_0 \rangle = U_0 \times F_0$, abbiamo dunque che $K^* = C \times F$ è il prodotto diretto di un gruppo ciclico finito per il gruppo abeliano libero F. Resta da determinare il rango di F. Siccome $|K| = \aleph_0$, il rango di F è finito o numerabile. Se fosse finito, K^* sarebbe uno $\mathbb{Z}$-modulo noetheriano, quindi lo stesso varrebbe per il suo sottogruppo $\mathbb{Q}^*$, cosa che è evidentemente falsa.[8] Pertanto F ha rango numerabile. Quindi il tipo di isomorfismo di K^* è completamente descritto, a meno della determinazione della cardinalità del suo sottogruppo C. Si noti che C non è altro che il gruppo delle radici complesse dell'unità appartenenti a K, quindi può avere ordine arbitrariamente grande (ma comunque pari, perché $-1 \in C$ e -1 ha evidentemente periodo 2). Ad esempio, $\mathbb{Q}^*$ è il prodotto diretto (nel linguaggio della teoria dei gruppi; nel linguaggio della teoria dei moduli dovremmo dire: somma diretta) $\{1, -1\} \times \mathrm{Dr}_{p \in \mathbb{P}} \langle p \rangle$, dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri primi positivi; analogamente, se i è l'unità immaginaria, $\mathbb{Q}[i]^* = \langle i \rangle \times P$, dove $|\langle i \rangle| = 4$ e P è abeliano libero di rango numerabile.

Torniamo al teorema degli invertibili di Dirichlet. Questo risultato non si limita a dire che, con le notazioni che stiamo usando, $\mathcal{U}(Z_K)$ è finitamente generato, cioè della forma $C \times F_0$ per un gruppo abeliano libero F_0 di rango finito, ma fornisce anche il rango di F_0. Infatti, come abbiamo visto tra i richiami nella sottosezione 13.1.1, esistono esattamente n omomorfismi di campi da K a $\mathbb{C}$, dove $n = \dim_{\mathbb{Q}}(K)$. Se σ è uno di questi, componendo σ col coniugio complesso (che è un automorfismo di campi) otteniamo un omomorfismo $\sigma^* \colon k \mapsto \overline{k^\sigma}$ da K a $\mathbb{C}$, e $\sigma^* \neq \sigma$ a meno che l'immagine di σ non sia contenuta in $\mathbb{R}$. Si deduce facilmente da ciò che, detto r il numero degli omomorfismi di campi da K a $\mathbb{R}$, $n - r$ (cioè il numero degli omomorfismi da K a $\mathbb{C}$ con immagine non contenuta in $\mathbb{R}$) è un numero pari, che indichiamo con $2s$, dunque $n = r + 2s$. Ciò che il teorema di Dirchlet afferma è che, con le notazioni usate sopra, F_0 ha rango $r + s - 1$. In conclusione, il teorema degli invertibili stabilisce che, con le notazioni fissate, $\mathcal{U}(Z_K)$ è prodotto diretto di $r + s$ gruppi ciclici, uno (quello costituito dalle radici dell'unità in K) di ordine finito pari, tutti gli altri infiniti.

Ad esempio, e questo spiega alcuni dei risultati degli esercizi precedenti questa sezione, se $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ è un campo quadratico, $\mathcal{U}(Z_K)$ è finito e coincide col gruppo delle radici dell'unità in K se $d < 0$ (in questo caso si ha infatti $K \not\subseteq \mathbb{R}$, quindi $r = 0$ e $s = 1$), mentre $\mathcal{U}(Z_K) = \langle -1 \rangle \times U$ per un gruppo ciclico infinito U se $d > 1$; avendosi in questo caso $K \subseteq \mathbb{R}$, $r = 2$ e $s = 0$.

13.5 Fattorizzazioni di elementi e di ideali

Se K è un campo di numeri, nel suo anello degli interi Z_K ogni elemento non invertibile e non nullo a è prodotto di irriducibili, per il lemma 2.4, ma non, in generale in modo essenzialmente unico, non essendo Z_K necessariamente fattoriale. D'altra parte, essendo Z_K di Dedekind, l'ideale principale aZ_K generato da a è, a meno dell'ordine, prodotto in modo unico di ideali primi. Vogliamo qui far vedere, attraverso qualche esempio, come questa fattorizzazione in prodotto di ideali primi possa chiarire come fattorizzazioni 'essenzialmente diverse' di a (come elemento di Z_K) possano essere ricondotte alla fattorizzazioni di aZ_K (come ideale). Può essere interessante sapere che proprio questa possibilità di surrogare una inesistente fattorizzazione unica per numeri con una fattorizzazione unica in oggetti ad hoc da introdurre, suggerì a Kummer di lavorare

[8] ad esempio, questo segue facilmente dall'esistenza di infiniti numeri interi primi, da cui di deduce (in modo diretto) che $\mathbb{Q}^*$ non è finitamente generato. Alternativamente, usando il linguaggio che abbiamo sviluppato in queste note, $\mathbb{Q}^*$ ha un quoziente isomorfo a $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{F}_P(\mathbb{Z})$, che è libero sulla base, infinita, degli ideali massimali di $\mathbb{Z}$ (corollario 12.8).

su queste entità che lui battezzò 'numeri ideali', una nozione che più tardi Dedekind raffinerà trasformandola, ma conservandone parte del nome, nella moderna nozione di ideale.

Costruiremo i nostri esempi nel caso, il più semplice, di campi quadratici, che abbiamo discusso nella sezione 13.3. Continuiamo ad usare le notazioni introdotte lì: d è un intero libero da quadrati e diverso da 1 e $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$; chiamiamo poi σ, definito da $\sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$ l'automorfismo non identico di K e poniamo $Z_d := Z_K$.

In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Un ben noto caso in cui Z_d non è fattoriale è quello in cui $d = -5$. In questo caso $Z_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ perché $-5 \not\equiv_4 1$ e, in questo anello, 6 ha due fattorizzazioni:

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5});$$

I fattori 2, 3, $\alpha := 1 + \sqrt{-5}$ e $\alpha^\sigma = 1 - \sqrt{-5}$ che appaiono in queste due fattorizzazioni hanno norme (rispetto a K), rispettivamente, 4, 9, 6, 6, dunque, nessuno di essi è invertibile in R. Per mostrare che essi sono tutti irriducibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ basta, per il lemma 13.8 (vi), verificare che non esiste alcun $c \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tale che $N_K(c)$ sia un divisore non banale (in $\mathbb{Z}$) di una delle loro norme: 4, 6 o 9. Scelti comunque $u, v \in \mathbb{Z}$, l'elemento $c = u + v\sqrt{-5}$ di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ha norma $N_K(c) = u^2 + 5v^2$, che non può essere negativo ed è o un quadrato perfetto ($N_K(c) = u^2$ se $v = 0$, cioè se $c \in \mathbb{Z}$) oppure un intero maggiore di 4. Questo esclude che $|N_K(c)|$ possa essere 2 oppure 3. È allora verificata la condizione richiesta, quindi 2, 3, α e α^σ, sono effettivamente tutti irriducibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Dal confronto delle norme (e usando la parte (v) del lemma 13.8) sappiamo anche che né 2 né 3 è associato ad uno tra α e α^σ. Concludiamo che le due fattorizzazioni $2 \cdot 3$ e $\alpha\alpha^\sigma$ di 6 sono fattorizzazioni essenzialmente distinte in prodotti di irriducibili, dunque $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non è fattoriale. Più precisamente, abbiamo mostrato che $2, 3$ e α (e quindi α^σ) sono irriducibili ma non primi in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: ciascuno di essi divide 6, che però si può scrivere come prodotto di due elementi non multipli di quello prefissato.

D'altra parte $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è di Dedekind, esiste allora una fattorizzazione (unica, a meno dell'ordine) dell'ideale $6\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ in prodotto di ideali primi; vediamo come determinare questa fattorizzazione. Poniamo, per brevità, $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Essendo $6R = 2R \cdot 3R$, basterà fattorizzare separatamente $2R$ e $3R$. Come già osservato, né 2 né 3 sono elementi primi in R, quindi anche gli ideali $2R$ e $3R$ non sono primi; per fattorizzarli conviene innanzitutto individuare i loro (ideali) divisori primi, cioè gli elementi delle loro varietà.

Iniziamo da $2R$. Sia $J \in \mathrm{Var}(2R)$. Sappiamo dalla proposizione 13.10 che $|R/2R| = |N_K(2)| = 4$.[9] Essendo $2R \subset J \subset R$, se ne ricava $|R/J| = |J/2R| = 2$. Ora, poiché J è primo e $\alpha\alpha^\sigma \in J$, almeno uno tra α e α^σ è in J. Ma $\alpha + \alpha^\sigma = 2 \in J$, quindi poiché uno tra α e α^σ è in J anche l'altro è in J. In conclusione $\alpha \in J$, ma, essendo $\alpha \notin 2R$, (come mostra il calcolo diretto: gli elementi di $2R$ hanno la forma $u + v\sqrt{-5}$ dove u e v sono interi pari; oppure, in alternativa: altrimenti $N_K(2)$ dividerebbe $N_K(\alpha)$) e $|J/2R| = 2$, si deve avere $J = 2R + \alpha R$. Dunque $\mathrm{Var}(2R)$ ha al massimo un elemento, poiché $\mathrm{Var}(2R) \neq \varnothing$ si arriva a concludere che $P := 2R + \alpha R = (2, \alpha)$ è l'unico elemento di $\mathrm{Var}(2R)$, cioè l'unico divisore primo di $2R$. Questo equivale a dire che $2R$ è una potenza di P. Posto $2R = P^\lambda$ per un $\lambda \in \mathbb{N}^+$, dal corollario 12.25 traiamo poi $4 = |R/2R| = |R/P|^\lambda$ e quindi $\lambda = 2$. Pertanto $2R = P^2$.[10]

In modo analogo si può ragionare per $3R$, che ha indice $|N_K(3)| = 9$. Se $J \in \mathrm{Var}(3R)$, allora $3R \subset J \subset R$, quindi $|R/J| = |J/3R| = 3$; inoltre da $\alpha\alpha^\sigma \in J$ segue che uno tra α e α^σ è in J. Questa volta abbiamo $\alpha + \alpha^\sigma = 2 \notin J$, infatti $3 \in J$ e se anche 2 fosse in J allora J conterrebbe $1 = 3 - 2$. Pertanto J contiene esattamente uno tra α e α^σ. Se $\alpha \in J$ allora $J = Q := (3, \alpha)$,

[9] si noti che, benché non nel caso generale, abbiamo dimostrato questa proposizione nel caso in cui K sia un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$, quindi certamente nel caso che stiamo trattando, perché i campi quadratici sono estensioni di Galois di $\mathbb{Q}$.

[10] può anche essere istruttiva una verifica diretta: $P^2 = (4, 2\alpha, \alpha^2)$, ma $\alpha^2 = -4 + 2\sqrt{-5} = 2\alpha - 6$, quindi $P^2 = (4, 6, 2\alpha) = (2, 2\alpha) = 2R$.

perché $|J/3R| = 3$ e $\alpha \notin 3R$; analogamente, se $\alpha \notin J$, cioè $\alpha^\sigma \in J$, si ha $J = (3, \alpha^\sigma) = Q^{\vec\sigma} \neq Q$. Allora $\mathrm{Var}(3R) \subseteq \{Q, Q^{\vec\sigma}\}$. Dal momento che Q e $Q^{\vec\sigma}$ sono uno immagine dell'altro mediante un automorfismo di R (quello indotto da σ), essi sono entrambi primi o entrambi non primi. Essendo $\mathrm{Var}(3R) \neq \varnothing$ si deve verificare il primo caso, quindi $\mathrm{Var}(3R) = \{Q, Q^{\vec\sigma}\}$. Infine, $3R \subseteq Q \cap Q^{\vec\sigma} = QQ^{\vec\sigma}$ (infatti Q e Q^σ sono distinti, quindi comassimali) e da $|R/Q| = |R/Q^{\vec\sigma}| = 3$ segue $|R/QQ^{\vec\sigma}| = 9 = |R/3R|$, quindi $3R = QQ^{\vec\sigma}$.

Abbiamo così trovato la fattorizzazione di $6R$ come prodotto di ideali primi in R:

$$6R = 2R3R = P^2QQ^{\vec\sigma}.$$

Le due fattorizzazioni di 6 come prodotto di elementi irriducibili di R, quelle da cui eravamo partiti, si ricavano da questa fattorizzazione di $6R$. Infatti, come visto, $P^2 = 2R$ e $QQ^{\vec\sigma} = 3R$ (il che ci mostrerebbe, se ce ne fosse bisogno, che $6R = 2R \cdot 3R$ e quindi $2 \cdot 3$ è associato a 6) ma abbinando diversamente i fattori, possiamo scrivere $6R$ come $(PQ)(PQ^{\vec\sigma})$. Con argomentazioni simili a quelle svolte sopra, da $\alpha R \subseteq P \cap Q = PQ$ e $|R/PQ| = |R/P||R/Q| = 6 = |R/\alpha R|$ otteniamo $PQ = \alpha R$ e quindi $PQ^{\vec\sigma} = (PQ)^{\vec\sigma} = \alpha^\sigma R$, che da sole avrebbero già mostrato che 6 è associato al prodotto $\alpha\alpha^\sigma$.

Vediamo infine che i soli divisori di 6 in R sono quelli che si riconoscono immediatamente dalle due fattorizzazioni di 6 date in partenza, cioè due divisori banali: 1 e 6, quattro irriducibili: 2, 3, α e α^σ ed i loro altri associati (che in questo caso sono gli opposti perché $\mathcal{U}(R) = \{1, -1\}$, come segue da un semplice calcolo di norme, cioè dall'esercizio 13.C.2).

Compariamo due metodi per affrontare il problema dell'identificazione dei divisori non banali. Il primo consiste nel lavorare sulle norme degli elementi: se $6 = ab$ per opportuni $a, b \in R \setminus \mathcal{U}(R)$, allora $N_K(a)N_K(b) = N_K(6) = 36$; risolvendo equazioni diofantee[11] si possono elencare tutti gli elementi c tali che $N_K(c)$ sia un divisore non banale di 36 in $\mathbb{Z}$; a e b sono tra questi elementi c. Un inconveniente di questo metodo non tutti gli elementi c ricavati dalle equazioni diofantee sono effettivamente divisori.[12] Ad esempio, scrivendo $c = u + v\sqrt{-5}$ dove $u, v \in \mathbb{Z}$, l'equazione $N_K(c) = 9$ si scrive come $u^2 + 5v^2 = 9$, e questa equazione diofantea in u e v ha sei soluzioni: le due date da $|u| = 3$ e $v = 0$ e le quattro date da $|u| = 2$ e $|v| = 1$. Di queste, solo le prime due danno luogo a divisori di 18 in R, cioè 3 e -3, le altre forniscono gli elementi della forma $\pm 2 \pm \sqrt{-5}$ che, come si verifica con calcolo diretto, non dividono 6.

Non ha lo stesso inconveniente il secondo metodo, spesso preferibile, che utilizza la fattorizzazione degli ideali. Se, come sopra $a, b \in R \setminus \mathcal{U}(R)$ e $6 = ab$, allora, $6R = (aR)(bR)$ e quindi, per l'unicità della fattorizzazione in ideali primi, sia aR che bR sono prodotti di alcuni tra P, Q e $Q^{\vec\sigma}$. Nessuno di questi tre ideali è principale (se uno di essi lo fosse, allora un suo generatore dovrebbe essere un divisore non banale di quello tra 2 e 3 che gli appartiene, ma 2 e 3 sono irriducibili), quindi $aR = XY$ e $bR = ZV$ dove $\{X, Y, Z, V\} = \{P, Q, Q^{\vec\sigma}\}$ e P appare due volte tra X, Y, Z e V. È così chiaro che aR è uno tra $P^2 = 2R$, $P^2 = 2R$, $QQ^{\vec\sigma} = 3R$ e $PQ^{\vec\sigma} = \alpha^\sigma R$, vale a dire: a è associato ad uno tra 2, 3, α e α^σ, come richiesto (e ovviamente lo stesso vale per $b = 6/a$).

In $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$. Vediamo ora un esempio simile, ma con qualche interessante differenza. Poniamo $d = -17$ (ancora congruo a -1 modulo 4), quindi ora $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-17}]$ e $R := Z_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$, e inoltre $\alpha = 1 + \sqrt{-17}$. In R il numero 18 ha le fattorizzazioni:

$$2 \cdot 3^2 = \alpha\alpha^\sigma$$

[11] queste equazioni diofantee sono ragionevolmente facili da risolvere nel caso qui in esame ed in altri casi simili per anelli di interi di campi quadratici definiti da valori di d negativi (e ragionevolmente piccoli in valore assoluto). Sono invece molto difficili da affrontare per valori positivi di d, per i quali questo metodo va in linea di massima scartato.

[12] in altri termini: la condizione che $N_K(c)$ divida $N_K(6)$ in $\mathbb{Z}$ non garantisce che c divida 6 in K.

(σ ha il significato fissato all'inizio di questa sezione). Ragionando (quasi) come per $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, possiamo verificare che 2, 3 e α (e quindi α^σ) sono irriducibili. Infatti se $u, v \in \mathbb{Z}$ e $c = u+v\sqrt{-17}$, la norma $N_K(c) = u^2 + 17v^2$, è o u^2, se $v = 0$, oppure un intero maggiore di 16, quindi non può dividere se non banalmente una delle norme (4, 9) di 2 e 3. Il caso di α richiede un minimo di attenzione in più, perché $18 = N_K(\alpha)$ è divisibile per 9, che è una possibile norma. Ma 9 è l'unica possibile norma tra i divisori non banali di 18 in $\mathbb{Z}$, quindi se c fosse un divisore non banale di α in R, allora $N_K(c) = 9$ e α/c sarebbe un elemento di K di norma $2 = N_K(\alpha)/N_K(c)$, cosa che sappiamo essere impossibile. Quindi anche α e α^σ sono irriducibili. Abbiamo così, due fattorizzazioni in prodotto di irriducibili *con numeri diversi di fattori*: 18 si fattorizza sia come prodotto di due che come prodotto di tre elementi irriducibili in R.

Fattorizziamo l'ideale $18R = (2R)(3R)^2$. Argomentazioni strettamente analoghe a quelle svolte per gli ideali di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mostrano che $2R$ ha un solo divisore primo, cioè $P := (2, \alpha)$, quindi è il quadrato di questo, e $3R$ è il prodotto dei suoi due divisori primi: $Q := (3, \alpha)$ e $Q^{\vec\sigma} = (3, \alpha^\sigma)$. La conclusione è che $18\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ si fattorizza come:

$$18\mathbb{Z}[\sqrt{-17}] = P^2Q^2(Q^{\vec\sigma})^2.$$

Anche in questo caso possiamo ricavare l'elenco dei divisori di 18 in R a partire dalla fattorizzazione di $18R$ appena ottenuta. Ovviamente, i divisori di 18 in R sono i $c \in R$ tali che cR sia un divisore di $18R$ in $\mathfrak{I}^*(R)$. Sia J un ideale di R divisore di $18R$. Allora, ancora per l'unicità della fattorizzazione, $J = P^iQ^j(Q^{\vec\sigma})^k$ per opportuni $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$. Per il corollario 12.25, abbiamo anche $|R/J| = 2^i3^{j+k}$. Il problema che va affrontato è quello di determinare le terne (i, j, k) per le quali J sia principale. Per iniziare, identifichiamo αR. Abbiamo $|R/\alpha R| = N_K(\alpha) = 18$, quindi se $J = \alpha R$ allora $18 = 2^i3^{j+k}$, cioè: $i = 1$ e $j + k = 2$. Ora, $\alpha \in Q$, quindi Q divide αR e così $j > 0$. D'altra parte, come nell'esempio precedente, poiché $3 \in Q \neq R$, certamente $2 = \alpha + \alpha^\sigma \notin Q$, allora $\alpha^\sigma \notin Q$ e quindi $\alpha = \alpha^{\sigma^2} \notin Q^{\vec\sigma}$, vale a dire: $k = 0$. Pertanto $\alpha R = PQ^2$.

Procedere come nell'esempio precedente relativo a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è possibile, ma laborioso (chi legge è comunque incoraggiato a provarci); seguiamo una strada un po' diversa, ragionando sul gruppo delle classi $G = \mathfrak{F}(R)/\mathfrak{F}_P(R)$.

Detto $\varepsilon\colon \mathfrak{F}(R) \twoheadrightarrow G$ l'epimorfismo canonico, ovviamente il nostro generico ideale J è principale se e solo se $J^\varepsilon = 1_G$. Ora, sappiamo che è principale $P^2 = 2R$ ma non P (infatti l'indice, 2, di P non è la norma di alcun elemento di R); questo significa che P^ε ha periodo 2 nel gruppo G. Sono inoltre principali $QQ^{\vec\sigma} = 3R$ e $PQ^2 = \alpha R$; questo mostra che $(Q^{\vec\sigma})^\varepsilon = (Q^\varepsilon)^{-1}$ e $P^\varepsilon = (Q^\varepsilon)^2$; di conseguenza Q^ε ha periodo 4. Se ne ricava che $J^\varepsilon = (P^iQ^j(Q^{\vec\sigma})^k)^\varepsilon = (Q^\varepsilon)^{2i+j-k}$, che vuol dire: J è principale se e solo se $2i + j - k$ è multiplo di 4. Questa condizione equivale a richiedere che o i è pari e $j \equiv_4 k$, oppure i è dispari e $j \equiv_4 k + 2$. Ma $0 \leq i, j, k \leq 2$, quindi la condizione si riduce a: $i \in \{0, 2\}$ e $j = k$, oppure $i = 1$ e $\{j, k\} = \{0, 2\}$. Abbiamo dunque esattamente otto ideali principali divisori di $18R$, quelli riportati in questa tabella in corrispondenza dei possibili valori di i e j (che determinano k):

i \ j	0	1	2
0	R	$3R$	$9R$
1	$\alpha^\sigma R$		αR
2	$2R$	$6R$	$18R$

In conclusione, a meno di associati 18 ha in R esattamente otto divisori (i generatori degli ideali principali elencati). Poiché $\mathcal{U}(R) = \{1, -1\}$, ciascun elemento di R ha esattamente due associati (sé stesso ed il suo opposto) e quindi in totale i divisori di 18 in R sono sedici: i suoi sei divisori in $\mathbb{N}$ (1, 2, 3, 6, 9 e 18), α, α^σ ed i loro opposti.

Possiamo comparare quanto ora fatto lavorando in $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ con la discussione analoga, ma più semplice relativa a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Una ragione di questa maggiore semplicità è il fatto che, in un certo senso, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è più vicino all'esser fattoriale di quanto non sia $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$, perché il gruppo delle classi di $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ ha cardinalità 2, mentre il gruppo delle classi di $\mathbb{Q}[\sqrt{-17}]$ risulta essere ciclico di ordine 4; questo significa che ideali non principali appaiono con maggior frequenza in $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ di quanto non capiti in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, come i calcoli appena svolti mostrano.

In $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Facciamo ancora un esempio, anche se in minor dettaglio, illustrando come si possa lavorare nel caso in cui l'intero d sia positivo, cioè quando il nostro campo quadratico $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ sia contenuto in $\mathbb{R}$. Il più piccolo intero positivo per il quale Z_K non sia fattoriale è 10; poniamo dunque $d = 10$ e $K = \mathbb{Q}[\sqrt{10}]$. Abbiamo naturalmente $Z_K = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

Posto $\alpha = 1+\sqrt{10}$, abbiamo $N_K(\alpha) = -9$ e quindi $3^2 = 9 = (-\alpha)\alpha^\sigma$. Come nei casi precedenti, i fattori coinvolti in questa doppia decomposizione di 9 sono tutti irriducibili. Qui l'argomentazione sulle norme non è così diretta come nei casi precedenti, perché, come visto appunto nel caso di α, la norma di un elemento $c = u + v\sqrt{10}$ di $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, cioè $N_K(c) = u^2 - 10v^2$ può anche essere negativa; come sempre stiamo assumendo $u, v \in \mathbb{Z}$. Possiamo comunque escludere l'esistenza di elementi di norma 3 o -3. Infatti $N_K(c) \equiv_{10} u^2$, e nessun intero ha quadrato congruo a 3 o a -3 modulo 10 (in altri termini, né $[3]_{10}$ né $[-3]_{10}$ sono quadrati in $\mathbb{Z}_{10}$). Grazie al lemma 13.8 (vi), questo ci permette di concludere che sia 3 che α sono irriducibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Che 3 non divida α né α^σ si può verificare direttamente (i multipli di 3 in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ hanno la forma $u + u\sqrt{10}$ per opportuni $u, v \in 3\mathbb{Z}$), quindi le due fattorizzazioni di 9 date sono essenzialmente diverse. Ora, $3\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ ha indice 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ e contiene $-9 = \alpha\alpha^\sigma$, quindi ragionando come fatto per $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ vediamo che $(3, \alpha)$ e $(3, \alpha^\sigma)$ sono i due divisori primi di $3\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, dunque $3\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = (3, \alpha)(3, \alpha^\sigma)$. La decomposizione dell'ideale generato da 9 è dunque:

$$9\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = (3, \alpha)^2(3, \alpha^\sigma)^2;$$

si ha poi $\alpha\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = (3, \alpha)^2$ e quindi $\alpha^\sigma\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = (3, \alpha^\sigma)^2$; il che rende conto delle due fattorizzazioni distinte di 9 da cui eravamo partiti. Si verifica anche, tramite la fattorizzazione di $9\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ che 9 non ha, in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, divisori non banali se non 3, α, α^σ ed i loro associati.

Esercizi.

13.D.1. Analogamente a quanto fatto in una nota a piè di pagina, verificare direttamente, lavorando sui generatori, le uguaglianze tra ideali ottenute per altra via nei paragrafi precedenti (come, ad esempio, la fattorizzazione $3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = QQ^{\vec{\sigma}}$ nel primo degli esempi).

13.D.2. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, ricavata la fattorizzazione di $9\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ come prodotto di ideali primi (immediata da quella, già calcolata, di $3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$), trovare tutte le fattorizzazioni di 9 come prodotto di irriducibili.

13.D.3. Sia d un numero intero negativo libero da quadrati. Imitando i ragionamenti svolti sopra, provare che

- se $d \not\equiv_4 1$, allora ogni numero naturale primo minore di $-d$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;
- se $d \equiv_4 -1$, allora 2 non è primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, e in quest'anello l'ideale (2) è il quadrato dell'ideale primo $(2, 1 + \sqrt{d})$.

13.D.4. In $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$:

- trovare qualche elemento invertibile di periodo moltiplicativo infinito;
- decomporre in prodotto di ideali primi l'ideale generato da 2 e dedurre da questa decomposizione tutte le fattorizzazioni di 4 (a meno di associati) in prodotto di elementi irriducibili.

14 Appendice: argomenti vari

14.1 Condizione minimale e condizione massimale per insiemi ordinati

Sia $(S, \preccurlyeq)$ un insieme ordinato. Si dice che $(S, \preccurlyeq)$ verifica la *condizione minimale* se e solo se $\prec$ verifica una di queste condizioni, tra loro equivalenti:

(i) ogni parte non vuota di S ha elementi minimali rispetto a $\preccurlyeq$;[1]
(ii) ogni catena in $(S, \preccurlyeq)$ è ben ordinata;
(iii) ogni catena non vuota in $(S, \preccurlyeq)$ ha minimo;
(iv) ogni successione decrescente da $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(S, \preccurlyeq)$ è definitivamente costante, vale a dire: ha immagine finita;[2]
(v) non esistono successioni strettamente decrescenti da $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(S, \preccurlyeq)$.

Il fatto che queste condizioni siano effettivamente equivalenti tra loro è molto semplice da provare; l'unica implicazione forse non totalmente ovvia è quella da (v) a (i), che si può verificare così: se una parte non vuota X di S non ha elementi $\preccurlyeq$-minimali si può definire ricorsivamente una successione strettamente decrescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, a valori in X, scegliendo a_0 in modo arbitrario in X e, supposto (per un arbitrario $n \in \mathbb{N}$) definito $a_n \in X$, scegliendo come a_{n+1} un qualsiasi elemento di X tale che $a_{n+1} \prec a_n$; un tale elemento esiste certamente altrimenti a_n sarebbe minimale in $(X, \preccurlyeq)$. Ciò prova che la negazione di (i) implica la negazione di (v).

Si definisce in modo duale la *condizione massimale*: dire che $(S, \preccurlyeq)$ verifica la condizione massimale significa dire che l'insieme ordinato duale $(S, \succcurlyeq)$ verifica la condizione minimale, ovvero che $(S, \preccurlyeq)$ verifica queste condizioni, tra loro equivalenti:

(i) ogni parte non vuota di S ha elementi massimali rispetto a $\preccurlyeq$;
(ii) ogni catena non vuota in $(S, \preccurlyeq)$ ha massimo;
(iii) ogni successione crescente da $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(S, \preccurlyeq)$ è definitivamente costante;
(iv) non esistono successioni strettamente crescenti da $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(S, \preccurlyeq)$.

Ci si riferisce informalmente a ciascuna delle due condizioni minimale e massimale appena definite, come ad una 'condizione di catena'.

È ovvio che tutti gli insiemi ordinati finiti verificano sia la condizione minimale che la condizione massimale (ma non vale il viceversa: qualsiasi insieme, ordinato dalla relazione di uguaglianza, verifica sia la condizione minimale che quella massimale), che ogni sottoinsieme ordinato[3] di un insieme ordinato che verifichi una condizione di catena verifica la stessa condizione, che gli insiemi ben ordinati siano precisamente gli insiemi totalmente ordinati a condizione minimale. Sono esempi di insiemi ordinati a condizione minimale quelli dei naturali ordinati dall'ordinamento naturale o per divisibilità.

Lo studio delle strutture in cui insiemi di sottostrutture, ordinati per inclusione dei sostegni, verifichino una condizione di catena è di grande importanza in quasi ogni settore dell'algebra.

[1] vale a dire; $\preccurlyeq$ è una relazione ben fondata.
[2] in termini ancora più espliciti, dire che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante significa che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n+t} = a_n$ per ogni $t \in \mathbb{N}$.
[3] cioè ordinato dal'ordinamento indotto.

14.2 Anelli booleani e teorema di Stone

Un anello prebooleano è, per definizione, un anello in cui ogni elemento è idempotente; un anello booleano è un anello prebooleano unitario. Ovvio (e, come si vedrà, assolutamente tipico) esempio di anello booleano è l'anello $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ delle parti di un insieme S; un altro esempio è il campo di ordine 2, che si può comunque ricondurre all'esempio precedente, essendo isomorfo all'anello delle parti di un singleton.

Gli anelli prebooleani rientrano a buon diritto in questa trattazione per via del seguente risultato, elementare ma fondamentale.

Proposizione 14.1. *Sia R un anello prebooleano. Allora R è commutativo e, se non nullo, ha caratteristica 2.*

Dimostrazione. Per ogni $a, b \in R$ si ha $a + b = (a + b)^2$, per la definizione di anello prebooleano, ma d'altra parte $(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2$. Dunque, usando ancora l'idempotenza degli elementi di R, $a + b = a + ab + ba + b$, da cui $0_R = ab + ba$. Abbiamo provato che $ab = -ba$ per ogni $a, b \in R$. Nel caso in cui $a = b$ questa identità fornisce $a^2 = -a^2$, vale a dire $a = -a$, ovvero $2a = 0_R$. Ciò mostra che R ha caratteristica 2, a meno che R non sia nullo. L'identità $ab = -ba$ provata in precedenza, insieme all'osservazione, appena fatta, che ogni elemento di R coincide col suo opposto prova che R è commutativo. □

Altre facili conseguenze della definizione mostrano che la divisibilità negli anelli prebooleani ha proprietà piuttosto peculiari.

Lemma 14.2. *Sia R un anello prebooleano, e siano $a, b \in R$. Allora:*

(i) $a|_R b \iff b = ab$. *Dunque a e b sono associati in R se e solo se $a = b$;*
(ii) *la relazione di divisibilità in R è una relazione d'ordine;*
(iii) $aR \cap bR = abR$ *e* $aR + bR = (ab+a+b)R$. *Dunque, in R, ab e $ab+a+b$ sono, rispettivamente, l'unico minimo comune multiplo e l'unico massimo comun divisore tra a e b;*
(iv) *l'insieme $\mathfrak{I}_P(R)$ degli ideali principali costituisce un sottoreticolo del reticolo $(\mathfrak{I}(R), \subseteq)$ degli ideali di R;*
(v) *ogni ideale finitamente generato di R è principale.*

Dimostrazione. Se esiste $c \in R$ tale che $b = ac$, allora $ab = a^2c = ac = b$; dunque a divide b se e solo se $ab = b$. Se poi a e b sono associati, quanto appena provato mostra $b = ab = a$. È così provata la (i), la cui seconda parte mostra che la relazione $|_R$ di divisibilità è antisimmetrica. Essa è ovviamente transitiva ed è anche riflessiva, da momento che $a = a^2$ per ogni $a \in R$. Vale dunque (ii). Se $m \in aR \cap bR$, allora $m = am = bm$, per la (i), quindi anche $abm = am = m$, pertanto $aR \cap bR = abR$. Inoltre, se $d = ab + a + b$, allora $ad = a^2b + a^2 + ab = 2ab + a = a$, utilizzando la proposizione 14.1, e similmente $bd = b$, quindi $aR + bR \subseteq dR$; poiché l'altra inclusione è ovvia abbiamo $aR + bR = dR$. Da queste uguaglianze segue anche, con i metodi discussi nella sezione 3.4, che ab e d sono un minimo comune multiplo ed un massimo comun divisore tra a e b; gli unici perché, come visto in (i), la relazione di essere elementi associati è l'identità in R. Abbiamo provato anche (iii); sia (iv) che (v) ne sono immediate conseguenze. □

Come stiamo per provare, le proprietà di essere primario, primo o massimale coincidono per anelli prebooleani. Osserviamo preliminarmente l'ovvio fatto che tutti i quozienti degli anelli prebooleani (risp. booleani) sono prebooleani (risp. booleani) ed semplice lemma. Segue dal lemma 4.6 che, in un anello unitario, ogni idempotente diverso dall'unità è un divisore dello zero. Questo continua ad esser vero in anelli non unitari.

Lemma 14.3. *Sia e un elemento idempotente in un anello commutativo R. Se e è cancellabile, allora R è unitario e $e = 1_R$.*

Dimostrazione. Per ogni $r \in R$ si ha $er = e^2 r = e(er)$ e quindi, essendo e cancellabile, $r = er$; ciò mostra che e è l'unità di R, come richiesto dall'enunciato. □

Proposizione 14.4. *Per un ideale H di un anello prebooleano R le seguenti proprietà sono equivalenti:*
(i) *H è primario in R;*
(ii) *H è primo in R;*
(iii) *H è massimale in R;*
(iv) *$|R/H| = 2$;*
(v) *$|R/H| \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Dimostrazione. Sia $\bar{R} = R/H$; allora $\bar{R}$ è prebooleano. Se H è primario, $\bar{R}$ non è nullo e ogni divisore dello zero a in $\bar{R}$ è nilpotente. Ma, essendo, $a = a^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, questo comporta $a = 0_{\bar{R}}$. Dunque, $\bar{R}$ è un dominio di integrità, vale a dire: H è primo. Se invece supponiamo H primo, allora $\bar{R}$ è un dominio di integrità prebooleano. Il lemma 14.3 mostra che l'unico elemento non nullo di $\bar{R}$ è l'unità di $\bar{R}$, pertanto $\bar{R} \simeq \mathbb{Z}_2$. Dunque, (ii) implica (v). Ricordando che gli ideali massimali sono tutti primari, è poi ovvio che valgono le implicazioni (v) ⇒ (iv) ⇒ (iii) ⇒ (i); a questo punto la dimostrazione è completa. □

Segue dalla proposizione 14.1 che ogni anello prebooleano è, in modo naturale, una $\mathbb{Z}_2$-algebra. La corrispondente algebra accresciuta è un anello booleano:

Proposizione 14.5. *Sia R un anello prebooleano. Allora l'algebra accresciuta $R \rtimes \mathbb{Z}_2$ è un anello booleano. Dunque, ogni anello prebooleano si immerge come ideale massimale in un anello booleano.*

Dimostrazione. Sia $B = R \rtimes \mathbb{Z}_2$, un anello unitario. Allora $B = R + \{0_B, 1_B\}$, quindi ogni elemento di $B \smallsetminus R$ ha la forma $b = r + 1_B$ per un opportuno $r \in R$, e dunque verifica $b^2 = (r+1_B)^2 = r^2 + 2r + 1_B = r + 1_B = b$, per la proposizione 14.1. Ciò mostra che B è booleano. □

Lemma 14.6. *Sia R un anello prebooleano. Allora* $\mathrm{Jac}(R) = 0$.

Dimostrazione. Se R è booleano, $\mathcal{U}(R) = \{1_R\}$ per il lemma 14.3, quindi $\mathrm{Jac}(R) = 0$ per il corollario 3.19. Nel caso generale, la proposizione 14.5 mostra che R è un ideale massimale di un anello booleano B. Sia M un ideale massimale di B distinto da R. Poiché $|B/M| = 2$ e $R \cap M \neq R$, si ha $|R/R \cap M| = |R + M/M| = 2$, quindi $R \cap M \lhd\cdot R$. Ora, per quanto sopra, $0 = \mathrm{Jac}(B) = R \cap (\bigcap\{M \mid R \neq M \lhd\cdot B\}) = \bigcap\{R \cap M \mid R \neq M \lhd\cdot B\}$, quindi $\mathrm{Jac}(R) = 0$. □

Esercizi ed un esempio.
14.A.1. Verificare che, in ogni anello prebooleano, tutti gli ideali decomponibili (in intersezione di primari) hanno indice finito. Dedurne che ogni anello prebooleano noetheriano è finito (e quindi booleano).
14.A.2. Verificare che, a meno di isomorfismi, il campo $\mathbb{Z}_2$ è l'unico anello prebooleano che sia integro e non nullo.
14.A.3. Sia R un anello prebooleano. Dedurre dal lemma 14.6 che in R vale la stessa conclusione del teorema di Krull sull'ideale massimale: ogni ideale proprio è contenuto in un ideale massimale.
14.A.4. Provare che in un anello prebooleano ogni ideale coincide col proprio radicale e dedurne sia il lemma 14.6 che l'esercizio 14.A.3.
14.A.5. Sia R un anello booleano. Provare che ogni ideale principale di R è un sommando diretto ed un anello booleano...

i) ... come conseguenza del lemma 4.6 (o dell'esercizio 4.C.3);
ii) ... verificando che $R = aR \oplus (1_R + a)R$, per ogni $a \in R$.

14.A.6. Sia S un insieme infinito. Verificare che $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ è un ideale non principale di $\mathcal{P}(S)$ e che, come anello, esso è prebooleano ma non booleano.

14.A.7. Sia S un insieme infinito. L'insieme P delle parti di S che siano finite o cofinite (cioè con complemento finito in S) è un sottoanello unitario di S (verificarlo), quindi un anello booleano. Se S è numerabile, anche P è numerabile, quindi P non è isomorfo all'anello delle parti di alcun insieme.

14.A.8. Provare che se R è un anello booleano e $M \lhd\cdot R$, allora (M è un anello prebooleano e) R è isomorfo all'algebra accresciuta $M \rtimes \mathbb{Z}_2$. Dedurne che con le notazioni dell'esempio 14.A.7 l'anello P è isomorfo all'algebra accresciuta definita da $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$.

14.2.1 Il teorema di Stone

Nella sua forma più debole, il teorema di rappresentazione di Stone stabilisce che ogni anello booleano è isomorfo ad un sottoanello unitario dell'anello delle parti di un opportuno insieme. Di per sé questo risultato è piuttosto facile da provare.

Lo si può fare a partire dall'osservazione che l'anello delle parti di un insieme è isomorfo ad un prodotto diretto di copie del campo $\mathbb{Z}_2$. Infatti, per ogni insieme S la familiare biezione $\mathcal{P}(S) \to \mathbb{Z}_2^S$ che ad ogni parte di S associa la sua funzione caratteristica, qui considerata come funzione a valori in $\mathbb{Z}_2$, è, come è semplice verificare, un isomorfismo di anelli se $\mathbb{Z}_2^S$ è munito della struttura di anello di funzioni definita nella sezione 4.2; in questo consiste l'esercizio 4.B.2. Dunque

$$(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap) \simeq \mathbb{Z}_2^S = \prod_{x \in S} \mathbb{Z}_2. \tag{$*$}$$

Sia ora R un anello prebooleano, e indichiamo con $\mathcal{M}$ lo spettro di R, che, per la proposizione 14.4, è l'insieme dei suoi ideali massimali. L'omomorfismo di anelli unitari

$$\theta \colon x \in R \longmapsto (x + M)_{M \in \mathcal{M}} \in \prod_{M \in \mathcal{M}} R/M,$$

del tipo discusso nel lemma 4.10, ha per nucleo $\bigcap \mathcal{M} = \operatorname{Jac}(R)$, quindi il lemma 14.6 mostra che θ è un monomorfismo. Sapendo dalla proposizione 14.4 che $R/M \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $M \in \mathcal{M}$ ed utilizzando l'isomorfismo in ($*$) otteniamo un monomorfismo $\mu \colon R \rightarrowtail (\mathcal{P}(\mathcal{M}), \triangle, \cap)$:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & \mathcal{P}(\mathcal{M}) \\ & {\scriptstyle\theta}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\sim} & \\ \displaystyle\prod_{M\in\mathcal{M}} R/M & \xrightarrow{\ \sim\ } & \displaystyle\prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Questo basta per provare la forma debole del teorema di Stone menzionata: abbiamo verificato che ogni anello prebooleano R è isomorfo ad un sottoanello ($\operatorname{im}\mu$) dell'anello delle parti del suo spettro (che ne è, inoltre, un sottoanello unitario se R è booleano, perché in questo caso θ è unitario). Nel caso in cui R sia finito questo risultato si può subito migliorare:

Teorema 14.7. *Sia R un anello prebooleano finito. Allora R è isomorfo all'anello delle parti di* $\operatorname{Spec}(R)$.

Dimostrazione. Se R è finito, $\mathcal{M} = \operatorname{Spec}(R)$ è finito. Allora, poiché, banalmente, gli elementi di $\mathcal{M}$ sono a due a due comassimali, il lemma 4.10 mostra che l'omomorfismo θ nella descrizione precedente è suriettivo, quindi esso, e di conseguenza μ, è un isomorfismo. □

Corollario 14.8. *Ogni anello prebooleano finito è unitario, ovvero booleano, ed ha per cardinalità una potenza di 2. Inoltre, due qualsiasi anelli (pre)booleani finiti equipotenti sono necessariamente isomorfi.*

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue immediatamente dal teorema 14.7. Se poi R e R' sono anelli prebooleani finiti della stessa cardinalità 2^n, allora ciascuno dei due è isomorfo a $\mathcal{P}(S)$ per un qualche insieme S che, dovendosi avere $2^n = |\mathcal{P}(S)|$, avrà necessariamente cardinalità n. Poiché gli anelli delle parti di insiemi tra loro equipotenti sono ovviamente isomorfi, $R \simeq R'$. □

Allo scopo di ottenere una versione più precisa del teorema di Stone per anelli booleani infiniti, fissiamo in modo esplicito i due isomorfismi che non avevamo specificato nel diagramma precedente:

$$\prod_{M\in\mathcal{M}} R/M \xrightarrow[\sim]{\psi} \prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbb{Z}_2 \qquad \text{e} \qquad \prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\sim]{\xi} \mathcal{P}(\mathcal{M})$$

e descriviamo il monomorfismo $\mu = \theta\psi\xi$ e la sua immagine. Poniamo, per brevità, $\bar{1} = [1]_2 = 1_{\mathbb{Z}_2}$ e $\bar{0} = [0]_2 = 0_{\mathbb{Z}_2}$. Similmente, per ogni $M \in \mathcal{M}$, scriviamo $\bar{1}_M = 1_R + M = 1_{R/M}$ e $\bar{0}_M = M = 0_{R/M}$; ricordiamo che $R/M = \{\bar{0}_M, \bar{1}_M\}$ ed esiste uno ed un solo isomorfismo $\psi_M \colon R/M \to \mathbb{Z}_2$, descritto ovviamente da $\bar{1}_M \mapsto \bar{1}$ e $\bar{0}_M \mapsto \bar{0}$. Allora la scelta più ovvia per ψ è l'isomorfismo indotto (se si vuole, attraverso la proprietà universale per prodotti, come discussa nella sottosezione 4.3.3) dalla famiglia $(\psi_M)_{M\in\mathcal{M}}$, cioè: $(l_M)_{M\in\mathcal{M}} \in \prod_{M\in\mathcal{M}} R/M \mapsto (l^{\psi_M})_{M\in\mathcal{M}} \in \prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbb{Z}_2$.

Si può invece scegliere come ξ l'inverso dell'isomorfismo $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathbb{Z}_2^S$ già menzionato, cioè l'isomorfismo $\prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ che ad ogni $\underline{t} = (t_M)_{M\in\mathcal{M}} \in \prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbb{Z}_2$ associa la parte di $\mathcal{M}$ di cui $\underline{t}$ è funzione caratteristica, ovvero $\underline{t}^{\xi} = \{M \in \mathcal{M} \mid t_M = \bar{1}\}$.

Per ogni $a \in R$, ora, $a^{\theta} = (a_M)_{M\in\mathcal{M}}$, dove, per ogni $M \in \mathcal{M}$, si ha $a_M = \bar{0}_R$ se $a \in M$ e $a_M = \bar{1}_R$ se $a \notin M$. Allora $a^{\theta\psi} = (t_M)_{M\in\mathcal{M}}$, dove, per ogni $M \in \mathcal{M}$, vale $t_M = \bar{0}$ se $a \in M$ e $t_M = \bar{1}$ se $a \notin M$, e quindi $a^{\mu} = a^{\theta\psi\xi} = \{M \in \mathcal{M} \mid a \notin M\}$. D'altra parte, per ogni $M \in \mathcal{M}$, poiché $|R/M| = 2$ e quindi $R = M \cup (1_R + M)$, si ha $a \notin M$ se e solo se $1_R + a \in M$, ovvero se e solo se $M \in \mathrm{Var}((1_R + a)R)$. In conclusione, $a^{\mu} = \mathrm{Var}((1_R + a)R)$ per ogni $a \in R$ e quindi $\operatorname{im}\mu$ è l'insieme delle varietà degli ideali principali di R:

$$\operatorname{im}\mu = \{\mathrm{Var}(aR) \mid a \in R\},$$

essendo, ovviamente, $a \in R \mapsto 1_R + a \in R$ una permutazione.

Come visto nel lemma 14.2, per ogni $a, b \in R$ l'ideale $aR + bR$ è principale, quindi $\mathrm{Var}(aR) \cap \mathrm{Var}(bR) = \mathrm{Var}(aR + bR) \in \operatorname{im}\mu$. Essendo dunque chiuso per intersezioni finite, $\operatorname{im}\mu$ è una base per una topologia su $\mathcal{M}$, che indichiamo con $\mathcal{Z}$. C'è di più: $\operatorname{im}\mu$ è anche chiuso per complementi; infatti, come implicitamente osservato sopra, per ogni $a \in R$ si ha $a^{\mu} = \mathcal{M} \smallsetminus \mathrm{Var}(aR)$. Pertanto gli elementi di $\operatorname{im}\mu$ sono *clopen* (cioè sottospazi contemporaneamente aperti e chiusi) in questa topologia. Fermiamoci un attimo per un'osservazione di natura generale:

Lemma 14.9. *Sia $(S, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. L'insieme dei clopen di questo spazio costituisce un sottoanello unitario dell'anello delle parti di S, quindi un anello booleano.*

Dimostrazione. È chiaro che l'insieme dei clopen è chiuso rispetto all'intersezione ed all'unione binarie, ed anche rispetto all'operazione unaria di complemento in S, quindi rispetto alla differenza simmetrica. Pertanto questo insieme forma un sottoanello di $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$, certamente unitario perché S stesso è un clopen. □

Riprendiamo la descrizione di $\operatorname{im}\mu$, ora attraverso $\mathcal{Z}$. Gli aperti nello spazio topologico $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$, sono, come è ovvio, gli insiemi

$$A_X = \bigcup \{\mathrm{Var}(aR) \mid a \in X\}$$

al variare di $X \in \mathcal{P}(R)$. La descrizione dei chiusi è più significativa: per ogni $X \in \mathcal{P}(R) \smallsetminus \{\varnothing\}$ abbiamo $\mathcal{M} \smallsetminus A_X = \bigcap\{\mathcal{M} \smallsetminus \operatorname{Var}(aR) \mid a \in X\} = \bigcap\{\operatorname{Var}((1_R + a)R) \mid a \in X\}$ e quindi

$$C_X := \mathcal{M} \smallsetminus A_{1_R+X} = \bigcap\{\operatorname{Var}(aR) \mid a \in X\} = \operatorname{Var}(XR),$$

dal momento che gli elementi di $\operatorname{Var}(XR)$ sono precisamente gli ideali massimali di R contenenti tutti gli elementi di X (si veda l'esercizio 3.C.3). I chiusi di $\mathcal{Z}$ sono dunque tutte sole le varietà degli ideali di R—abbiamo tenuto conto anche di $A_\varnothing = A_{1_R+\varnothing} = \varnothing$ e del suo complemento $\mathcal{M} = \operatorname{Var} 0$.[4] Da questa descrizione seguono le principali proprietà di $\mathcal{Z}$:

Lemma 14.10. *Lo spazio topologico $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$ appena definito è compatto, di Hausdorff e totalmente sconnesso.*[5]

Dimostrazione. Per provare la compattezza basta verificare la proprietà dell'intersezione finita per l'insieme dei sottospazi chiusi, cioè che ogni insieme (non vuoto) $\mathcal{C}$ di chiusi tale che $\bigcap \mathcal{C} = \varnothing$ ha un sottoinsieme finito che ha, anch'esso, intersezione vuota. Sia $\mathcal{J}$ un insieme non vuoto di ideali di R. Allora $\bigcap_{H\in\mathcal{J}} \operatorname{Var} H = \varnothing$, ovvero $\operatorname{Var}(\sum_{H\in\mathcal{J}} H) = \varnothing$, se e solo se $\sum_{H\in\mathcal{J}} H = R$, che a sua volta equivale a $1_R \in \sum_{H\in\mathcal{J}} H$. Se questo accade, allora $\mathcal{J}$ ha una parte finita $\mathcal{J}_0$ tale che $1_R \in \sum_{H\in\mathcal{J}_0} H$, quindi $\bigcap_{H\in\mathcal{J}_0} \operatorname{Var} H = \varnothing$. È così provato che $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$ è compatto.

Per completare la dimostrazione basta osservare che, scelti comunque due elementi distinti, M e N, di $\mathcal{M}$, esiste un clopen di $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$ a cui appartenga M ma non N.[6] Questo è immediato: scelti tali M ed N, esiste $a \in M \smallsetminus N$, e $\operatorname{Var}(a)$ è un clopen con la proprietà desiderata. □

A questo punto possiamo dimostrare il teorema di Stone in forma completa.

Teorema 14.11 (M.H. Stone)**.** *Sia R un anello booleano. Allora R è isomorfo all'anello dei clopen di uno spazio topologico compatto, di Hausdorff e totalmente sconnesso.*

Dimostrazione. Lo spazio topologico a cui l'enunciato si riferisce è, nelle notazioni che stiamo usando, $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$. Alla luce della discussione svolta e del lemma 14.10 abbiamo solo ancora da dimostrare che ogni clopen di questo spazio appartiene ad $\operatorname{im}\mu$. Sia dunque B un clopen. Poiché $B \in \mathcal{Z}$, si ha $B = A_X$ per un opportuno $X \subseteq R$. Ma B è anche chiuso e $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$ è compatto, quindi B è compatto e per questo motivo X ha un sottoinsieme finito X_0 tale che $B = A_{X_0}$. Essendo $\operatorname{im}\mu$ chiuso per unioni finite (per ogni $a, b \in R$ si ha $\operatorname{Var}(aR) \cup \operatorname{Var}(bR) = \operatorname{Var}(abR)$, in accordo col lemma 14.2), $B \in \operatorname{im}\mu$. A questo punto la dimostrazione è completa. □

[4] questo significa che $\mathcal{Z}$ non è altro che la topologia di Zariski sullo spettro di R, menzionata nell'esercizio 3.C.3.

[5] forse è il caso di ricordare che, per definizione, uno spazio topologico è totalmente sconnesso quando le sue componenti connesse sono singleton, cioè quando lo spazio non ha sottospazi connessi di cardinalità maggiore di 1.

[6] Se, scelti comunque due punti distinti a e b di uno spazio topologico T, esiste un clopen X di T contenente a ma non b, allora lo spazio è di Hausdorff (a e b sono separati da X e da $T \smallsetminus X$, entrambi aperti) e totalmente sconnesso: se a e b appartengono allo stesso sottospazio Y di T, allora $Y \cap X$ è un clopen non banale di Y, quindi Y non è connesso.

Esercizi.

14.B.1. Verificare in dettaglio il fatto, notato ed utilizzato nel testo, che l'applicazione che ad una parte X di un insieme S associa la sua funzione caratteristica (da S a $\mathbb{Z}_2$) è un isomorfismo di anelli unitari da $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ a $\mathbb{Z}_2^S$.

14.B.2. Per quali spazi topologici l'anello (booleano) dei clopen è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$?

14.B.3. Con riferimento alle notazioni del testo ed al monomorfismo $\mu\colon R \rightarrowtail \mathcal{P}(\mathcal{M})$, provare l'equivalenza tra le affermazioni: (i) μ è un isomorfismo; (ii) la topologia $\mathcal{Z}$ è discreta; (iii) $\mathcal{M}$ è finito; (iv) R è finito.

14.B.4. Descrivere la topologia di Zariski, definita nell'esercizio 3.C.3, nel caso in cui R sia l'anello degli interi.

14.B.5. Sia R un anello commutativo unitario. $\mathrm{Spec}(R)$, munito della topologia di Zariski, è necessariamente di Hausdorff? È totalmente sconnesso?

14.B.6. Verificare che, per ogni insieme infinito S, lo spettro di $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(S)$ munito della topologia di Zariski è uno spazio topologico non compatto. (È anche possibile dimostrare che questo spazio è omoeomorfo allo spazio costruito a partire dall'anello P delle parti finite o cofinite di S, presentato nell'esempio 14.A.7, privato di un punto, precisamente di $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(S)$).

14.2.2 Altri punti di vista: alternative agli anelli booleani

La teoria degli anelli booleani e dei suoi ideali può essere (ed in effetti talvolta è) espressa in modo perfettamente equivalente in termini di strutture matematiche apparentemente di tutt'altra natura. Ne discutiamo brevemente, senza entrare in dettagli dimostrativi e senza pretese di completezza.

Reticoli booleani e algebre di Boole. Sia $(L, \leq)$ un reticolo; come ricordato nella sottosezione 2.2.1 sono definite in L le due operazioni reticolari $\wedge$ e $\vee$, introdotte ponendo $a \wedge b = \inf_{(L,\leq)}\{a, b\}$ e $a \vee b = \sup_{(L,\leq)}\{a, b\}$ per ogni $a, b \in L$. Si dice che il reticolo $(L, \leq)$ è *distributivo* se e solo se $\wedge$ è distributiva rispetto a $\vee$ e, viceversa, $\vee$ è distributiva rispetto a $\wedge$.[7] Si dice invece che $(L, \leq)$ è *complementato* se e solo se $(L, \leq)$ ha minimo e massimo ed ogni $a \in L$ ha un *complemento*, cioè un elemento $b \in L$ tale che $a \wedge b = \min(L, \leq)$ e $a \vee b = \max(L, \leq)$. Per definizione, un *reticolo booleano* è un reticolo che sia allo stesso tempo distributivo e complementato. È utile (anche perché aiuta a non fare confusione) sapere che, a differenza di quanto accade per reticoli arbitrari, nei reticoli distributivi ogni elemento ha al massimo un complemento, quindi ogni elemento di un reticolo booleano ha un *unico* complemento.

È piuttosto evidente che, per ogni insieme S, l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un reticolo booleano (le cui operazioni reticolari sono quelle, binarie, di unione e di intersezione mentre il complemento di ciascun $x \in \mathcal{P}(S)$ è $S \smallsetminus x$).

Un altro esempio, quello per noi qui più interessante, si ricava dal lemma 14.2. L'enunciato contiene, in (ii), l'informazione che se R è un anello booleano e $|_R$ è la relazione di divisibilità in R, allora $(R, |_R)$ è un insieme ordinato, ma, più significativamente, questo è un reticolo booleano. Infatti, che $(R, |_R)$ sia un reticolo è implicitamente stabilito al punto (iii): per ogni $a, b \in R$ l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $\{a, b\}$ sono il massimo comun divisore ed il minimo comune multiplo tra a e b; è ovvio che 0_R e 1_R sono il massimo ed il minimo di $(R, |_R)$, inoltre ogni $a \in R$ ha $1_R + a$ come complemento (infatti $\mathrm{mcm}\{a, 1_R + a\} = a(1_R + a) = a + a^2 = 0_R$ e $\mathrm{MCD}\{a, 1_R + a\} = a(1_R + a) + a + (1_R + a) = 0_R + a + 1_R + a = 1_R$), quindi $(R, |_R)$ è un reticolo complementato; che sia anche distributivo si può verificare direttamente: utilizzando $\wedge$ e $\vee$ per

[7] si può in realtà dimostrare che richiedere una di queste distributività equivale a richiedere l'altra.

indicare MCD e mcm si ha, per ogni $a, b, c \in R$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = abac + ab + ac = a(bc + b + c) = a \wedge (b \vee c)$ (e, volendo, $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (ab + a + b)(ac + a + c) = abc + a + ac = a \vee (b \wedge c)$). Dunque, $(R, |_R)$ è un reticolo booleano. Avremmo potuto fare questa verifica anche in altro modo, risparmiandoci anche qualche calcolo: sappiamo (dalla sottosezione 2.2.1) che il duale di un reticolo è un reticolo, e dovrebbe essere chiaro che un reticolo è booleano (o distributivo, o complementato) se e solo se lo è il suo duale. Ora, il lemma 14.2, insieme alle argomentazioni svolte nella sezione 3.4, mostra che l'applicazione $a \in R \mapsto aR \in \mathfrak{I}(R)$ è un isomorfismo di insiemi ordinati dal duale di $(R, |_R)$ al sottoreticolo $\mathfrak{I}_P(R)$ di $(\mathfrak{I}(R), \subseteq)$ costituito dagli ideali principali; le operazioni reticolari in $(\mathfrak{I}_P(R), \subseteq)$ sono il prodotto (come segue dalla (iii) del lemma 14.2) e la somma tra ideali, quindi questo reticolo è banalmente distributivo ed altrettanto facile verificare che è complementato (esercizio 14.A.5); da ciò segue subito che anche $(R, |_R)$ è un reticolo booleano.

In ogni modo, ad ogni anello booleano si associa un reticolo booleano definito sullo stesso sostegno. Per motivi che saranno chiari più avanti si preferisce associare all'anello booleano R non il reticolo $(R, |_R)$ ma il suo duale, cioè R ordinato dalla relazione 'essere multiplo', isomorfo a $(\mathfrak{I}_P(R), \subseteq)$.

Passiamo ora alle algebre di Boole, che sono niente altro che i reticoli booleani riguardati come strutture algebriche. Vediamo in che senso. Nella sottosezione 2.2.1 avevamo discusso il fatto che la nozione di reticolo si può dare in modo equivalente per via puramente algebrica, definendo come reticolo un struttura algebrica $(L, \wedge, \vee)$ in cui $\wedge$ e $\vee$ siano due operazioni binarie associative e commutative soggette alle leggi di assorbimento: $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$ per ogni $a, b \in L$ (le operazioni reticolari di un reticolo soddisfano queste proprietà). Si può arricchire questa definizione per ottenere una struttura che, interpretata come reticolo, sia un reticolo booleano. La nuova definizione è questa: si chiama *algebra di Boole* una struttura algebrica $(L, \wedge, \vee, ', 1, 0)$, dove $\wedge$ e $\vee$ sono operazioni binarie associative e commutative, ciascuna distributiva rispetto all'altra, $'$ è un'operazione unaria e 1 e 0 sono due operazioni nullarie (in altri termini, 1 e 0 sono elementi preselezionati in L) che individuino elementi neutri, rispettivamente, per $\wedge$ e $\vee$; inoltre si richiede che, per ogni $a, b \in L$ valgano le uguaglianze: $a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$ (leggi di assorbimento), $1 = a \vee a'$ e $0 = a \wedge a'$ (leggi di complementazione).[8] Come è facile vedere, si tratta precisamente delle proprietà richieste dalla definizione di reticolo come struttura algebrica con l'aggiunta di quelle che esprimono la proprietà che il reticolo sia booleano: distributività, esistenza di minimo e massimo (0 e 1), esistenza di un complemento per ciascun elemento di L. Per esprimersi in modo più esplicito: ogni reticolo booleano può riguardarsi come algebra di Boole (utilizzando a questo scopo le operazioni reticolari e, come operazione unaria, l'applicazione che ad ogni elemento associa il suo complemento) e, viceversa, ogni algebra di Boole definisce una relazione d'ordine sul suo sostegno che rende questo un reticolo booleano. Inoltre, queste due trasformazioni sono l'una inversa dell'altra; per questo le nozioni di reticolo booleano e di algebra di Boole sono perfettamente interscambiabili.

Riassumendo: ad ogni anello booleano $(R, +, \cdot)$ associamo un reticolo booleano: $(R, \leq)$, dove $\leq$ è la relazione duale alla divisibilità in R, e la corrispondente algebra di Boole: $(R, \cdot, \vee, ', 1_R, 0_R)$, in cui $\vee$ e $'$ sono definite da $a \vee b = ab + a + b$ e $a' = 1_R + a$ per ogni $a \in R$. Per chiudere il discorso serve solo aggiungere che anche questa costruzione si inverte: se $(R, \wedge, \vee, ', 1, 0)$ è un'algebra di Boole, corrispondente al reticolo booleano $(R, \leq)$ si definisce in R un'operazione (di addizione), ponendo $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$[9] per ogni $a, b \in R$. Si verifica (con un po' di pazienza) che $(R, +, \wedge)$ è un anello booleano, con zero 0 e unità 1. Non solo: la relazione di

[8] Vale la pena di menzionare il fatto che questa definizione è ridondante: la neutralità di 0 e 1 segue facilmente dalle leggi di assorbimento e di complementazione; inoltre, come già notato, la distributività di $\wedge$ rispetto a $\vee$ implica la distributività di $\vee$ rispetto a $\wedge$, e viceversa, basterebbe quindi richiederne solo una.

[9] che coincide con $(a \vee b) \wedge (a \wedge b)'$; si noti l'analogia con la definizione insiemistica di differenza simmetrica.

divisibilità in questo anello è proprio la relazione duale a $\leq$, quindi il reticolo associato a $(R, +, \wedge)$ è proprio $(R, \leq)$ (o, se si preferisce: l'algebra di Boole associata a $(R, +, \wedge)$ è $(R, \wedge, \vee, ', 1, 0)$). Viceversa, dato un anello booleano $(R, +, \cdot)$, l'anello definito, come appena specificato, dal reticolo booleano ad esso associato è proprio $(R, +, \cdot)$. Per dirlo in termini più precisi: per ogni insieme R abbiamo costruito due applicazioni biettive, l'una inversa dell'altra, tra l'insieme delle coppie di operazioni binare che strutturano R come anello booleano e quello delle relazioni d'ordine su R che lo strutturano come reticolo booleano. Per questo motivo, come accennato all'inizio di questa sezione, la teoria degli anelli booleani è perfettamente equivalente a quella dei reticoli booleani e a quella delle algebre di Boole, e si può liberamente passare, senza perdere alcuna informazione, dall'uno all'altro dei corrispondenti linguaggi.[10]

Un esempio che illustra molto bene la situazione è quello fornito dalle strutture booleane prototipiche, quelle definite sull'insieme delle parti di un insieme. Se S è, appunto, un insieme, $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ è un anello booleano. Siccome la relazione di divisibilità in $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ è la relazione $\supseteq$ di inclusione inversa (se $a, b \in \mathcal{P}(S)$, esiste $c \in \mathcal{P}(S)$ tale che valga $b = a \cap c$ se e solo se $a \supseteq b$), il reticolo booleano associato a $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ è $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, che, come è facile riconoscere, corrisponde all'algebra di Boole $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup, ^c, S, \varnothing)$, dove ^{c} è l'applicazione $x \in \mathcal{P}(S) \mapsto S \smallsetminus x \in \mathcal{P}(S)$. Infine, essendo $a \triangle b = (a \cap b^c) \cup (a^c \cap b)$ per ogni $a, b \in \mathcal{P}(S)$, da quest'algebra di Boole si ricava, in accordo con la costruzione indicata sopra, l'anello booleano $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$, quello da cui eravamo partiti.

Ideali di $\mathcal{P}(S)$, filtri e ultrafiltri In diversi ambiti matematici, ad esempio in topologia, in logica, in teoria della misura, si fa frequente riferimento alle strutture booleane, esprimendo talvolta proprietà relative agli ideali degli anelli booleani in termini di altre nozioni che ad essi si possono comunque ricondurre: filtri ed ultrafiltri.

Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Un *filtro* in $(X, \leq)$ è un sottoinsieme non vuoto di X che contenga tutti i maggioranti dei singleton dei suoi elementi ed almeno un minorante di ogni sua parte finita. Più esplicitamente, F è un filtro di $(X, \leq)$ se e solo se $\varnothing \neq F \subseteq X$ e valgono:

(F.1) $(\forall x \in F)(\forall z \in X)(x \leq z \Rightarrow z \in F)$
(F.2) $(\forall\, x, y \in F)(\exists z \in F)(z \leq x \wedge z \leq y)$.

Nel caso in cui $(X, \leq)$ sia un reticolo la (F.2) si può equivalentemente sostituire alla richiesta che F sia chiuso rispetto all'operazione reticolare di estremo inferiore, come è immediato verificare.

Un ultrafiltro è filtro che sia massimale rispetto all'inclusione tra i filtri propri (cioè non coincidenti con X).

È piuttosto semplice interpretare queste nozioni nel caso in cui $(X, \leq)$ sia $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ per un insieme S: essenzialmente i filtri in $\mathcal{P}(S)$ corrispondono biunivocamente agli ideali: sono i laterali degli ideali a cui appartiene l'unità dell'anello.

Lemma 14.12. *Sia S un insieme, e sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathcal{P}(S)$. Allora:*

(i) *$A \lhd \mathcal{P}(S)$ se e solo se per ogni $x, y \in A$ appartengono ad A tutti i sottoinsiemi di x ed anche $x \cup y$;*
(ii) *A è un ideale principale di $\mathcal{P}(S)$ se e solo se $H = \mathcal{P}(T)$ per qualche $T \subseteq S$;*
(iii) *A è un filtro in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ se e solo se A è il laterale $S \triangle H$ per un opportuno $H \lhd \mathcal{P}(S)$;*
(iv) *A è un ultrafiltro in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ se e solo se A è il laterale $S \triangle H$ per un opportuno $H \lhd\cdot \mathcal{P}(S)$; in questo caso $A = \mathcal{P}(S) \smallsetminus H$.*

[10] ... con le dovute accortezze a proposito delle sottostrutture. Ad esempio, se $(R, +, \cdot)$ è un anello booleano, corrispondente al reticolo booleano $(R, \leq)$ ed all'algebra di Boole $(R, \wedge, \vee, ', 1, 0)$, una parte X di R costituisce una sottoalgebra di $(R, \wedge, \vee, ', 1, 0)$ se e solo se costituisce un sottoanello unitario di $(R, +, \cdot)$, ma può costituire un sottoreticolo di $(R, \leq)$ anche in altri casi. Ad esempio, ogni ideale principale di $(R, +, \cdot)$ costituisce un sottoreticolo, e un sottoreticolo di $(R, \leq)$ può addirittura non essere booleano.

Dimostrazione. Se $T \in \mathcal{P}(S)$, l'insieme dei multipli di T nell'anello $\mathcal{P}(S)$ è $\{T \cap U \mid U \subseteq S\} = \mathcal{P}(T)$, da ciò segue subito la (ii) ed il fatto che se $A \lhd \mathcal{P}(S)$, allora $\mathcal{P}(x) \subseteq A$ per ogni $x \in A$. Inoltre, sempre nell'ipotesi $A \lhd \mathcal{P}(S)$, per ogni $x, y \in A$ si ha $x \cup y = (x \cap y) \triangle (x \triangle y) \in A$, quindi la condizione in (i) è verificata. Viceversa, se $\varnothing \neq A \subseteq \mathcal{P}(S)$ e per A è verificata la condizione in (i), allora A contiene tutti i multipli dei suoi elementi ed è chiuso rispetto a $\triangle$ (infatti, per ogni $x, y \in A$, si ha $x \triangle y \in A$ perché $x \triangle y \subseteq x \cup y \in A$), dunque $A \lhd \mathcal{P}(S)$. Anche la (i) è dimostrata.

Sia $B = \{S \smallsetminus x \mid x \in A\}$. Allora, per le leggi di De Morgan, la condizione in (i), equivalente all'essere A un ideale di $\mathcal{P}(S)$, è a sua volta equivalente a richiedere che B sia chiuso rispetto all'intersezione binaria e abbia come elemento tutte le parti di S che ne contengano un elemento. Dunque, A è un ideale di $\mathcal{P}(S)$ se e solo se B ne è un filtro. Dal momento che $B = S \triangle A$ e $A = S \triangle B$, otteniamo così (iii), di cui (iv) è ovvia conseguenza (si ricordi che gli ideali massimali di $\mathcal{P}(S)$ hanno indice 2). □

Questo risultato si estende agli anelli ed ai reticoli booleani: se $(R, +, \cdot)$ è un anello booleano, e $(R, \leq)$ e $(R, \wedge, \vee, ', 1_R, 0_R)$ sono il reticolo booleano e l'algebra di Boole ad esso corrispondenti, l'assegnazione $H \mapsto 1_R + H = \{x' \mid x \in H\}$ definisce una biezione dall'insieme degli ideali di R a quello dei filtri in $(R, \leq)$,[11] e questa biezione fa corrispondere ideali massimali ad ultrafiltri.

Questo fa sì che lo studio degli ideali di un anello booleano sia equivalente allo studio dei filtri di un reticolo booleano e molte nozioni e risultati, nei fatti coincidenti, sono effettivamente espresse nella letteratura matematica usando questi differenti linguaggi; gli esercizi che seguono intendono illustrare questo punto. Ad esempio il teorema di Stone è spesso presentato, piuttosto che nel linguaggio degli anelli booleani, in quello delle algebre di Boole; in questo caso la dimostrazione può essere resa in termini di uno spazio topologico con sostegno l'insieme degli ultrafiltri di un reticolo booleano, omeomorfo a quello, $(\mathcal{M}, \mathcal{Z})$, qui considerato sullo spettro di un anello booleano.

Esercizi.

14.C.1. Sia S un insieme. Per ogni $T \subseteq S$, l'insieme $\{X \in \mathcal{P}(S) \mid T \subseteq X\}$ è un filtro di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. I filtri di questa forma si dicono filtri principali di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Verificare che i filtri principali di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ corrispondono precisamente (nel senso indicato dal lemma 14.12) agli ideali principali di $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$.

Inoltre, per ogni $x \in S$, l'insieme $\{X \in \mathcal{P}(S) \mid x \in X\}$ è un ultrafiltro (principale) di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Dopo aver osservato che gli ultrafiltri principali di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ corrispondono precisamente agli ideali massimali principali di $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$, dedurre, utilizzando l'esercizio 14.A.6, l'esistenza di ultrafiltri non principali in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ nel caso in cui S sia infinito.

14.C.2. Estendendo l'esercizio precedente, provare che $\mathrm{Var}_{\mathcal{P}(S)}(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(S))$ è l'insieme degli ideali massimali non principali di $\mathcal{P}(S)$. Nel caso in cui S sia infinito, dedurne l'esistenza di infiniti ultrafiltri non principali in $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.[12]

14.C.3. Una nota caratterizzazione degli ultrafiltri di un reticolo booleano $(L, \leq)$ è questa: un filtro F di $(L, \leq)$ è un ultrafiltro se e solo se, per ogni $x \in L$, se $x \notin F$ allora $x' \in F$ (come di consueto, x' indica il complemento di x). Dimostrare questa caratterizzazione come conseguenza (immediata!) della proposizione 14.4.

[11] questo perché le leggi di De Morgan (nella forma $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ e $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ per ogni a, b) valgono in tutte le algebre di Boole.

[12] in realtà, se S è infinito $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ha $2^{2^{|S|}} = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))|$ ultrafiltri non principali.

14.3 Interi di Gauss e somme di due quadrati

Presentiamo qui un classico teorema abitualmente associato al nome di Fermat ma che fu in origine dimostrato da Albert Girard. Il teorema descrive i numeri interi (ovviamente naturali) che sono la somma di due quadrati; la dimostrazione che vedremo fa uso delle proprietà dell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss (che, ricordiamo dal teorema 13.11, è l'anello degli interi del campo quadratico $\mathbb{Q}[i]$) e della norma dei suoi elementi.

Indichiamo semplicemente con N la funzione norma $\mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}$; come già osservato la norma di un qualsiasi elemento di $\mathbb{Q}[i]$ coincide con la sua usuale norma complessa: l'unico automorfismo non identico di $\mathbb{Q}[i]$ è quello indotto dal coniugio complesso, quindi per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ si ha $N(a+ib) = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$. Di conseguenza, l'insieme, che indichiamo d'ora in avanti con S, di cui tratta il teorema di Girard e Fermat è precisamente l'immagine di $\mathbb{Z}[i]$ mediante la funzione N:

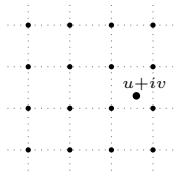
$$S := \{a^2+b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \{N(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Z}[i]\}.$$

Poiché, come discusso nella sezione 13.2, N induce un omomorfismo di monoidi $(\mathbb{Z}[i], \cdot) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$, otteniamo subito che S costituisce un sottomonoide moltiplicativo di $\mathbb{Z}$, quindi di $(\mathbb{N}, \cdot)$, dal momento che ovviamente $S \subseteq \mathbb{N}$.

Per descrivere S è molto utile sapere che $\mathbb{Z}[i]$ è fattoriale. Più in generale, abbiamo:[13]

Lemma 14.13. *$\mathbb{Z}[i]$ è un anello euclideo.*

Dimostrazione. L'asserto segue facilmente dalla considerazione geometrica schematizzata a lato, che mostra come ogni numero complesso, visto come punto del piano complesso, abbia distanza al più $1/\sqrt{2}$ da un intero di Gauss: il piano complesso è ricoperto da quadrati di lato 1 i cui vertici sono gli interi di Gauss, ed ogni punto di tali quadrati ha distanza al più $1/\sqrt{2}$ da almeno un vertice. Detto diversamente, in modo più esplicito: per ogni $u, v \in \mathbb{R}$, esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $|u-a|, |v-b| \leq 1/2$ e quindi $|(u+iv)-(a+ib)| \leq 1/\sqrt{2}$.



Ora, se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ e $\beta \neq 0$ si ha certamente $N(\alpha) \leq N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$, inoltre esiste $q \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $|\alpha\beta^{-1} - q| \leq 1/\sqrt{2}$. Allora, posto $r = \alpha - q\beta$, abbiamo $\alpha = q\beta + r$ e $N(r) = |\alpha - q\beta|^2 = |\alpha\beta^{-1} - q|^2 \, |\beta|^2 \leq (1/2)N(\beta) < N(\beta)$. Vediamo così che la funzione norma rende $\mathbb{Z}[i]$ un anello euclideo. □

Stabilito che $\mathbb{Z}[i]$ è un anello fattoriale, vediamo ora quali numeri interi (razionali) positivi sono ancora irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$; in effetti questo equivale a stabilire quali tra essi sono in S. Partiamo dall'osservazione che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $n^2 \equiv_4 0$ se n è pari, $n^2 \equiv_4 1$ se n è dispari. Di conseguenza:

Lemma 14.14. *Nessun numero intero congruo a -1 modulo 4 è in S.*

Dimostrazione. Sia $n \in S$, dunque $n = a^2+b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{Z}$. Poiché sia a^2 che b^2 sono congrui a 0 o 1 modulo 4, si ricava subito che, modulo 4, n è congruo ad uno tra 0, 1 e 2, quindi non a -1. □

Ricordiamo che $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri interi positivi primi.

Lemma 14.15. *Sia $p \in \mathbb{P}$. Se $p \equiv_4 1$ esiste $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale che $\lambda^2 \equiv_p -1$.*

Dimostrazione. Il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_p^*$ del campo $\mathbb{Z}_p$ è ciclico di cardinalità $p-1$, per ipotesi multipla di 4. Allora esso ha un elemento $[\lambda]_p$ di periodo moltiplicativo 4. Inoltre $\mathbb{Z}_p^*$ ha esattamente un elemento di periodo 2, che deve così coincidere sia con $[-1]_p$ che con $[\lambda]_p^2$. Pertanto $\lambda^2 \equiv_p -1$. □

[13] il contenuto di questo lemma era già stato proposto come esercizio 13.C.5.

Lemma 14.16. *Sia $p \in \mathbb{P}$. Allora:*
(i) *se $p \equiv_4 -1$, allora p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ e $p \notin S$;*
(ii) *se $p \not\equiv_4 -1$, allora p non è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ e $p \in S$.*

Dimostrazione. Sia $p \equiv_4 -1$. Allora $N(p) = p^2$ e $p \notin S$ per il lemma 14.14, dunque né p né $-p$ (perché negativo) sono norme di elementi di $\mathbb{Z}[i]$. Allora, per il lemma 13.8 (vi), p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$.

Se $p \equiv_4 2$, chiaramente $p = 2$. Ora, $2 = N(1+i) = (i+1)(i-1)$ e, per il lemma 13.8 (iv,v), $1+i$ è un divisore non banale di 2 in $\mathbb{Z}[i]$. Di conseguenza, $2 \in S$ e 2 non è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$.

Ovviamente $p \not\equiv_4 0$, quindi l'ultimo caso da considerare è quello in cui $p \equiv_4 1$. In questo caso il lemma 14.15 fornisce un $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale che $\lambda^2 \equiv_p -1$. Posto $\alpha = \lambda + i$, abbiamo allora che p divide (in $\mathbb{Z}$ e quindi anche in $\mathbb{Z}[i]$) $\lambda^2 + 1 = N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ (qui ed altrove in questa sezione, $\bar{\alpha}$ indica il coniugato complesso di α). Se p fosse irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$, allora dovrebbe essere anche primo (lemma 14.13) e quindi dovrebbe dividere (in $\mathbb{Z}[i]$) almeno uno tra α e $\bar{\alpha}$. Questo è evidentemente falso (i multipli di p hanno sia parte reale che parte immaginaria in $p\mathbb{Z}$), quindi p non è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$. Infine, utilizzando anche il lemma 13.8, da questa informazione deduciamo che esiste in $\mathbb{Z}[i]$ un elemento γ la cui norma è in $\mathbb{Z}$ un divisore non banale di $p^2 = N(p)$. Essendo $N(\gamma) \geq 0$, necessariamente $N(\gamma) = p$, quindi $p \in S$. □

Possiamo ora dimostrare il teorema di Girard-Fermat. Ovviamente $0 \in S$; per quanto riguarda gli altri numeri naturali si ha:

Teorema 14.17. *Sia $n \in \mathbb{N}^+$. Se $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$ è la decomposizione di n in prodotto di potenze di primi positivi a due a due distinti (in $\mathbb{N}$, quindi $k \in \mathbb{N}$ e, per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p_j \in \mathbb{P}$ e $t_j \in \mathbb{N}^+$), allora $n \in S$ se e solo se per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tale che $p_j \equiv_4 -1$, l'esponente t_j è pari.*

Dimostrazione. Iniziamo a verificare che la condizione è sufficiente. Ovviamente $1 \in S$, quindi si può assumere $k > 0$. Se $p \in \mathbb{P}$ e λ è un intero positivo pari, p^λ è un quadrato in $\mathbb{Z}$ e quindi appartiene ad S, inoltre, per il lemma 14.16, $p \in S$ se $p \not\equiv_4 -1$. Da ciò e dal fatto che S è chiuso rispetto alla moltiplicazione segue che ogni intero positivo n che soddisfa la condizione enunciata appartiene ad S.

Viceversa, verifichiamo che la condizione è necessaria. Sia $n \in S$. Dobbiamo dimostrare che se p è un divisore primo di n in $\mathbb{N}^+$ e $p \equiv_4 -1$, allora l'esponente t della massima potenza p^t di p che divide n è pari. Ragionando per assurdo, sia n un controesempio minimo. Poiché $n \in S$, esiste $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $n = N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$. Ma p è primo in $\mathbb{Z}[i]$ per il lemma 14.16 e divide $\alpha\bar{\alpha}$, quindi divide (in $\mathbb{Z}[i]$) uno tra α e $\bar{\alpha}$. Poiché $p = \bar{p}$, abbiamo che p divide α se e solo se divide $\bar{\alpha}$ quindi p divide sia α che $\bar{\alpha}$; così p^2 divide n, in $\mathbb{Z}[i]$ e di conseguenza anche in $\mathbb{Z}$. Inoltre $N(\alpha/p) = n/p^2$, quindi $n/p^2 \in S$. La massima potenza di p che divide n/p^2 è p^{t-2}, quindi, per la minimalità di n, l'esponente $t-2$ è pari. Di conseguenza t è pari, in contraddizione con la scelta di n. A questo punto la dimostrazione è conclusa. □

Esercizi.

14.D.1. Un precedente esercizio (13.C.1) chiedeva tra l'altro di determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$ (che sono 1, -1, i e $-i$). Usando il lemma 14.16 e l'osservazione che ogni irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ divide un intero positivo (la sua norma) e quindi un primo in $\mathbb{P}$, determinare gli elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$, descrivendoli in termini di $\mathbb{P}$.