

**Corso di Laurea in Informatica — Corso di Algebra (I gruppo)**  
**Esercizi — Tautologie, Insiemi, Aritmetica**

1. Quali delle seguenti sono tautologie?
  - a.  $(a \vee \neg b) \iff (a \implies b)$
  - b.  $(a \vee \neg b) \iff (b \implies a)$
  - c.  $((a \implies b) \wedge (\neg a \implies b)) \implies (c \implies b)$
2. Stabilire quali tra le seguenti sono vere per ogni possibile scelta degli insiemi  $A, B, C$ . Utilizzare, se lo si ritiene opportuno, diagrammi di Euler-Venn.
  - a.  $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$
  - b.  $(B \cup C) - A = (B - A) \cup (C - A)$
  - c.  $A \cup B = A \iff A \cap B = B$
  - d.  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
3. Dire quali delle seguenti sono corrette definizioni di applicazioni. Tra le applicazioni quali sono iniettive, suriettive, biettive?
  - a.  $n \in \mathbb{N} \mapsto n - 1 \in \mathbb{N}$
  - b.  $n \in \mathbb{Z} \mapsto n - 1 \in \mathbb{Z}$
  - c.  $n \in \mathbb{Z} \mapsto 7n - n^2 \in \mathbb{Z}$
  - d.  $n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} 3^n \cdot 5^{n+1}, & \text{se } n \notin 2\mathbb{N} \\ 7n/2, & \text{se } n \in 2\mathbb{N} \end{cases} \in \mathbb{N}$
  - e.  $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto (X \cup \{13, 14\}) - Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
  - f.  $n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} 2n, & \text{se } 3|n \\ n - 4, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2n + 5, & \text{se } n \equiv -1 \pmod{3} \end{cases} \in 3\mathbb{Z}$
4. Siano  $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto |n| + 1 \in \mathbb{N}^\#$  e  $g : m \in \mathbb{N}^\# \mapsto (m - 1)^2 + 2 \in \mathbb{N}$ . Scrivere l'applicazione composta  $fg$  e decidere se  $f, g$  e  $fg$  sono applicazioni iniettive, suriettive, biettive. Ripetere lo stesso esercizio sostituendo  $f$  con  $h : n \in \mathbb{Z} \mapsto 3n^2 + 2 \in \mathbb{N}^\#$ .
5. Determinare un massimo comun divisore per ciascuna delle seguenti coppie di numeri interi:
  - a. 155 e 688
  - b. 1237 e 1299
  - c. 2041 e -4472
  - d. 204100 e 447200
6. Provare che per ogni  $n \in \mathbb{N}^\#$  i numeri  $n$  e  $n + 1$  sono coprimi.
7. Senza eseguire calcoli, stabilire se 24 divide il prodotto  $2^{148} \cdot 3^{25} \cdot 5^{11} \cdot 7^{15} \cdot 17$ .
8. È possibile trovare due numeri interi  $a$  e  $b$  tali che 14 divida  $ab$  e 2 non divida né  $a$  né  $b$ ?
9. Trovare almeno una soluzione (in  $\mathbb{Z}$ ) di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali, laddove soluzioni esistano.
  - a.  $2x \equiv 3 \pmod{5}$
  - b.  $32x \equiv 18 \pmod{5}$
  - c.  $14x \equiv 3 \pmod{16}$
  - d.  $14x \equiv 4 \pmod{16}$
10. Trovare tutte le soluzioni (in  $\mathbb{Z}$ ) di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali, laddove soluzioni esistano.
  - a.  $2x \equiv 3 \pmod{7}$
  - b.  $14x \equiv 15 \pmod{81}$
  - c.  $171x \equiv 20 \pmod{300}$
  - d.  $735x \equiv 105 \pmod{4160}$
11. Determinare, se esistono, due interi  $u$  e  $v$  tali che:
  - a.  $735u + 416v = 105$
  - b.  $57u + 33v = 72$
  - c.  $81u + 234v = 18$
12. Sono le 10 di mattina. Che ora sarà tra  $47^{226}(5^{28} + 21 \cdot 32) + 24004$  ore?