ESERCIZI

1. Scrivere le tavole di verità di queste forme proposizionali e decidere quali tra esse sono tautologie:
$p \vee (p \Rightarrow q)$; $(p \vee q) \Rightarrow p$; $(p \text{ XOR } q) \Rightarrow p$; $(p \wedge q) \Rightarrow p$; $(p \vee q) \Rightarrow r$; $(p \wedge q) \Rightarrow r$.

2. Di ciascuna di queste forme proposizionali si decida se è una tautologia, se è contingente, se è una contraddizione; non è necessario scriverne la tavola di verità:

$$p \iff (p \iff p); \qquad (p \text{ XOR } q) \iff ((\neg q) \iff p); \qquad ((\neg p) \Rightarrow q) \iff ((\neg q) \Rightarrow p);$$

$$\big((p_1 \Rightarrow q) \vee (p_2 \Rightarrow q) \vee (p_3 \Rightarrow q) \vee (p_4 \Rightarrow q) \vee (p_5 \Rightarrow q)\big) \Longrightarrow \big((p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5) \Rightarrow q\big);$$

$$\big((p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5) \Rightarrow q\big) \Longrightarrow \big((p_1 \Rightarrow q) \vee (p_2 \Rightarrow q) \vee (p_3 \Rightarrow q) \vee (p_4 \Rightarrow q) \vee (p_5 \Rightarrow q)\big);$$

$$\big((p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge (p_3 \Rightarrow q) \wedge (p_4 \Rightarrow q) \wedge (p_5 \Rightarrow q)\big) \iff \big((p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5) \Rightarrow q\big);$$

3. Negare le frasi (o le formule, dove $\varphi, \psi, \theta, \eta$ indicano predicati):

(i) Se Aldo incontra Bice, Carlo va in bicicletta e Dario lo insegue;
(ii) Ogni mese dell'anno prossimo ci sarà un giorno in cui pioverà;
(iii) Esiste, in Italia, una città in cui se il sindaco è alto più di due metri allora ogni abitante è biondo;
(iv) $\big((\forall x)(\varphi(x))\big) \Longrightarrow \big((\exists y)(\psi(y))\big)$;
(v) $(\forall x)\big(\exists y\big((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \Rightarrow (\theta(x,y) \vee \eta(y))\big)\big)$.

4. Rappresentare con diagrammi di Euler-Venn le espressioni insiemistiche $(A \cup B) \smallsetminus C$, $(A \smallsetminus B) \triangle (B \smallsetminus C)$, $(A \triangle C) \triangle B$ e $(A \smallsetminus C) \triangle B$. Decidere poi quali tra queste formule sono vere e quali false, fornendo per quelle false un controesempio esplicito:

(i) $(\forall A, B, C)\big((A \cup B) \smallsetminus C \subseteq (A \smallsetminus B) \triangle (B \smallsetminus C)\big)$;
(ii) $(\forall A, B, C)\big((A \smallsetminus B) \triangle (B \smallsetminus C) \subseteq (A \cup B) \smallsetminus C\big)$;
(iii) $(\forall A, B, C)\big((A \triangle C) \triangle B \subseteq (A \smallsetminus C) \triangle B\big)$;
(iv) $(\forall A, B, C)\big((A \smallsetminus C) \triangle B \subseteq (A \triangle C) \triangle B\big)$.

Vero o falso: $(\exists A, B, C)\big((A \smallsetminus C) \triangle B = C\big)$?

5. Vero o falso?

(i) $13 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0 \text{ XOR } x < 0\}$;
(ii) $-5 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0 \Rightarrow x = 7\}$;
(iii) $\{x \mid x = x \Rightarrow x \neq x\} = \{x \mid x = x \wedge x \neq x\}$;
(iv) $(\exists x)(x \in \varnothing)$;
(v) $(\exists x)(x \in \{\varnothing\})$;
(vi) $(\exists x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}))(x \in \{\varnothing\})$;
(vii) $(\exists x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}))(x \notin \{\varnothing\})$;
($viii$) $(\forall x, y)\big(\{x, y\} = \{y, x\}\big)$;
(ix) $(\forall x, y)\big((x, y) = (y, x)\big)$;
(x) $(\exists x, y)\big((x, y) = (y, x)\big)$;

6. Siano, per ogni $i \in \mathbb{Z}$, $X_i = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq i\}$ e $Y_i = \{n \in \mathbb{Z} \mid i \leq n\}$; sia poi $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Calcolare:

$$X_0; \qquad X_3 \cap Y_7; \qquad X_3 \cup Y_{-1}; \qquad X_0 \triangle Y_1; \qquad A \cap Y_{12}; \qquad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i; \qquad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i.$$

7. Quali tra queste sono bene definite come applicazioni e quali sono applicazioni suriettive?

(i) $n \in \mathbb{N} \mapsto -3n/2 \in \mathbb{Z}$

(ii) $n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ n-1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \in \mathbb{Z}$

(iii) $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto X \cup \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

(iv) $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto X \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

(v) $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto X \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

(vi) $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto X \vartriangle \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

(vii) $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{Z} \smallsetminus X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Avendo posto $\mathcal{C}(\mathbb{Z}) = \{\{a,b\} \mid a,b \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})\}$:

($viii$) $\{a,b\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}) \mapsto a \cap (b \cap \mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

(ix) $\{a,b\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}) \mapsto a \cap (b \cap \mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

(x) $\{a,b\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}) \mapsto a \cap (b \cup \mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Avendo posto $M = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$, l'insieme delle applicazioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$:

(xi) $f \in M \longmapsto f(3) \in \mathbb{N}$

(xii) $f \in M \longmapsto (f(3))^2 \in \mathbb{N}$

($xiii$) $f \in M \longmapsto f(3) \in \mathbb{Z}$

(xiv) $f \in M \longmapsto f(3) + 1 \in \mathbb{Z}$.

8. Descrivere in modo esplicito $h = g \circ f$ e stabilire quali tra f, g e h sono suriettive nei seguenti casi:

(i) Posto $S = \{1,2\}$ e $T = S \cup \{3\}$, $f\colon S \to S$ e $g\colon S \to T$ definite da: $f(1) = 2 = g(1)$ e $f(2) = 1 = g(2)$ (domanda supplementare: si ha $f = g$?);

(ii) $f\colon n \in \mathbb{Z} \mapsto \{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ e $g\colon X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{N} \smallsetminus X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

(iii) $f\colon n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2 + 1 \in \mathbb{Z}$ e $g = f$;

(iv) $f\colon n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2 + 3 \in \mathbb{N}$ e $g\colon n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} 3n & \text{se } n > 2 \\ n^3 & \text{se } n \leq 2 \end{cases} \in \mathbb{Z}$.

9. Si studino le operazioni binarie qui definite, cercando di stabilire se sono commutative, associative, se ammettono elementi neutri a destra, elementi neutri a sinistra, elementi neutri, quali elementi della struttura algebrica che definiscono sono simmetrizzabili a destra, simmetrizzabili a sinistra, simmetrizzabili; che tipo di struttura algebrica è quella ottenuta:

(i) l'operazione potenza: $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a^b \in \mathbb{N}$, [1]

(ii) le operazioni $*$, $\odot$ e $\bullet$ definite in $\mathbb{Z}$ da:

$$(\forall a,b \in \mathbb{Z}) \quad \Big(\quad a * b = 2a + b \quad \wedge \quad a \odot b = 2 + a + b \quad \wedge \quad a \bullet b = ab + 2(a+b+1) \quad \Big);$$

(iii) in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, l'operazione $*$ definita da: $(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}))(A * B = (A \smallsetminus \{1\}) \cap B)$;

(iv) in $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, le operazioni $*$, $\odot$ e $\bullet$ definite da: $\forall a,b,x,y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$(a,b) * (x,y) = (a \cup y, b \cap y)$$
$$(a,b) \odot (x,y) = (a \cup x, b \cap y)$$
$$(a,b) \bullet (x,y) = (a \cup y, b \cap x)$$

Per ciascuna delle operazioni definite in (ii), si stabilisca quali tra $\mathbb{N}$, $2\mathbb{Z}$ (l'insieme dei numeri interi pari), $\mathbb{Z} \smallsetminus 2\mathbb{Z}$ (l'insieme dei numeri interi dispari) sono, rispetto all'operazione data, parti chiuse. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è chiusa rispetto all'operazione definita in (iii)? Rispetto a quali delle operazioni definite in (iv) è chiusa $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \{\{3\}\}$?

[1] a scanso di equivoci: 0^0 è definito come 1.