Coefficienti binomiali

Sia S un insieme. Per ogni numero naturale k si definisce $\mathcal{P}_k(S)$ come l'insieme delle parti di S che abbiano (esattamente) k elementi, dunque:

$$\mathcal{P}_k(S) = \{X \subseteq S \mid |X| = k\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{P}_k(S)$ si chiamano anche *k-parti* di S (con una terminologia un pò vecchia ma ancora corrente, queste sono anche chiamate *combinazioni* di n oggetti di classe k). Ad esempio, l'unica 0-parte di un insieme S è l'insieme vuoto, mentre le 1-parti di S sono i singleton degli elementi di S, quindi

$$\mathcal{P}_0(S) = \{\varnothing\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{P}_1(S) = \big\{\{x\} \mid x \in S\big\}$$

qualsiasi sia S; se poi $S = \{1, 2, 3, 4\}$ allora $\mathcal{P}_2(S) = \big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\big\}$.

Non è difficile verificare che se $f \colon S \to T$ è un'applicazione biettiva, per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'applicazione

$$\alpha \colon X \in \mathcal{P}_k(S) \longmapsto X^{\vec{f}} \in \mathcal{P}_k(T),$$

che ad ogni k-parte di S associa la sua immagine tramite f, è ben posta ed è biettiva: se g è l'inversa di f allora l'inversa di α è l'applicazione data da $Y \in \mathcal{P}_k(T) \longmapsto Y^{\vec{g}} \in \mathcal{P}_k(S)$. Pertanto, scelti comunque due insiemi S e T ed un numero naturale k, se $|S| = |T|$ allora $|\mathcal{P}_k(S)| = |\mathcal{P}_k(T)|$.

Supponiamo ora che S sia un insieme finito e sia $n = |S|$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo, per definizione,

$$\binom{n}{k} := |\mathcal{P}_k(S)|.$$

Il simbolo $\binom{n}{k}$ così definito si chiama *coefficiente binomiale*. La correttezza di questa definizione va giustificata. Infatti abbiamo definito un termine (il coefficiente binomiale), che deve dipendere solo dai numeri naturali k ed n, come il numero delle k-parti di un *particolare* insieme S di n elementi. In linea di principio si potrebbe pensare che, sostituendo ad S un altro insieme con lo stesso numero n di elementi, il numero delle k-parti di questo secondo insieme possa risultare diverso da $|\mathcal{P}_k(S)|$; se così fosse non avremmo correttamente definito $\binom{n}{k}$. Come abbiamo dimostrato sopra, però, ciò non accade: se T è un insieme e $|T| = n = |S|$ allora $|\mathcal{P}_k(T)| = |\mathcal{P}_k(S)|$. In altri termini, il valore di $|\mathcal{P}_k(S)|$ non dipende dalla particolare scelta di S tra gli insiemi con n elementi; è questo che rende accettabile la definizione data per il coefficiente binomiale.

Alcuni coefficienti binomiali sono immediati da calcolare: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n; \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N})\ \Big(k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0\Big).$$

Infatti, se S è un insieme di n elementi, abbiamo $\mathcal{P}_0(S) = \{\varnothing\}$ e $\mathcal{P}_n(S) = \{S\}$, quindi $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; inoltre $\mathcal{P}_1(S)$, l'insieme dei singleton degli elementi di S, ha tanti elementi quanto S, dunque n, quindi $\binom{n}{1} = n$. Infine, se $k > n$ allora certamente $\mathcal{P}_k(S) = \varnothing$ (S non ha parti che abbiano più elementi dello stesso S) e quindi $\binom{n}{k} = 0$. Un'altra proprietà molto semplice da verificare è:

1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Dimostrazione — Sia S un insieme tale che $|S| = n$. È chiaro che $\mathcal{P}(S)$ è unione disgiunta degli insiemi $\mathcal{P}_k(S)$ al variare dell'intero k tra 0 e n; in altri termini $\{\mathcal{P}_k(S) \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n\}$ è una partizione di $\mathcal{P}(S)$. Pertanto $|\mathcal{P}(S)| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k(S)|$; poiché $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$ e, per ogni scelta di k, $|\mathcal{P}_k(S)| = \binom{n}{k}$, otteniamo così l'asserto. □

Si può pensare al coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ in questi termini: $\binom{n}{k}$ è il numero di modi in cui si possono scegliere k oggetti da un insieme di n oggetti (infatti scegliere k oggetti significa in sostanza scegliere una k-parte se, come qui stiamo facendo, non consideriamo importante l'ordine in cui questi oggetti siano stati scelti). Ora, selezionare k oggetti da un insieme di n è concettualmente equivalente a sceglierne $n - k$ da scartare (ad esempio, per essere sicuro di restare con due carte in mano se ne ho cinque, posso sceglierne due da "tenere" oppure sceglierne tre da "scartare": $3 = 5 - 2$). Dunque dovrebbe esser facile comprendere che il coefficiente binomiale $\binom{n}{n-k}$ coincide con $\binom{n}{k}$. Questa idea intuitiva è facile da formalizzare:

2. *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ e supponiamo $k \le n$. Allora* $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Dimostrazione — Fissato un insieme S con (esattamente) n elementi, consideriamo l'applicazione

$$c\colon X \in \mathcal{P}(S) \longmapsto S \smallsetminus X \in \mathcal{P}(S)$$

che ad ogni parte di S associa il suo complemento in S. Poiché il complemento del complemento di una qualsiasi parte X di S è X stessa (vale a dire: $S \smallsetminus (S \smallsetminus X) = X$ per ogni $X \subseteq S$), è chiaro che c^2 è l'applicazione identica di $\mathcal{P}(S)$, cioè che c è l'applicazione inversa di se stessa. Dunque c è biettiva. L'immagine di $\mathcal{P}_k(S)$ mediante c è costituita dai complementi in S delle parti di S di cardinalità k, ma queste sono precisamente le parti di S di cardinalità $n-k$. Dunque, l'immagine di $\mathcal{P}_k(S)$ mediante c è $\mathcal{P}_{n-k}(S)$. Pertanto l'applicazione (indotta da c, nel senso che è una restrizione di c ridotta alla sua immagine)

$$c_k\colon X \in \mathcal{P}_k(S) \longmapsto S \smallsetminus X \in \mathcal{P}_{n-k}(S)$$

è anch'essa biettiva. Ciò dimostra che $|\mathcal{P}_k(S)| = |\mathcal{P}_{n-k}(S)|$, ovvero, in altri termini, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, come si voleva dimostrare. □

La proprietà espressa dal precedente enunciato viene talvolta chiamata proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali. Un'altra notevolissima proprietà è quella rappresentata nel cosiddetto *triangolo di Tartaglia-Pascal*. Si tratta essenzialmente di questa formula:

3. *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ e supponiamo $k \le n$. Allora* $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Dimostrazione — Diamo questa dimostrazione in una versione poco formalizzata ma più facile da seguire di quanto sarebbe in una stesura più rigorosa.

Supponiamo di avere un insieme S costuito da $n+1$ palline bianche. Ovviamente $S \neq \varnothing$, perché $n+1 > 0$, quindi possiamo selezionare una delle palline e colorarla, diciamo, di nero. Il coefficiente binomiale che vogliamo calcolare, $\binom{n+1}{k+1}$, è il numero delle $(k+1)$-parti di S. Possiamo distinguere tra due tipi di $(k+1)$-parti di S: quelle costituite da sole palline bianche e quelle costituite dalla pallina nera e da k palline bianche. Ovviamente $\binom{n+1}{k+1}$ è la somma tra il numero delle parti del primo tipo ed il numero delle parti del secondo tipo. Quante sono le parti del primo tipo? Esse sono precisamente le $(k+1)$-parti dell'insieme delle palline bianche. Poiché il numero delle palline bianche è n (le palline erano in origine $n+1$, ne abbiamo colorato una di nero, restano bianche $n = (n+1)-1$ palline), questo numero sarà $\binom{n}{k+1}$. Quante sono invece le parti del secondo tipo? Ciascuna di esse si ottiene aggiungendo la pallina nera ad una k-parte dell'insieme delle palline bianche, e da ciò è facile dedurre che il numero delle parti del secondo tipo è uguale a quello delle k-parti dell'insieme delle palline bianche, dunque $\binom{n}{k}$. Pertanto $\binom{n+1}{k+1}$, che come detto è uguale alla somma tra il numero delle parti del primo tipo ed il numero delle parti del secondo tipo, è proprio $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, come volevamo dimostrare. □

Vediamo come la formula appena dimostrata si visualizza nel triangolo di Tartaglia-Pascal. Questo triangolo è costruito secondo lo schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

. . . .

in cui il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ appare come $(k+1)$-esimo termine della riga $(n+1)$-esima. A parte i coefficienti che appaiono sui lati del triangolo (quelli della forma $\binom{n}{0}$ oppure $\binom{n}{n}$, che sappiamo essere uguali a 1), la formula provata in (**3**) mostra che ciascun coefficiente è la somma dei due che gli sono sopra, cioè, nel rigo superiore, uno immediatamente a sinistra, l'altro immediatamente a destra. Ciò permette di calcolare in modo relativamente semplice i coefficienti binomiali: quelli sui lati sono già noti (sono tutti 1), quindi conosciamo già le prime due righe, il termine centrale della terza riga, cioè $\binom{2}{1}$ lo ricaviamo come somma tra i due termini della prima, quindi $\binom{2}{1} = 1 + 1 = 2$, come in effetti già sapevamo. Essendo ora nota la terza riga possiamo calcolare la quarta: $\binom{3}{1} = 1 + 2 = 3$ (i due primi termini della terza riga sono, appunto, 1 e 2) e, similmente, $\binom{3}{2} = 2 + 1 = 3$; dalla quarta riga ricaviamo la quinta ... e così via. Iterando il procedimento possiamo calcolare (ricorsivamente) ciascun coefficiente binomiale a cui siamo interessati; per questo procedimento è solo necessario eseguire delle addizioni. Le prime righe sono dunque:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Ad esempio, nella settima riga il terzo termine è 15, ottenuto come $5 + 10$, dunque $\binom{6}{2} = 15$. Si può anche notare come questo triangolo sia simmetrico rispetto al suo asse verticale (ciascuno dei numeri che appare coincide con quello che occupa la posizione simmetrica rispetto a quest'asse); questa proprietà è precisamente quella espressa in (**1**).

Oltre al metodo offerto dal triangolo di Tartaglia-Pascal, esiste una maniera diretta di calcolare i coefficienti binomiali:

4. *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ e supponiamo $k \leq n$. Allora* $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dimostrazione — Non è difficile dimostrare questa formula per induzione, utilizzando a questo scopo la relazione ricorsiva stabilita in (**3**). Possiamo però anche procedere in modo del tutto indipendente e diretto.

Sia S un insieme costituito da n elementi, e sia I un qualsiasi insieme costituito da k elementi. Sappiamo che esistono esattamente $n^{\underline{k}} = n!/(n-k)!$ applicazioni iniettive da I a S. Ciascuna di queste applicazioni iniettive ha per immagine una k-parte di S. Viceversa, ogni k-parte X di S è immagine di qualche applicazione iniettiva da I a S; più precisamente possiamo osservare che le applicazioni iniettive da I ad S che hanno X come immagine sono tante quante le applicazioni biettive $I \to X$, quindi $k!$. Da questo segue subito che il numero $n^{\underline{k}}$ delle applicazioni iniettive da I a S è pari al prodotto tra $\binom{n}{k}$, il numero delle k-parti di S e $k!$, il numero delle applicazioni iniettive che hanno per immagine una qualsiasi prefissata k-parte di S. Dunque,

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}} = k!\binom{n}{k},$$

da cui segue la formula nell'enunciato.

Tutto questo dovrebbe essere sufficientemente chiaro, ma possiamo anche verificare in maggior dettaglio il fatto che l'insieme F_X delle applicazioni iniettive da I ad S che hanno X come immagine ha cardinalità uguale a quella dell'insieme B_X delle applicazioni biettive da I a X. Se $\iota\colon X \hookrightarrow S$ è l'immersione di X in S, ad ogni $f \in B_X$ possiamo associare l'applicazione $f\iota$, che appartiene certamente a F_X; in questo modo definiamo l'applicazione $f \in B_X \mapsto f\iota \in F_X$, che si vede facilmente essere biettiva. Dunque $|F_X| = |B_X|$. Essendo $|X| = |I| = k$, sappiamo che $|B_X| = k!$, quindi $|F_X| = k!$. □

Il lettore può divertirsi a verificare che sarebbe stata possibile una impostazione differente da quella qui seguita: provare prima (**4**) e poi dedurre da questa formula esplicita tutte le proprietà dei coefficienti binomiali che noi abbiamo invece ricavato in precedenza.

Perché i coefficienti binomiali sono chiamati proprio così? Perché appaiono nell'espressione delle potenze di quello che tradizionalmente veniva (e viene) chiamato un binomio, un'espressione del tipo $a+b$. Ad esempio, siamo abituati a calcolare $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, in cui i coefficienti nel secondo termine, 1, 2 e 1, sono proprio quelli che appaiono alla terza riga del triangolo di Tartaglia-Pascal; $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, e qui i coefficienti, 1, 3, 3 e 1 descrivono la quarta riga dello stesso triangolo. Il risultato generale che spiega questo fenomeno è la cosiddetta *formula del binomio di Newton*:

5. *Siano a e b due elementi di un anello, e supponiamo che valga $ab = ba$. Allora, per ogni intero positivo n:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Dimostrazione — Anche in questo caso possiamo scegliere tra diverse possibili dimostrazioni, tra cui una dimostrazione per induzione che si invita a svolgere per esercizio. Diamo una dimostrazione quanto più possibile diretta. Partiamo da un esempio: supponiamo di voler calcolare $(a+b)^3$, cioè $(a+b)(a+b)(a+b)$. Utilizzando più volte la proprietà distributiva abbiamo

$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) &= a(a+b)(a+b) + b(a+b)(a+b)\\ &= a\big(a(a+b)+b(a+b)\big) + b\big(a(a+b)+b(a+b)\big)\\ &= a\big((aa+ab)+(ba+bb)\big) + b\big((aa+ab)+(ba+bb)\big)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb.\end{aligned}$$

Come si vede, la terza potenza di $a+b$ si ottiene sommando tutti i possibili prodotti con tre fattori scelti tra a e b (tenendo conto dell'ordine dei fattori). A questo punto possiamo usare il fatto che a e b commutano e quindi, ad esempio, $aab = aba = baa = a^2b$, per raccogliere addendi uguali e riscrivere l'uguaglianza in forma più compatta: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Passiamo ora alla dimostrazione vera e propria. Qualunque sia l'intero positivo n, segue dalla proprietà distributiva che $(a+b)^n$ è la somma di tutti i possibili prodotti $u_1u_2u_3\dots u_n$ con n fattori ciascuno dei quali sia o a oppure b. Poiché $ab = ba$, ciascuno di questi prodotti si può riscrivere riordinando gli n fattori in modo da far apparire prima tutti i fattori a e poi i fattori b. Supponiamo che il numero di questi ultimi sia i; poiché il numero totale dei fattori è n, ci saranno allora esattamente $n-i$ fattori a; il prodotto sarà dunque $a^{n-i}b^i$ (ad esempio, se $n = 5$, il prodotto $abaab$ si può scrivere come a^3b^2). A questo punto sappiamo che $(a+b)^n$ è somma di prodotti della forma $a^{n-i}b^i$, ci serve solo scoprire quante volte appare ciascuno di essi in questa somma. In altri termini, fissato un intero i compreso tra 0 e n, dobbiamo calcolare in quanti modi possiamo scrivere prodotti del tipo $u_1u_2u_3\dots u_n$ (descritti come sopra) con fattori a o b in modo che il fattore b appaia esattamente i volte. Se questa proprietà è realizzata, allora l'insieme $\big\{\lambda \in \{1,2,\dots,n\} \mid u_\lambda = b\big\}$ è una i-parte di $\{1,2\dots,n\}$, viceversa, se X è una qualsiasi i-parte di $\{1,2,\dots,n\}$, allora ponendo $u_\lambda = b$ se $\lambda \in X$ e $u_\lambda = a$ se $\lambda \in \{1,2,\dots,n\} \smallsetminus X$ si ha che $u_1u_2u_3\dots u_n$ è uno dei prodotti del tipo descritto in cui b appare precisamente i volte. Dunque, il numero di tali prodotti è uguale al numero delle i-parti di $\{1,2,\dots,n\}$, cioè $\binom{n}{i}$. Questo vuol dire che si ottiene $(a+b)^n$ come una somma in cui appare una volta a^n (essendo $1 = \binom{n}{0}$), $n = \binom{n}{1}$ volte $a^{n-1}b$, $\binom{n}{2}$ volte $a^{n-2}b^2$, ..., $n = \binom{n}{n-1}$ volte ab^{n-1} e una volta b^n, perché $1 = \binom{n}{n}$. Questa è proprio la formula che stavamo cercando di dimostrare. $\square$

La formula di Newton vale, in particolare, per qualsiasi coppia di elementi a, b di un anello commutativo. È bene però osservare esplicitamente che essa non vale (in anelli non commutativi) nel caso in cui i due elementi a e b non commutino. Ad esempio, calcolando il quadrato di $a+b$ potremo certamente osservare che $(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2$, ma se $ab \neq ba$ questo elemento sarà certamente diverso da $a^2+2ab+b^2$.