Corso di Laurea in Informatica — Corso di Algebra (I gruppo)
Esercizi — Polinomi e Strutture Algebriche

1. Determinare il massimo comun divisore monico in $\mathbb{Q}[x]$ per ciascuna della seguenti coppie di polinomi:
a. $x^{10}+1$ e x^7+1;
b. $x^{10}-1$ e x^7-1;
c. x^4-x-2 e $3x^3+6x^2-3$;
d. $2x^4+3x^3-2x-3$ e $2x^6+3x^5+2x^3+3x^2-2x-3$;

2. Determinare, se esistono, polinomi u e v in $\mathbb{Q}[x]$ tali che:
a. $(x^{10}+1)u+(x^7+1)v=1$;
b. $(x^{10}+1)u+(x^7+1)v=x$;
c. $(x^{10}-1)u+(x^7-1)v=1$;
d. $(x^{10}-1)u+(x^7-1)v=2x-2$;
e. $(x^5+2)u+(x^4-1)v=3$.

3. [*Da affrontare dopo aver completato lo studio dei polinomi*] Sia $f=x^3-x^2-2x+2\in\mathbb{Q}[x]$. Dopo aver verificato che 1 è radice di f, scrivere $f\ldots$
a. … come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$;
b. … come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{R}[x]$.

4. Studiare le seguenti operazioni, stabilendo per ciascuna di esse se è un'operazione associativa, commutativa, se ammette elemento neutro.
a. $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longmapsto n-m\in\mathbb{Z}$;
b. $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longmapsto y\in\mathbb{N}$;
c. $(A,B)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\longmapsto\mathbb{N}\smallsetminus(A\cup B)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$;
d. $(X,Y)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\longmapsto X\cup\{1\}\cup Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

5. Considerare le operazioni binarie $\oplus$ e $\odot$ definite in $\mathbb{Z}$ da: $\forall\,u,v\in\mathbb{Z}$

$$u\oplus v:=u+v+1;\qquad\qquad u\odot v:=uv+u+v.$$

Decidere se $\mathbb{Z}$ munito di queste due operazioni è un anello. Nel caso, stabilire se si tratta di un anello commutativo, di un anello unitario, di un anello booleano, di un campo e calcolarne la caratteristica.

6. Tra i seguenti anelli dire quali sono unitari, quali commutativi, quali integri, quali campi:

$$\mathbb{Z}_{13},\quad \mathbb{Z}_{14},\quad \mathbb{Z}_{15},\quad 3\mathbb{Z},\quad \mathbb{Z},\quad \mathbb{Z}[x],\quad \mathbb{Z}_3[x],\quad \mathbb{Z}_4[x],\quad \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

7. Per ciascuno dei seguenti anelli elencare gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti, gli elementi idempotenti: $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}$, $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

8. [*Da affrontare dopo aver completato lo studio dei polinomi*] Determinare tutte le radici in $\mathbb{Z}_{12}$ del polinomio $x^2-1\in\mathbb{Z}_{12}[x]$. Se il loro numero non sembra sorprendente o si è studiato troppo poco oppure piuttosto bene. Rifletterci sopra.

9. Date comunque quattro parti A, B, C, D di $\mathbb{R}$ si ponga

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a\in A,\ b\in B,\ c\in C,\ d\in D \right\}.$$

Si ponga anche $\mathbf{0}:=\{0\}$ e $\mathbf{1}:=\{1\}$. Per ciascuna delle seguenti parti dell'anello $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 su $\mathbb{R}$ stabilire se si tratta o meno di un sottoanello, di un sottoanello unitario, di un ideale destro, di un ideale sinistro di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, di un sottogruppo del gruppo additivo di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbb{Q} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{R} \\ \mathbf{0} & \mathbb{Z} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{Q} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{R} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbb{R} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Ripetere lo stesso esercizio per l'anello $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ e le sue parti

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbb{Z} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbb{Z} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1+3\mathbb{Z} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3\mathbb{Z} & 5\mathbb{Z} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3\mathbb{Z} & 3\mathbb{Z} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{N} \\ \mathbf{0} & \mathbb{N} \end{pmatrix}.$$

10. Con notazioni analoghe a quelle dell'esercizio precedente stabilre se, munito del prodotto righe per colonne, l'insieme $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbb{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$ costituisce un gruppo e quali tra $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbb{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbb{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbb{N}^{\#} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & 1+3\mathbb{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$ ne sono sottogruppi. Quali tra i precedenti sono parti stabili (quindi semigruppi) e quali monoidi?