

Logica rudimentale

GIOVANNI CUTOLO

1. Premesse	1	5. Quantificatori	13
2. Connettivi proposizionali	2	Variabili libere e vincolate	14
Negazione	2	Quantificatori ristretti	16
Congiunzione	2	6. Qualche regola d'uso	17
Tavole di verità	2	Quantificatori multipli	17
Disgiunzione (inclusiva)	3	Negazione di quantificatori	18
Equivalenza, o Doppia implicazione	4	Un errore da evitare	19
Implicazione	4	7. Insiemi	19
3. Tautologie	6	Formule insiemistiche	21
Alcune tautologie elementari	7	Ancora De Morgan	22
Distributività	8	Differenza simmetrica	22
Leggi di De Morgan	9	Parti di un fissato insieme	23
Tautologie sulla implicazione	9		
4. Altri connettivi binari	11		

1. PREMESSE

Lo scopo di queste note è quello di dare alcune indicazioni sull'uso corretto dei simboli logici utili, o piuttosto necessari, nello studio della matematica. Una vera e propria (e più rigorosa) introduzione alla logica va al di là degli obiettivi del corso di Algebra ed è rimandata a corsi degli anni successivi e della laurea magistrale.

Molto informalmente, ci limitiamo qui a dire che ogni teoria matematica è espressa in quello che si chiama un *linguaggio*, che è costituito (1) da un alfabeto di simboli (semplicemente, dei caratteri tipografici), che possono essere messi insieme per costituire parole (stringhe di caratteri) e (2) da regole *sintattiche* che permettano, tra l'altro, di distinguere tra stringhe “correttamente composte”, che si chiamano *formule* e stringhe che non sono correttamente composte. L'aggettivo ‘sintattiche’ indica che le regole riguardano solo le modalità di manipolazione formale dei simboli e non fanno alcun riferimento a ciò che questi simboli intendono rappresentare.

Spero che un esempio possa aiutare a chiarire la nozione di formula. Il linguaggio di una teoria che voglia descrivere l'usuale aritmetica dei numeri interi potrebbe contenere dei simboli per indicare variabili (ad esempio, “ x ”, “ y ”, “ z ”, ...), alcuni simboli che indichino costanti (come “0” e “1”), operazioni (ad esempio, “+”, “·”, “−”), relazioni (come “<”, ma anche, su un piano diverso, “=”). Le regole sintattiche saranno probabilmente scritte in modo che stringhe come “ $x + 1 = y$ ” oppure “ $x \cdot y < 1 + z$ ” siano formule (*ben formate*, come anche si usa dire), mentre “ $x <$ ”, “ $x == \cdot y$ ” oppure “ $x + y$ ” non lo siano.¹

È utile ribadire che la sintassi prescinde completamente dall'interpretazione dei simboli utilizzati nel linguaggio, e va tenuta ben separata da questa interpretazione. Ad esempio, non è affatto detto che i simboli che appaiono nel linguaggio dell'aritmetica appena richiamato debbano davvero essere interpretati come i nostri abituali numeri interi, che “+” debba indicare la consueta addizione, che le costanti “0” e “1” rappresentino necessariamente i familiari numeri zero ed uno, e così via. La parte della logica che si occupa di queste “interpretazioni” si chiama *semantica* e, in una trattazione rigorosa, va tenuta sempre ben distinta dalla sintassi.

¹Osserviamo di passaggio che le regole sintattiche di un linguaggio hanno anche lo scopo di distinguere, tra le possibili stringhe, i cosiddetti *termini*, che così come i simboli di variabile e di costante intendono rappresentare gli oggetti “di cui parla” la teoria; nel nostro esempio i numeri interi. Delle tre stringhe che non sono formule appena mostrate, le prime due non sono termini, l'ultima (“ $x + y$ ”) invece lo è.

Una delle nozioni semantiche fondamentali, che siamo abituati a dare per scontata, è quella di verità o falsità di una affermazione. Ad esempio, facendo ancora riferimento all'aritmetica, con le consuete interpretazioni dei simboli che qui appaiono, siamo abituati a considerare vera la formula “ $0 < 1$ ” e falsa la formula “ $0 + 0 = 1$ ”. Abbiamo qualche perplessità, invece, a proposito di “ $x > 1 + 1$ ” (dove x è una variabile); diremmo che il valore di verità (cioè se essa è vera o falsa) di questa formula *dipende* (qualsiasi cosa ciò significhi) da x ; quindi questa formula non ha un valore di verità nel senso più intuitivo.

Esiste una classe di formule alle quali, in modo piuttosto ragionevole, è sempre possibile in linea di principio, attribuire un valore di verità. Queste sono le cosiddette *formule chiuse*, che vengono anche chiamate *proposizioni*,² o sentenze (con una discutibile traduzione dell'inglese *sentences*).

Daremo solo *più avanti* una definizione di formula chiusa (e sarà comunque una definizione piuttosto approssimativa; la definizione precisa di formula chiusa richiede tecnicismi di cui in queste note è bene fare a meno). Per ora ci accontentiamo di sapere che sono chiuse tutte le formule ben formate in cui non appaiano variabili (ma, attenzione!, come vedremo esistono formule chiuse contenenti variabili). Delle tre formule esibite poco sopra, sono chiuse le prime due (“ $0 < 1$ ” e “ $0 + 0 = 1$ ”, che non contengono variabili) ma non la terza (“ $x > 1 + 1$ ”).

È interessante sapere che la nozione di formula chiusa è sintattica, non semantica; ad essere rigorosi avremmo dovuto introdurre questa nozione prima di quelle semantiche di interpretazione e di verità.

2. CONNETTIVI PROPOSIZIONALI

Ogni linguaggio contiene dei simboli, i cosiddetti simboli logici, che permettono di costruire formule a partire da formule più semplici. Tra i simboli logici appaiono di regola (alcuni dei) *connettivi proposizionali*, che presenteremo in questa sezione. Il nostro punto di vista sarà essenzialmente semantico: descriveremo i connettivi proposizionali guardando a come essi influenzano i valori di verità delle proposizioni in cui appaiono. È appena il caso di ripetere che ci stiamo discostando da quanto sarebbe richiesto da una trattazione rigorosa.

Negazione. Il connettivo più semplice da descrivere è quello di negazione: \neg , che si indica anche con NOT o talvolta con \sim e che possiamo semplicemente leggere come “non”. Se p è una formula allora $\neg p$ (oppure $\neg(p)$; anche le parentesi, usate come di consueto per suggerire come vadano raggruppati i simboli, sono spesso comprese nell'alfabeto di un linguaggio) è anch'essa una formula. Se p è una proposizione vera, allora $\neg p$ sarà una proposizione falsa; se p è falsa, allora $\neg p$ è vera. Detto in modo più sintetico, il connettivo di negazione ha come argomento una sola formula (questo fatto si esprime dicendo che la negazione è un connettivo *unario*) ed inverte il valore di verità del suo argomento.³

Congiunzione. Il connettivo di congiunzione si indica con \wedge (oppure con AND) ed è, come tutti quelli che definiremo di seguito, un connettivo *binario*, vale a dire: richiede due formule come argomenti. Se p e q sono proposizioni, $p \wedge q$ è una proposizione che è vera quando sono vere sia p che q , falsa altrimenti. Dunque, \wedge corrisponde alla congiunzione “e” del linguaggio ordinario, e possiamo leggere $p \wedge q$ come “ p e q ”.

Tavole di verità. La semantica dei connettivi appena introdotti è sintetizzata, in modo molto efficace, da *tavole* (o *tabelle*) di verità:

p	$\neg p$
V	F
F	V

negazione

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

congiunzione

Vediamo di cosa si tratta. Ciascuna delle due tavole è divisa in due parti. La parte destra consiste di una colonna, la cui intestazione è una formula ($\neg p$ per la prima tavola, $p \wedge q$ per la seconda); in questa

²avvertenza: alcuni autori usano il termine ‘proposizione’ come sinonimo di ‘formula’, non necessariamente chiusa.

³ad essere più precisi, dovremmo aggiungere la condizione che il valore di verità dell'argomento sia definito.

colonna andrà letto il valore di verità della formula. Nelle formule che stiamo esaminando appaiono delle variabili (p e q), che rappresentano proposizioni. Nella parte sinistra di ciascuna delle tavole abbiamo una colonna per ogni variabile che appare nella formula considerata (quindi solo una colonna, intestata da p , per la prima tavola; due colonne, intestate da p e q , per la seconda). Guardiamo alla prima tavola, quella della negazione. I valori di verità possibili per la variabile p sono ovviamente due: vero (V) e falso (F). In corrispondenza di questi due possibili valori abbiamo due righe: la prima ci dice (guardando la colonna destra) che la formula $\neg p$ è falsa quando p è vera, la seconda che $\neg p$ è vera quando p è falsa, in accordo con quanto avevamo detto definendo il connettivo \neg . La seconda tavola ha invece quattro righe, perché la formula $p \wedge q$ ha due variabili e le combinazioni possibili per i valori di verità di due variabili sono quattro. Nell'ordine in cui appaiono nella tavola, le possibilità sono: (1) p e q sono entrambe vere; (2) p è vera e q è falsa; (3) p è falsa e q è vera; (4) p e q sono entrambe false. Anche qui ciascuna riga riporta, nella colonna di destra, il valore di verità della formula (in questo caso $p \wedge q$) in funzione dei valori di verità di p e q che appaiono, nella stessa riga, a sinistra. Come si vede, la tavola fornisce, anche in questo caso, esattamente le stesse informazioni che avevamo dato come definizione (semantica) di \wedge .

Completiamo questa introduzione alle tavole di verità con un minimo di terminologia e qualche indicazione ulteriore. Le variabili (come p e q , nei nostri esempi) che rappresentano proposizioni vengono chiamate *variabili proposizionali*; le formule costituite da variabili proposizionali, connettivi proposizionali (i due già definiti e quelli che stiamo per definire) e parentesi si chiamano *forme proposizionali*. Il *calcolo proposizionale* è la parte della logica che studia le forme proposizionali.

Come si può facilmente immaginare, esistono tavole di verità più complesse delle due che abbiamo esibito. Incontreremo tavole di verità che descrivono contemporaneamente più forme proposizionali, e quindi hanno più di una colonna nella parte destra, non solo una come nei nostri esempi. Incontreremo anche tavole che descrivono forme proposizionali con più di due variabili. È utile verificare (esercizio!) e ricordare poi che la tavola di verità di una forma proposizionale con un numero k di variabili richiede 2^k righe, perché 2^k è il numero di possibili combinazioni di valori di verità per k variabili.

Esercizi.

A.1. Scrivere le tavole di verità di ciascuna delle forme proposizionali: " $p \wedge p$ ", " $(\neg p) \wedge q$ " e " $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ".

A.2. Scrivere le tavole di verità delle forme proposizionali " $p \wedge (q \wedge r)$ " e " $p \wedge (q \wedge (\neg r))$ ".

Riprendiamo ora nostra lista di connettivi proposizionali binari. Come nel caso di \wedge , anche per i successivi vale questa regola sintattica: se p e q sono formule e $*$ un connettivo binario allora $p * q$ è una formula. Inoltre, se p e q sono proposizioni allora $p * q$ è una proposizione ed il suo valore di verità dipende solo dal connettivo $*$ e dai valori di verità di p e q .

Disgiunzione (inclusiva). Il connettivo di *disgiunzione* si indica con \vee o con OR. Da un punto di vista formale la sua descrizione è altrettanto semplice che quella della congiunzione, ma nell'uso la disgiunzione presenta qualche difficoltà in più. La ragione è che questo connettivo corrisponde ad uno dei significati che la particella⁴ "o" ha in italiano (ovvero, che "or" ha in inglese). Il problema è, appunto, che nel linguaggio corrente "o" può assumere più significati, che hanno valore logico molto diverso.⁵ Il significato che viene attribuito al connettivo proposizionale \vee in matematica è quello, come si dice, *inclusivo*, per il quale, se p e q sono proposizioni, la forma $p \vee q$ è vera a condizione che *almeno una* tra p e q sia vera, ed è falsa nell'altro caso, cioè quando sia p che q siano false. La tavola di verità che definisce questo connettivo è dunque:

⁴secondo la grammatica della lingua italiana questa 'particella' è una congiunzione, ma evitiamo di chiamarla così per non fare confusione con il connettivo proposizionale \wedge , che abbiamo chiamato congiunzione.

⁵la necessità di rimuovere questo genere di ambiguità che sono proprie del linguaggio naturale è uno dei motivi per i quali, nel discorso scientifico, si deve utilizzare un linguaggio almeno parzialmente formalizzato.

disgiunzione (inclusiva)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Mettiamo in evidenza che $p \vee q$ risulta vera anche quando p e q sono entrambe vere. Invece, se il menu turistico della trattoria prevede una portata di carne o una di pesce, possiamo esser certi che l'oste non intende questo "o" come una disgiunzione inclusiva, ma come quella che si chiama una disgiunzione *esclusiva*: il cliente ha diritto ad avere un piatto di carne oppure uno di pesce, ma non entrambi. Sulla disgiunzione esclusiva (indicata con $\dot{\vee}$, oppure con XOR) torneremo **più avanti**; per ora diciamo che i valori di verità di $p \vee q$ e $p \dot{\vee} q$ differiscono solo nel caso in cui p e q siano entrambe vere; in questo caso $p \vee q$ è vera, $p \dot{\vee} q$ è falsa. Come detto, in italiano (e in inglese, ed in altre lingue) purtroppo sia la disgiunzione inclusiva che quella esclusiva sono rese dalla stessa particella ("o", "or" etc.), ma qualcuno probabilmente ricorda che in latino questi due connettivi sono ben distinti anche nel linguaggio ordinario: *vel* esprime la disgiunzione inclusiva, *aut* quella esclusiva.⁶

È importante insistere (da parte di chi scrive) e ancora di più ricordare (da parte di chi legge) che in matematica, e generalmente nel linguaggio scientifico, *per disgiunzione si intende sempre la disgiunzione inclusiva*. Confusione su questo punto porta invariabilmente a pericolose incomprensioni e macroscopici errori.

Equivalenza, o Doppia implicazione. Questo connettivo, chiamato anche *bicondizionale* e indicato con \Leftrightarrow oppure con \leftrightarrow , si potrebbe definire in termini dell'implicazione, che verrà descritta tra poco, ma è molto semplice da descrivere in modo diretto. Se p e q sono proposizioni, " $p \Leftrightarrow q$ " (che viene letta come " p se e solo se q ", oppure " p equivale a q ") è vera se p e q hanno lo stesso valore di verità, falsa altrimenti. La relativa tavola di verità è dunque:

equivalenza		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Implicazione. Questo connettivo è chiamato anche *condizionale* e si indica con \Rightarrow o con \rightarrow . Ancora più che la disgiunzione, esso presenta delle difficoltà dovute al fatto che l'uso che se fa in logica non combacia con l'uso suggerito dal linguaggio ordinario. Se p e q sono formule, la formula " $p \Rightarrow q$ ", o meglio la sua espressione verbale: "se p allora q " nel linguaggio quotidiano presuppone che ci sia un qualche nesso tra p e q che faccia apparire q come conseguenza di p . Ad esempio, "se piove allora non esco di casa" appare una frase del tutto naturale: si intende che il fatto che io non esca di casa dipende proprio dalla pioggia. Invece, la frase "se piove allora il Vesuvio è alto più di mille metri sul livello del mare" sembra priva di senso, per chi non ha studiato logica. Chi invece lo ha fatto ed è disposto a trasportare al linguaggio quotidiano i modi di espressione del linguaggio formale potrà convenire che la frase, per quanto di genere poco usuale, presa alla lettera non solo un senso lo ha ma è addirittura vera, come stiamo per vedere.

La tavola di verità che definisce l'implicazione è:

⁶a titolo di (forse comunque istruttiva) curiosità menzionamo il fatto che "o" può assumere in italiano almeno un altro significato. Se le richieste del piccolo Pasqualino superano un certo livello di soglia, la mamma potrà cercare di arginarle dicendogli che può avere "o il gelato o la pizzezza". Probabilmente in questo caso la mamma intende solo dire che non può avere entrambe le cose, ma che è più che soddisfatta se Pasqualino rinuncia ad entrambe. In questo caso, dunque, "o" esprime il connettivo **NAND** (negazione della congiunzione) a cui faremo cenno in seguito.

implicazione		
p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dunque, la formula $p \Rightarrow q$ (dove p e q sono proposizioni) è vera sempre tranne che nel caso in cui p (che si chiama *antecedente* dell'implicazione⁷) è vero e q (che si chiama *conseguente* dell'implicazione) è falso. Mentre più o meno tutti sono subito d'accordo con questa definizione nel caso in cui l'antecedente sia vero, quasi nessuno studente accetta di buon grado la seconda parte della definizione (data dalle ultime due righe della tavola di verità), cioè il fatto che la formula si consideri vera quando l'antecedente è falso (per giunta, indipendentemente dal valore di verità del conseguente!). Lo scopo dei prossimi paragrafi è quello di mostrare che questa definizione non solo non è frutto di una scelta capricciosa di qualcuno, ma è l'unica coerente con l'uso 'intuitivo' che dell'implicazione siamo sempre stati abituati a fare.

L'obiezione che spesso, in aula, gli studenti sollevano è che 'quando si sa già che p è falso la frase "se p allora q " (o la formula " $p \Rightarrow q$ ") non ha senso', e quindi non dovrebbe essere definito il suo valore di verità. E, inoltre, molti ritengono che se anche si deve proprio attribuire a questa frase un valore di verità sia innaturale la scelta di porla vera.

Non è così: una delle caratteristiche specifiche dei linguaggi formalizzati è, per così dire, l'indifferenza rispetto ai contenuti. La correttezza sintattica di una formula (come " $p \Rightarrow q$ "), ed il fatto che essa venga interpretata nella semantica (in parole semplici, il fatto che la formula 'abbia senso') deve poter essere stabilita una volta per tutte e non può dipendere da informazioni accessorie di cui possiamo disporre o meno, come il contenuto fattuale di p (e che sono magari soggette a cambiare col tempo e le circostanze⁸). Questo fatto è addirittura utile, altrimenti, a rigore, non potremmo neanche discutere di formule come " $p \Rightarrow q$ " se avessimo il dubbio che si possa dimostrare la falsità di p ; ad essere pignoli non sarebbero possibili in matematica le dimostrazioni per assurdo o per contrapposizione.

Detto ciò, perché le implicazioni con antecedente falso devono proprio essere vere? Spero che questo esempio chiarisca la ragione della definizione. Consideriamo la frase "per ogni numero intero x compreso tra 1 e 3 si ha che se $x > 2$ allora $x > 1$ ". Tutti concordiamo su fatto che questa frase è vera. Analizziamola; essa significa che tutte le implicazioni $x > 2 \Rightarrow x > 1$ ottenute sostituendo ad x uno dei numeri 1, 2, 3 sono vere. Dunque sono vere la proposizione Φ_1 : " $1 > 2 \Rightarrow 1 > 1$ ", la Φ_2 : " $2 > 2 \Rightarrow 2 > 1$ " e la Φ_3 : " $3 > 2 \Rightarrow 3 > 1$ ". Vediamo che la Φ_3 è del tipo 'non contestato': una implicazione in cui sia antecedente che conseguente sono veri, quindi vera, come indica il primo rigo della nostra tavola di verità. Le altre due proposizioni hanno invece l'antecedente falso. La Φ_1 è del tipo descritto dal quarto rigo della tavola di verità ('falso implica falso'), dal momento che sia l'antecedente ($1 > 2$) che il conseguente ($1 > 1$) sono falsi; la Φ_2 è del tipo descritto dal terzo rigo ('falso implica vero'). Se siamo d'accordo che sia ragionevole sostenere che la frase da cui siamo partiti ("per ogni numero intero x compreso tra 1 e 3 si ha che se $x > 2$ allora $x > 1$ ") sia vera, allora dobbiamo essere d'accordo anche sul fatto che siano (ragionevolmente) vere Φ_1 e Φ_2 , quindi che siano ragionevoli i valori di verità che appaiono nella nostra tabella e che abbiamo usato per definire l'implicazione.⁹

⁷con un piccolo, ma conveniente, abuso di linguaggio si usa chiamare implicazione sia il connettivo (\Rightarrow) che una formula come $\alpha \Rightarrow \beta$ (dove α e β siano a loro volta formule) in cui il connettivo appare. Similmente accade per gli altri connettivi: può capitare ad esempio di dire che la formula $\alpha \wedge \beta$ sia una congiunzione

⁸come caso limite, si pensi ad una formula che esprima una frase del tipo "se esiste un polinomio non nullo f a coefficienti razionali di cui il numero π è radice, allora ...". Accogliendo l'obiezione secondo cui una implicazione il cui antecedente sia (notoriamente) falso non ha senso, dovremmo concludere che questa frase aveva senso verso la metà dell'ottocento ma non lo ha più a partire dal 1882, anno in cui è stato dimostrato (da Ferdinand von Lindemann) che un polinomio come f non può esistere. O, peggio, non ha più senso per chi conosce il risultato di Lindemann, lo ha per chi non lo conosce. In un linguaggio formale non c'è posto per pasticci del genere.

⁹ad ulteriore conferma, se la frase di partenza fosse stata "per ogni numero intero x compreso tra 1 e 3 si ha che se $x > 1$ allora $x > 2$ ", la frase sarebbe stata falsa. Infatti, le tre proposizioni ottenute sostituendo ad x i numeri 1, 2, 3 non sono *tutte* vere: quella ottenuta ponendo 2 al posto di x , cioè " $2 > 1 \Rightarrow 2 > 2$ " è falsa, in accordo col secondo rigo della tavola, avendo l'antecedente vero ed il conseguente falso. Su questi esempi torneremo **più avanti** per chiarirli, si spera, ulteriormente.

Dunque le implicazioni con antecedente falso sono vere; osserviamo anche che sono vere le implicazioni con conseguente vero. In effetti, possiamo dire, sinteticamente, che una *implicazione è vera precisamente quando il suo antecedente è falso o il suo conseguente è vero*.

Esercizi ed Esempi.

B.1. Scrivere le tavole di verità di ciascuna delle forme proposizionali: “ $p \wedge (p \vee q)$ ”, “ $(p \wedge q) \wedge r$ ”, “ $(p \wedge q) \vee r$ ”.

B.2. Scrivere le tavole di verità di ciascuna delle forme proposizionali: “ $p \Rightarrow (p \vee q)$ ”, “ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ”, “ $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$ ”.

B.3. Stabilire i valori di verità delle formule e frasi (assumiamo nota la matematica elementare coinvolta): “ $(1 + 1 = 0) \vee (0 + 0 = 0)$ ”; “ $(1 + 1 = 0) \wedge (0 + 0 = 0)$ ”; “ $(1 + 1 = 0) \Rightarrow (0 + 0 = 0)$ ”; “ $\sqrt{2}$ è un numero razionale o un numero irrazionale”; “ $2^5 = 32 \Rightarrow 47 - 1 = 46$ ”.

B.4. È molto importante saper ‘tradurre’ espressioni del linguaggio ordinario (della lingua italiana che parliamo quotidianamente) in linguaggio ‘semiformalizzato’, riconoscendo la presenza ed il ruolo dei connettivi proposizionali contenuti nelle frasi. Ad esempio, se indichiamo con α la frase ‘domani pioverà’ e con β la frase ‘domani prenderò l’ombrello’, si può rendere con $\alpha \wedge \beta$ la frase ‘domani pioverà e prenderò l’ombrello’. Fare lo stesso per le frasi:

- Il supermercato era aperto e non ci sono entrato.
- Il supermercato era aperto ma non ci sono entrato.
- Se vedo Nicola lo saluto.
- Se domenica non piove e vado a Roma, $2 > 1$, ma se Marco mangia la pizza allora certamente fioriranno le rose.

B.5. Come nell’esercizio precedente, che struttura logica ha la frase: ‘Maria ha cucinato la torta, e Franco non l’ha vista oppure l’ha mangiata’? Scriviamo t per ‘Maria ha cucinato la torta’, v per ‘Franco ha visto la torta’ e m per ‘Franco ha mangiato la torta’. Se facciamo attenzione alla virgola che appare nella frase, concludiamo che questa frase si può rendere con $t \wedge ((\neg v) \vee m)$. Bene, come possiamo rendere: ‘Maria ha cucinato la torta e Franco non l’ha vista, oppure l’ha mangiata’? Le due frasi hanno necessariamente gli stessi valori di verità, oppure possono esserci circostanze in cui una è vera e l’altra falsa?

B.6. Spiegare la seguente (vecchia e non particolarmente esilarante) storiella: la moglie del logico chiede al marito: ‘Caro, stasera usciamo o restiamo a casa?’. Il marito risponde: ‘Sì’.

3. TAUTOLOGIE

Interrompiamo la lista dei connettivi per introdurre alcune importanti nozioni. Consideriamo una forma proposizionale Φ e supponiamo che p, q, r, \dots siano le variabili proposizionali che *possono* apparire in Φ (quest’ultimo fatto si può esprimere scrivendo $\Phi(p, q, r, \dots)$ per Φ). Se attribuiamo un valore di verità (V o F) a ciascuna delle variabili in Φ (in modo consistente, ovviamente: ad esempio sempre lo stesso valore per ogni occorrenza della p) possiamo calcolare il valore di verità di Φ in funzione di quelli attribuiti a p, q, r, \dots : è quello che facciamo quando scriviamo una tavola di verità. Si dice che Φ è una tautologia se e solo se il valore di verità di Φ così calcolato è V , indipendentemente dai valori attribuiti alle variabili che appaiono in Φ . In altri termini, Φ è una tautologia se e solo se, nella tavola di verità che la descrive, la colonna intestata da Φ contiene esclusivamente V . Alcuni esempi banali di tautologie sono le forme “ $p \Rightarrow p$ ” e “ $p \Leftrightarrow p$ ”; un altro, che esprime il *principio del terzo escluso*, di cui qualcuno potrebbe avere memoria scolastica, è la forma “ $p \vee (\neg p)$ ”. Per quanto facile, verifichiamo questa tautologia usando una tavola di verità:

terzo escluso		
p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

Come già *minacciato*, abbiamo qui una tavola di verità in cui la parte destra contiene più di una colonna: la prima contiene i valori di verità della sottoformula $\neg p$, usati come passaggio intermedio nel calcolo:

prima si è calcolata questa colonna a partire dalla colonna di p ed usando la [descrizione di \$\neg\$](#) , poi si è ottenuta la terza colonna applicando la [disgiunzione](#) alle prime due.

Dualmente, esistono forme proposizionali Φ per le quali, calcolando come detto sopra il valore di verità, si ottiene sempre il valore F . Queste si chiamano *contraddizioni*. Dovrebbe essere chiaro che Φ è una contraddizione se e solo se $\neg\Phi$ è una tautologia. Un famoso esempio di contraddizione (lo si verifichi per esercizio) è la forma $p \wedge (\neg p)$, quindi la sua negazione $\neg(p \wedge (\neg p))$ è una tautologia, il *principio di non contraddizione*. Una forma proposizionale che non sia né una tautologia né una contraddizione si dice *contingente*. Ad esempio, la forma $p \Rightarrow q$ è contingente perché può assumere, in dipendenza dei valori sostituiti a p e a q , sia il valore V che il valore F .

Se α e β sono due forme proposizionali, si dice che α e β sono *logicamente equivalenti* (o, semplicemente, equivalenti) se e solo se la forma $\alpha \Leftrightarrow \beta$ è una tautologia. Naturalmente, questa condizione vuol dire che per qualsiasi scelta dei valori di verità attribuiti alle variabili che appaiono o in α o in β , α e β hanno lo stesso valore di verità. O, ancora in altri termini: α e β sono logicamente equivalenti se e solo in una tavola di verità in cui appaiano entrambe, ad esse corrisponda la stessa colonna di valori di verità. Vediamo un esempio molto semplice: questa tabella mostra che p e $\neg(\neg p)$ sono logicamente equivalenti.

tautologia della doppia negazione

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Detto diversamente, $p \Leftrightarrow (\neg(\neg p))$ è una tautologia, quella della *doppia negazione*.

Se una forma α appare come componente (o *sottoformula*) di una forma proposizionale Φ e se β è una forma logicamente equivalente ad α , è chiaro che sostituendo in Φ la sottoformula α con β si ottiene una forma Φ' che sarà logicamente equivalente a Φ . Ad esempio, se in Φ appare una sottoformula come $\neg(\neg\varphi)$, possiamo cancellare le due negazioni e quindi sostituire φ a $\neg(\neg\varphi)$ ottenendo una forma equivalente a Φ . Manipolazioni di questo genere sono spesso utili per calcolare valori di verità senza dover necessariamente far ricorso a tavole di verità.

Alcune tautologie elementari. Abbiamo già visto qualche esempio di tautologia. Ne elenchiamo ora altre, in modo più sistematico, spesso attribuendo loro, per nostra comodità, dei nomi che serviranno a poterle richiamare più avanti. La maggior parte di quelle che stiamo per vedere non necessitano di particolari commenti, risultando spesso addirittura ovvie. Chi legge è però caldamente invitato ad esercitarsi verificando che quelle elencate sono effettivamente tautologie. Le prime che incontriamo ricordano, anche nel nome, proprietà abitualmente definite per operazioni algebriche.

$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
$(p \vee p) \Leftrightarrow p$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
idempotenza	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$	$((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$
	commutatività	associatività

Sull'associatività di \wedge e \vee , osserviamo che $(p \wedge q) \wedge r$ risulta vera se e solo se sono contemporaneamente vere sia p che q che r (lo stesso vale per $p \wedge (q \wedge r)$, altrimenti non avremmo una tautologia), mentre $(p \vee q) \vee r$ (ovvero, $p \vee (q \vee r)$) è vera se e solo se è vera almeno una tra p , q ed r . Più in generale (come accade in algebra), a partire da queste tautologie è possibile (ma noioso) provare che, qualunque sia l'intero positivo k le forme proposizionali in cui appaiano tutte e sole le variabili p_1, p_2, \dots, p_k , delle parentesi e, tra i connettivi, solo \wedge sono equivalenti tra loro, indipendentemente dall'ordine in cui appaiano le variabili, dalle eventuali ripetizioni e dal modo in cui esse sono raggruppate (cioè da come sono disposte le parentesi).¹⁰ Per queste forme si può allora rinunciare all'uso delle parentesi e scrivere semplicemente $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_k$ (omettendo, magari, anche le ripetizioni) o $\bigwedge_{i=1}^k p_i$ per indicare una qualunque di queste forme. Questa forma assume il valore V se e solo se valgono V tutte le p_i . Simile

¹⁰ad esempio, per $k = 4$, le forme $(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4)$, $p_1 \wedge ((p_2 \wedge p_3) \wedge p_4)$, $((p_2 \wedge p_4) \wedge (p_1 \wedge p_3)) \wedge p_4$ ed infinite altre sono tra loro equivalenti

enunciato vale per \vee e giustifica l'uso di scritte come $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_k$ o $\bigvee_{i=1}^k p_i$, questa forma vale V se e solo se almeno una tra le p_i vale V .

Anche a proposito dell'associatività di \Leftrightarrow qualche commento può essere utile. La verifica del fatto che tratti di una tautologia, cioè del fatto che $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ e $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ sono logicamente equivalenti, è contenuta nella tavola di verità (la cui verifica è lasciata a chi legge):

associatività della equivalenza

p	q	r	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$	$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

Si noti che $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ vale vera se e solo se esattamente uno o tutti e tre tra p , q e r valgono vero.

Distributività. Altre tautologie che ricordano da vicino proprietà algebriche sono le *leggi distributive* (di \wedge rispetto a \vee e viceversa):

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

Verifichiamo la prima delle due utilizzando una tavola di verità, questa volta con tutti i passaggi intermedi:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Confrontando la quinta e l'ottava colonna, che coincidono in tutto tranne che nell'intestazione, si ottiene il risultato.

Esercizi.

C.1. Verificare la seconda delle tautologie appena enunciate (cioè la distributività della disgiunzione rispetto alla congiunzione).

C.2. La forma proposizionale $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ è una tautologia, mentre $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ non lo è. Scrivere la tavola di verità di quest'ultima. È possibile scrivere una forma proposizionale più breve (nel senso ovvio) di $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ e che sia equivalente a questa?

C.3. Verificare la tautologia $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \iff ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ (distributività da sinistra della implicazione rispetto a se stessa).

Leggi di De Morgan. Quando è che una proposizione della forma $p \wedge q$ è falsa? Risposta: quando (e solo quando) è falsa *almeno una* tra p e q . Questo è evidente dalla [tavola di verità che descrive la congiunzione](#). La risposta che qualche volta capita di ricevere: ‘quando sia p che q sono false’ è sbagliata: la proposizione è sicuramente falsa in questo caso, ma lo è anche in altri. Ad esempio, perché non sia vero che io abbia preso il treno e sia arrivato a Firenze non è necessario che io non abbia preso il treno e non sia arrivato a Firenze, la frase è falsa anche se io ho preso il treno e mi sono fermato a Roma, ad esempio, o anche se io sono andato a Firenze, ma in auto.

Dualmente, una proposizione della forma $p \vee q$ è falsa precisamente quando *sia p che q* sono false (come mostra la [tavola di verità della disgiunzione](#)), quindi la negazione di ‘prendo l’auto o vado a piedi’ è ‘non prendo l’auto e non vado a piedi’. Tutto questo è espresso da due tautologie molto importanti, note come *leggi di De Morgan*:

$$\begin{aligned}(\neg(p \wedge q)) &\iff ((\neg p) \vee (\neg q)) \\(\neg(p \vee q)) &\iff ((\neg p) \wedge (\neg q))\end{aligned}\tag{De Morgan}$$

Dunque, una disgiunzione (o una congiunzione) si negano negando i due termini che stiamo disgiungendo (o congiungendo) e, contemporaneamente, scambiando tra loro i simboli \wedge e \vee .

Esercizi.

D.1. Negare ciascuna delle frasi: “Mario corre e Maria nuota”; “La bottiglia è vuota oppure tappata”.

D.2. Negare la frase: ‘Alice ha i capelli biondi ricci’. (Si chiede che anche la negazione inizi con ‘Alice ha i capelli ...’. Attenzione: quale connettivo proposizionale è nascosto nella frase?)

D.3. Usando le leggi di De Morgan, negare $p \vee (\neg(q \wedge (\neg p)))$. Ciò che si chiede è scrivere una formula che sia equivalente alla negazione di quella data e che non abbia \neg come primo simbolo.

D.4. Come per l’esercizio precedente, negare ciascuna delle due formule: “ $p \wedge q \wedge r$ ” e “ $(p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee s))$ ”.

Tautologie sulla implicazione. Le tautologie sulla implicazione hanno grande importanza: il carattere meno intuitivo di questo connettivo le rende meno ovvie di quelle che abbiamo incontrato finora, ma l’uso frequentissimo che si fa in matematica del connettivo di implicazione rende queste tautologie uno strumento utilissimo. Vale dunque la pena di soffermarsi con una certa attenzione su di esse.

In primo luogo, il connettivo “ \Rightarrow ”, a differenza degli altri connettivi binari analizzati finora, non è **commutativo**; vale a dire: le forme “ $p \Rightarrow q$ ” e “ $q \Rightarrow p$ ” non sono equivalenti tra loro. Basta una tavola di verità per convincersene:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Prendiamo nota del fatto che spesso si scrive “ $p \Leftarrow q$ ” per “ $q \Rightarrow p$ ”. Si può considerare questo simbolo “ \Leftarrow ” come un ulteriore connettivo binario (*implicazione inversa*), definito appunto dall’essere $p \Leftarrow q$ logicamente equivalente a $q \Rightarrow p$.

Come chi legge queste note certamente già sa, la congiunzione di una implicazione e della corrispondente implicazione inversa equivale alla doppia implicazione, cioè vale la tautologia:

$$(p \Leftrightarrow q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)), \tag{tautologia della doppia implicazione}$$

come mostrato dalla tavola di verità:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Non basteranno mai gli avvertimenti e le preghiere rivolte agli studenti perché facciano attenzione a non confondere tra loro implicazione, implicazione inversa ed equivalenza. Si tratta, lo abbiamo visto in dettaglio, di connettivi che hanno funzioni logiche ben diverse; confonderli porta quasi certamente ad errori di ragionamento, spesso molto gravi.¹¹

Forse questo è un punto adatto per elencare alcune delle tante espressioni che vengono utilizzate in matematica per rendere nel linguaggio ordinario i connettivi di implicazione, implicazione inversa ed equivalenza. In ciascuna colonna si possono leggere frasi che traducono la formula nell'intestazione:

$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
Se p allora q		
p solo se q	p se q	p se e solo se q
p è condizione sufficiente per q	p è condizione necessaria per q	p è condizione necessaria e sufficiente per q

Come si è visto, dunque, il connettivo di equivalenza può essere ridotto a quelli di implicazione e congiunzione. Anche il connettivo di implicazione può essere espresso in termini di altri connettivi (disgiunzione e negazione). Si ha infatti questa tautologia:

$$(p \Rightarrow q) \iff ((\neg p) \vee q), \quad (\text{implicazione come disgiunzione})$$

che segue direttamente dalle tavole di verità di [implicazione](#) e [disgiunzione](#) e che avevamo sostanzialmente già osservato nelle [ultime righe della sezione in cui è stata introdotta l'implicazione](#), dove abbiamo notato che una implicazione è vera se e solo se il suo antecedente è falso o il suo conseguente è vero. Da questa tautologia se ne può facilmente dedurre un'altra, la *legge di contrapposizione*:

$$((p \Rightarrow q) \iff ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))). \quad (\text{legge di contrapposizione})$$

Il passaggio è il seguente: $p \Rightarrow q$ equivale a $(\neg p) \vee q$, ovvero a $q \vee (\neg p)$ (per la [commutatività di \$\vee\$](#)), ovvero a $(\neg(\neg q)) \vee (\neg p)$ (per la tautologia della [doppia negazione](#)), ma quest'ultima, per la tautologia dell'[implicazione come disgiunzione](#), equivale a $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

Molto importante, ed anch'essa immediata dalla [tavola di verità della implicazione](#), è la tautologia che mostra come negare una implicazione: questa è falsa precisamente quando l'antecedente è vero ed il conseguente è falso.

$$(\neg(p \Rightarrow q)) \iff (p \wedge (\neg q)). \quad (\text{negazione dell'implicazione})$$

Un'altra tautologia di uso frequentissimo è quella della *transitività dell'implicazione*:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r). \quad (\text{transitività dell'implicazione})$$

Piuttosto che scrivere una (noiosa e lunga) tavola di verità, verifichiamo questa tautologia utilizzando un metodo che è spesso molto conveniente quando si ha a che fare con le implicazioni. Per provare che la formula risulti vera, indipendentemente dal valore di verità attribuito a p , q , r , poveremo che in nessun caso essa può risultare falsa. Perché la formula sia falsa occorre che sia vero l'antecedente $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r))$ e falso il conseguente $(p \Rightarrow r)$. La prima condizione significa che sono vere $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, la seconda che sia vera p e falsa r . Ora, assumendo queste condizioni, sono in particolare vere p e $p \Rightarrow q$; da ciò segue subito che q è vera (se p è vera ma q è falsa, allora $p \Rightarrow q$ è falsa!). Quindi, se la nostra formula è falsa, risultano vere p e q , ma falsa r . Tuttavia, in questo caso, $q \Rightarrow r$ è falsa, mentre avevamo detto che, perché la formula sia falsa, $q \Rightarrow r$ deve essere vera. Questo ragionamento mostra che

¹¹come quello del contadino che, sapendo che se piove si esce con l'ombrello, pensa che sia sufficiente prendere l'ombrello per garantire un po' di pioggia ai suoi campi.

la formula considerata, cioè $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, non può essere falsa in nessun caso, quindi è una tautologia.

L'idea esemplificata da questa dimostrazione consiste in questo: imporre che una implicazione sia falsa fornisce immediatamente due informazioni: i valori di verità di antecedente e conseguente. Dunque può essere conveniente, nello studiare una implicazione, analizzare subito le conseguenze dell'ipotesi che essa sia falsa.

È chiaro che dalla [transitività dell'implicazione](#) (e dalla [tautologia della doppia implicazione](#) si possono dedurre molte altre tautologie che coinvolgano i connettivi \Rightarrow , \Leftarrow e \Leftrightarrow , come ad esempio la *transitività della equivalenza*: $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ o altre come $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow t)) \Rightarrow (p \Rightarrow t)$.

Concludiamo accennando a una notazione abbreviata, molto intuitiva e di uso comune, quella delle cosiddette catene di implicazioni, che esprimono congiunzioni tra formule che sono a loro volta implicazioni, implicazioni inverse o equivalenze. Dovrebbe bastare qualche esempio: espressioni come $\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \gamma$ oppure $\alpha \Leftarrow \beta \Rightarrow \gamma \Rightarrow \delta$ (senza parentesi), vengono usate al posto di $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma)$ e $(\alpha \Leftarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \Rightarrow \delta)$ rispettivamente. Dunque, la transitività della implicazione si può riscrivere come $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Esercizi ed Osservazioni.

E.1. Torniamo sull'[Esercizio B.5](#). La prima frase proposta in quell'esercizio si potrebbe rendere, in modo equivalente, con $t \wedge (v \Rightarrow m)$? Oppure con $t \wedge (m \Rightarrow v)$?

E.2. Studiare la forma $(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftarrow q)$. Confrontarla col secondo membro (il termine a destra di " \Leftrightarrow ") nella [tautologia della doppia implicazione](#).

E.3. Utilizzando le leggi di De Morgan, si determini la negazione di $(\neg p) \vee q$. Si confronti quanto ottenuto con le tautologie della [implicazione come disgiunzione](#) e con quella della [negazione dell'implicazione](#).

E.4. La [legge di contrapposizione](#) è alla base di una tecnica dimostrativa di uso molto frequente. Per dimostrare una tesi T partire da una ipotesi H , cioè per dimostrare l'implicazione $H \Rightarrow T$, si può assumere falsa T e dedurre da questa assunzione la falsità di H . In altri termini, ciò che si fa in questo modo è dimostrare l'implicazione $(\neg T) \Rightarrow (\neg H)$. Per la legge di contrapposizione, questa formula equivale ad $H \Rightarrow T$, quella che si voleva dimostrare. Dimostrazioni condotte in questo modo si chiamano *dimostrazioni per contrapposizione*.

E.5. Si provi che le forme proposizionali " $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ", " $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ " e " $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ " sono tra loro logicamente equivalenti. Si consiglia di non utilizzare, a questo scopo, tavole di verità ma di ragionare come fatto per la [transitività dell'implicazione](#). Questo consiglio si estende anche agli esercizi che seguono.

E.6. Verificare la tautologia " $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ ", nota come *legge dell'inferenza*.

E.7. Tornare all'[Esercizio C.3](#) (se lo si è svolto) e ripetere (o farla ex-novo) la verifica senza usare tavole di verità. La forma " $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ " è una tautologia?

E.8. Verificare le tautologie " $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$ " e " $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r))$ " (distributività da sinistra di \Rightarrow rispetto a \wedge e a \vee). Suggerimento: si usi la tautologia della [implicazione come disgiunzione](#) per trasformare tutte le implicazioni in disgiunzioni che coinvolgano $\neg p$.

Le forme " $((q \wedge r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p))$ " e " $((q \vee r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow p))$ " sono tautologie?

4. ALTRI CONNETTIVI BINARI

Per completare la nostra discussione sul calcolo proposizionale vanno ancora menzionati alcuni connettivi binari, che hanno interesse di per sé e sono spesso utilizzati in informatica. Il più importante tra questi è la *disgiunzione esclusiva* ($\dot{\vee}$, o XOR), a cui abbiamo già fatto [cenno](#). Altri due sono le negazioni della congiunzione e della disgiunzione, rispettivamente NAND e NOR (da leggere come not-and e not-or), che sono anche noti, rispettivamente, come operazione di Sheffer (o *stroke*, indicata con $|$ o \uparrow) e operazione di Pierce (e indicata con \downarrow). Le tavole di verità sono:

p	q	$p \dot{\vee} q$ $p \text{ XOR } q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \mid q$ $p \text{ NAND } q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \downarrow q$ $p \text{ NOR } q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

È chiaramente giustificato quanto abbiamo appena detto su NAND e NOR: questi connettivi negano \wedge e \vee , nel senso che “ $(p \text{ NAND } q) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge q))$ ” e “ $(p \text{ NOR } q) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q))$ ” sono tautologie. Allo stesso modo, XOR nega \Leftrightarrow . Si ha infatti una utilissima serie di tautologie, che si possono esprimere come catena di equivalenze:

$$(\neg(p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (\neg q)) \Leftrightarrow (p \text{ XOR } q). \quad (\text{negazione dell'equivalenza})$$

Ricordiamo cosa significa: le quattro forme proposizionali elencate sono a due a due logicamente equivalenti. Che lo siano si vede subito: ciascuna di esse è vera quando e solo quando p e q hanno diversi valori di verità, cioè una vale ‘vero’, l'altra vale ‘falso’. Notiamo che queste tautologie ci mostrano come possiamo importare ed esportare (portare ‘dentro’ o ‘fuori’ a nostro piacimento) il simbolo di negazione da una equivalenza a ciascuno dei termini che vi appaiono. Usando questo fatto possiamo dimostrare una proprietà molto importante: l'associatività del connettivo XOR.¹²

Consideriamo infatti la forma $p \text{ XOR } (p \text{ XOR } r)$. La catena di equivalenze appena osservata mostra che $p \text{ XOR } (q \text{ XOR } r)$ equivale a $\neg(p \Leftrightarrow (q \text{ XOR } r))$ e questa (importando la negazione al secondo termine dell'equivalenza), equivale a $p \Leftrightarrow (\neg(q \text{ XOR } r))$, cioè a $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$. Abbiamo dunque la tautologia

$$(p \text{ XOR } (q \text{ XOR } r)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)).$$

Allo stesso modo (oppure usando quest'ultima tautologia insieme alla *commutatività*, ovvia, di XOR¹³ e a quella di \Leftrightarrow) si verifica la tautologia

$$((p \text{ XOR } q) \text{ XOR } r) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r).$$

Da queste due, e dall'*associatività di \Leftrightarrow* si ricava la tautologia che volevamo provare:

$$(p \text{ XOR } (q \text{ XOR } r)) \Leftrightarrow ((p \text{ XOR } q) \text{ XOR } r). \quad (\text{associatività di XOR})$$

Altre due facili tautologie che riguardano XOR sono espresse in questa catena di equivalenze:

$$(p \text{ XOR } q) \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \vee (q \wedge (\neg p))) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))). \quad (\text{esplicitazione di XOR})$$

Anche queste equivalenze si provano facilmente osservando che, evidentemente, sia $((p \wedge (\neg q)) \vee (q \wedge (\neg p)))$ che $((p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)))$ sono vere se e solo esattamente uno tra p e q è vero, ma si veda a questo riguardo anche l'*Esercizio F.1*. È poi importante (per lo studio delle strutture booleane) la tautologia

$$(p \wedge (q \text{ XOR } r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \text{ XOR } (p \wedge r)), \quad (\text{distributività di } \wedge \text{ rispetto a XOR})$$

di verifica diretta.

L'ultima osservazione che facciamo prima di chiudere con il calcolo proposizionale evidenzia una particolarità che rende interessanti i connettivi NAND e NOR. Sappiamo che la nostra lista di connettivi è piuttosto ridondante. Non avremmo avuto bisogno, ad esempio, di definire in modo indipendente il connettivo di equivalenza, ma avremmo potuto considerare la scrittura “ $p \Leftrightarrow q$ ” come una semplice abbreviazione di “ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ”, dal momento che la *tautologia della doppia implicazione* ci dice che le due formule sono equivalenti. Similmente, la *tautologia della implicazione come disgiunzione* mostra come sia possibile fare a meno anche del connettivo \Rightarrow ed esprimere tutte le implicazioni (e le implicazioni inverse) utilizzando \neg e \vee ; in modo ancora più immediato NAND e NOR si ottengono da \neg , \vee e \wedge , che

¹²il fatto che XOR sia associativo permette, tra l'altro, di definire in modo sintetico le strutture booleane, che hanno enorme importanza nell'informatica teorica.

¹³cioè la tautologia $(p \text{ XOR } q) \Leftrightarrow (q \text{ XOR } p)$. Anche NOR e NAND sono commutative; tutto ciò è evidente dalle *descrizioni* che abbiamo dato di questi connettivi.

certamente bastano per esprimere anche XOR. Dunque possiamo esprimere tutto il calcolo proposizionale usando solo i connettivi \neg , \vee e \wedge . Meglio ancora: dalle [leggi di De Morgan](#) (e dalla [tautologia della doppia negazione](#)) seguono le tautologie

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg((\neg p) \wedge (\neg q))) \quad \text{e} \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg((\neg p) \vee (\neg q))),$$

che mostrano come la disgiunzione si possa esprimere utilizzando \neg e \wedge , mentre la congiunzione si può esprimere utilizzando \neg e \vee . Dunque tutte le formule del calcolo proposizionale possono essere espresse (a meno di equivalenze) usando solo due connettivi: \neg ed uno a scelta tra \wedge e \vee . Se siamo davvero interessati a ridurre il numero dei connettivi usati, si può addirittura fare di meglio: basta un solo connettivo, uno a scelta tra NAND e NOR. Abbiamo infatti due tautologie (di semplicissima verifica):

$$(p \text{ NOR } p) \Leftrightarrow (\neg p) \Leftrightarrow (p \text{ NAND } p)$$

che garantiscono come l'uso della negazione possa sempre essere sostituito dall'uso di una qualsiasi tra NAND e NOR. Dunque, il connettivo NAND permette di esprimere \neg , e quindi \wedge (perché $p \wedge q$ equivale a $\neg(p \text{ NAND } q)$, cioè a $(p \text{ NAND } q) \text{ NAND } (p \text{ NAND } q)$). Per quanto visto sopra, possiamo concludere che *ogni formula del calcolo proposizionale equivale ad una formula in cui l'unico connettivo che appare è NAND*. Allo stesso modo, dal momento che NOR basta per esprimere la negazione e quindi la disgiunzione (tramite la tautologia $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg(p \text{ NOR } q))$), *anche NOR ha la stessa proprietà*. È questo il motivo che rende le porte NAND e le porte NOR così utili per la progettazione di circuiti elettronici.

Esercizi.

F.1. Usando le [leggi distributive](#) e le [leggi di De Morgan](#), verificare direttamente che la forma proposizionale $(p \wedge (\neg q)) \vee (q \wedge (\neg p))$ è equivalente a $(p \vee q) \wedge ((\neg q) \vee (\neg p))$ e quindi a $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$. Utilizzando le tautologie della [doppia implicazione](#) e della [implicazione come disgiunzione](#) verificare poi che anche $(\neg p) \Leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \vee q) \wedge ((\neg q) \vee (\neg p))$. Questo fornisce una dimostrazione alternativa per le due tautologie che abbiamo chiamato [esplicitazione di XOR](#).

F.2. Verificare in dettaglio la [distributività della congiunzione rispetto a XOR](#). Basta usare una tavola di verità, ma si può ragionare in modo più sintetico così: se p vale 'falso' entrambi i membri della equivalenza sono falsi, se p vale 'vero', entrambi sono equivalenti a $q \text{ XOR } r$. Completare il ragionamento verificando tutti i passaggi.

F.3. Vale la tautologia $((p \vee (q \text{ XOR } r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \text{ XOR } (p \vee r)))$ (distributività della disgiunzione rispetto a XOR)?

F.4. Scrivere una forma proposizionale equivalente a $p \Rightarrow q$ in cui appaiano solo le variabili p e q , il connettivo NAND e, eventualmente, parentesi.

5. QUANTIFICATORI

Consideriamo la formula " $x > 1$ " del linguaggio dell'aritmetica che abbiamo già (informalmente) introdotto [nella prima sezione](#) di queste note. In accordo con quanto scritto lì, questa formula non ha un valore di verità, perché non è una proposizione. Abbiamo però a disposizione una idea intuitiva di 'sostituzione'¹⁴ che ci permette di estendere la nostra nozione di verità, valutando la formula per ciascuno dei numeri che possono essere sostituiti alla variabile x .¹⁵ In termini semplici, non abbiamo difficoltà a dire che la formula è vera "per $x = 10$ " (cioè sostituendo ad x il numero 10) ed è falsa per $x = 0$. Se chiamiamo φ , o $\varphi(x)$, la nostra formula, possiamo indicare con $\varphi(10)$ e $\varphi(0)$, rispettivamente, le formule "ottenute da φ sostituendo ad x i numeri 10 e 0", nell'ordine, quindi $\varphi(10)$ è la formula (chiusa! e vera) $10 > 1$ mentre $\varphi(0)$ è la formula (chiusa e falsa) $0 > 1$.

Può capitare che una formula risulti vera per ogni possibile sostituzione delle variabili. In questo caso diremo che la formula è *valida*.¹⁶ Ad esempio, sono valide le formule $x = x$ o anche le formule ricavate

¹⁴idea che naturalmente, ma con qualche fatica, si potrebbe formalizzare. A qualcosa in più accenneremo [tra poche pagine](#), dopo aver discusso di variabili libere e vincolate

¹⁵scriviamo 'numeri' perché il linguaggio che stiamo usando è quello dell'aritmetica e quindi implicitamente assumiamo che le variabili possano indicare solo oggetti che chiamiamo numeri interi, qualsiasi cosa essi siano.

¹⁶Ancora una volta dobbiamo sottolineare che stiamo fornendo una trattazione molto semplificata della materia. Quella di validità di una formula è in realtà una nozione più ricca di quanto risulta qui, ma la sua definizione completa dipende da concetti che non ci è necessario toccare e non toccheremo.

da tautologie, come ad esempio $\varphi \vee (\neg\varphi)$, per qualsiasi formula φ , che si ottiene rimpiazzando p con φ nella tautologia [principio del terzo escluso](#). Useremo espressioni come ‘vale l’implicazione $\varphi \Rightarrow \psi$ ’ per dire che la formula $\varphi \Rightarrow \psi$ è valida, oppure ‘ φ e ψ sono equivalenti’ per dire che $\varphi \Leftrightarrow \psi$ è valida; questo per *arbitrarie* (cioè non necessariamente chiuse) formule φ e ψ .

Torniamo al nostro discorso. La nozione di sostituzione ci permette di introdurre due nuovi simboli logici, che svolgono un ruolo centrale in un capitolo della logica chiamato *calcolo dei predicati*. Questi simboli sono il *quantificatore universale* \forall ed il *quantificatore esistenziale* \exists .¹⁷ La sintassi è semplice: se φ è una formula ed x è una variabile allora anche “ $\forall x(\varphi)$ ” e “ $\exists x(\varphi)$ ” sono formule; per maggior leggibilità si può anche scrivere “ $(\forall x)(\varphi)$ ” e “ $(\exists x)(\varphi)$ ” o, come al solito, scrivere $\varphi(x)$ al posto di φ per evidenziare la possibilità che x appaia in φ .

La prima formula, $\forall x(\varphi)$, è quella che si chiama una *formula universale*¹⁸ e si legge ‘per ogni x , φ ’. Questa formula esprime la contemporanea affermazione di tutte le formule $\varphi(a)$ ottenute sostituendo ad x ogni possibile valore a . Può aiutare pensare a questa formula come ad una versione generalizzata della congiunzione: la congiunzione tra tutte le formule $\varphi(a)$ ottenute da φ per sostituzione di x con a , per ogni possibile scelta di a .¹⁹ Nel caso in cui ciascuna delle formule $\varphi(a)$ così ottenute sia chiusa (cioè una proposizione), la formula $\forall x(\varphi)$ esprime il fatto che ciascuna delle $\varphi(a)$ è vera. Ad esempio, usando come φ la formula $x = x$ otteniamo la formula $\forall x(x = x)$, che è una proposizione (vedremo come mai) vera perché qualsiasi sia l’oggetto che sostituiamo ad x , questo oggetto è uguale a se stesso. Invece, se partiamo dalla formula $x > 1$ dell’aritmetica usata come esempio nel paragrafo precedente, otteniamo $\forall x(x > 1)$, che è ancora una proposizione ma è falsa, perché non tutti i numeri interi verificano la condizione di essere maggiori di uno.

Se le formule universali possono essere pensate come una sorta di congiunzione generalizzata, le *formule esistenziali*, cioè quelle introdotte dal quantificatore \exists , possono invece essere pensate come disgiunzioni generalizzate. Se x è una variabile e $\varphi = \varphi(x)$ una formula, $\exists x(\varphi)$ (che si può leggere: “esiste un x tale che φ ”) esprime l’affermazione di *almeno una* tra le formule $\varphi(a)$ ottenute sostituendo ad x ogni possibile valore a . Ad esempio, nel linguaggio dell’aritmetica la formula $\exists x(x > 1)$ è una proposizione (lo vedremo) ed è vera perché, ad esempio, è vera la formula “ $3 > 1$ ” ottenuta sostituendo 3 ad x in “ $x > 1$ ”. Invece la formula $\exists x(x \neq x)$ è falsa.

Oltre a \forall ed \exists esistono altri quantificatori. Quello di uso più frequente è “ $\exists!$ ”. Se φ è una formula ed x è una variabile, la formula “ $\exists!x(\varphi)$ ” si legge “esiste uno ed un solo x tale che φ ” ed afferma $\varphi(a)$ per uno dei possibili valori a che possono essere sostituiti ad x , negando $\varphi(b)$ per ogni b diverso da a ; in termini più semplici: φ è verificata da a e solo da a . In modo sintetico e più formale, se y è una variabile (diversa da x) che non appare in φ , questo quantificatore è definito dall’equivalenza:²⁰

$$\exists!x(\varphi(x)) \iff \exists x(\forall y(\varphi(y) \Leftrightarrow y = x)). \quad (\text{descrizione di } \exists!)$$

È un utile esercizio comprendere questa equivalenza, cioè il fatto che il suo membro a destra (vale a dire $\exists x(\forall y(\varphi(y) \Leftrightarrow y = x))$) esprime proprio ciò che vogliamo esprima il membro a sinistra ($\exists!x(\varphi(x))$). Commenti a questo proposito sono nell’[Osservazione G.1](#).

Variabili libere e vincolate. In una formula come $\forall x(\varphi)$ o come $\exists x(\varphi)$ (anche se queste appaiono come sottoformule di formule più complesse) si dice che le occorrenze di x sono *vincolate* (dal quantificatore \forall o dal quantificatore \exists). Dunque sono vincolate le (occorrenze delle) variabili che appaiano nel ‘raggio d’azione’ di un quantificatore (si intende però che ogni quantificatore può vincolare solo le occorrenze della variabile che lo segue immediatamente: in $\forall x(x = y)$, il quantificatore vincola la x , non la y). In una qualsiasi formula, le (occorrenze delle) variabili che non sono vincolate si dicono *libere*. Ad esempio, sono vincolate le occorrenze di x in “ $(\forall x(x + 1 > x)) \wedge (\exists x(x > y))$ ”, mentre nella stessa formula è libera l’occorrenza di y . Attenzione: è possibile che nella stessa formula la stessa variabile abbia sia occorrenze libere che occorrenze vincolate: ad esempio, in “ $(\forall x(x + 1 > x)) \vee (x = 0)$ ” l’ultima occorrenza di x è libera, le altre sono vincolate (si noti però che tutte le occorrenze di x in “ $\forall x((x + 1 > x) \vee (x = 0))$ ” sono vincolate; attenzione alle parentesi!).

¹⁷l’origine del simbolo \exists è ovvia: richiama la ‘E’ iniziale della parola ‘Esiste’ o delle sue varianti in diverse lingue. Il simbolo \forall richiama invece la ‘A’ iniziale dell’inglese ‘All’ (o meglio, del tedesco ‘Alle’) che sta per ‘tutti’.

¹⁸cioè: introdotta da un quantificatore universale.

¹⁹non si tratta effettivamente di una congiunzione, perché si possono congiungere, usando il connettivo \wedge , solo un numero finito di formule per volta, invece le formule $\varphi(a)$ sono, in generale, in numero infinito.

²⁰questa frase vuol dire: $\exists!$ è definito dal fatto che scelti comunque la formula φ e le variabili (distinte) x e y in modo che y non appaia in x la formula che segue è *valida*, nel senso [indicato sopra](#).

Benché le nozioni di occorrenze libere e vincolate siano qui state presentate solo per grandi linee, è bene farci attenzione per almeno due motivi. Il primo è che la (già [promessa](#)) definizione di formula chiusa dipende proprio dalle nozioni appena introdotte: *una formula è chiusa se e solo se non contiene variabili con occorrenze libere*. Vediamo così che formule come “ $\forall x(x > 1)$ ” e “ $\forall x((x + 1 > x) \vee (x = 0))$ ”, che abbiamo incontrato poco sopra, sono proposizioni: in entrambe l’unica variabile che appare, x , ha solo occorrenze vincolate. Invece, la formula “ $\exists x(x > y)$ ” non è una proposizione, a causa dell’occorrenza libera di y . Possiamo modificare questa formula perché diventi chiusa? Certamente, il modo ovvio di farlo è quello di premettere un quantificatore che vincoli la variabile y : “ $\exists y(\exists x(x > y))$ ” e “ $\forall y(\exists x(x > y))$ ” sono proposizioni. Cosa significa tutto ciò in termini più semplici? Che *se una formula contiene variabili che non sono state introdotte da quantificatori* (in tutte le loro occorrenze) *allora questa formula non ha un valore di verità* e non ha senso stare a discutere sul fatto che sia vera o falsa. Per poterle attribuire un valore di verità dobbiamo prima ‘quantificare’, come si dice, le variabili libere che vi appaiono. Ovviamente abbiamo più modi di farlo, che portano, in genere, a formule molto diverse tra loro, come nel caso delle due formule $\exists y(\exists x(x > y))$ e $\forall y(\exists x(x > y))$ appena viste.

È bene insistere su questo punto: i quantificatori sono essenziali per la corretta espressione ed interpretazione delle formule in logica e più generalmente in matematica, ed è quindi importantissimo che siano sempre espressi, ed in modo non ambiguo.²¹ Si invita chi legge a prendere la sana abitudine di farlo; la pratica di omettere o sottintendere quantificatori è una delle più frequenti cause di errori di ragionamento e, cosa forse più grave, di completa incomprendimento di concetti matematici.

La seconda ragione per cui è bene cercare di familiarizzarsi con la nozione di occorrenza libera o vincolata di una variabile è che, nell’interpretazione di una formula, variabili libere e variabili vincolate giocano ruoli molto diversi. La questione è molto delicata e non facile da afferrare, non mi stupirei se il contenuto dei paragrafi seguenti risultasse poco comprensibile a chi legge, ma invito per lo meno a provare a riflettersi sopra.

Guardiamo alle sostituzioni. Non abbiamo potuto dare più che una idea intuitiva di come si effettui una sostituzione di un termine ad una variabile in una formula, ma una cosa che possiamo dire è che *nelle sostituzioni si opera solo sulle occorrenze libere delle variabili*. Se ci fermiamo a pensarci un attimo, questo non è strano. Infatti a nessuno (spero) verrebbe mai in mente di sostituire, ad esempio, 0 alla variabile x in “ $\forall x(x > y)$ ” ottenendo “ $\forall 0(0 > y)$ ”, o magari “ $\forall x(0 > y)$ ”. Qualche esempio: nel linguaggio dell’aritmetica, consideriamo le tre formule φ , $\bar{\varphi}$ e ψ :

$$\varphi: “x > 1” ; \quad \bar{\varphi}: “\forall x(x > 1)” ; \quad \psi: “\forall x(x > 1) \wedge x = 7” .$$

Sostituendo ad x il numero 3 in ciascuna delle formule otteniamo le formule

$$\varphi(3): “3 > 1” ; \quad \bar{\varphi}(3) = \bar{\varphi}(x): “\forall x(x > 1)” ; \quad \psi(3): “\forall x(x > 1) \wedge 3 = 7” .$$

Cosa è successo? In ciascuna delle formule abbiamo sostituito 3 alle occorrenze libere di x , ma non a quelle vincolate; è questa la regola generale. Nelle formule chiuse non appaiono variabili libere, quindi non c’è nulla da sostituire e per questo le sostituzioni lasciano invariate le formule chiuse. Come si vede, questo è il caso che si è verificato per la formula (chiusa) $\bar{\varphi}(x)$. In $\psi(x)$ l’unica occorrenza libera di x è l’ultima, quella che appare in “ $x = 7$ ”, quindi solo questa è stata sostituita.

Per dirla in modo grossolano ma comprensibile, una variabile libera è qualcosa che, nella formula, “rappresenta” un oggetto (e quindi può essere sostituita da un oggetto), una variabile vincolata invece no. Non per niente, per indicare una variabile con occorrenza vincolata si usa anche l’espressione ‘variabile muta’.

Infine, un po’ di terminologia. Un *predicato unario* nella variabile x è formula che non contenga occorrenze libere di variabili diverse di x . Quindi, se φ è una formula e x è una variabile, $\forall x(\varphi)$ è una proposizione esattamente quando φ è un predicato unario in x ; lo stesso vale per $\exists x(\varphi)$ e $\exists! x(\varphi)$. Similmente, si dice che la formula φ è un predicato binario quando in essa appaiono al più due variabili con occorrenze libere²², un predicato ternario è una formula in cui appaiono al più tre variabili con occorrenze libere, e così via.

²¹ad esempio, andrebbero evitate espressioni del tipo: “ $f(x) < 4$, con $x > 0$ ” dove chi legge deve, per bene che vada, tirare ad indovinare se quel “con” rappresenta un quantificatore esistenziale o uno universale. Analogamente, in “. . . , per $x > 0$ ”, non sempre è chiaro se quel “per” vada inteso come “per ogni” o “per almeno un”. Il senso logico delle frasi, come si vede, cambia se si cambia l’interpretazione.

²²attenzione: non due occorrenze, ma due variabili, con un numero arbitrario di occorrenze. Ad esempio, la formula “ $(x < y) \vee ((x = y) \Rightarrow (x > 7))$ ”, in cui x appare tre volte, è un predicato binario in x e y (nel linguaggio dell’aritmetica).

Osservazioni.

G.1. Torniamo sulla equivalenza che abbiamo dato come [descrizione del quantificatore \$\exists!\$](#) . Siano φ una formula e x, y due variabili, e assumiamo che y non appaia in φ . Se chiamiamo $\psi(x, y)$ la formula $\varphi(y) \Leftrightarrow y = x$, possiamo riscrivere l'equivalenza come $\exists!x(\varphi(x)) \Leftrightarrow \exists x(\forall y(\psi(x, y)))$. Vogliamo esaminare il membro a destra di questa equivalenza. Per semplificare il discorso, supponiamo che φ sia un predicato unario in x , quindi che $\exists x(\forall y(\psi(x, y)))$ sia una proposizione; il ragionamento è analogo nel caso generale. Quando è che questa proposizione è vera? Esattamente quando esiste *almeno* un a per il quale sia vera la formula (che è anch'essa chiusa) $\forall y(\psi(a, y))$; come sappiamo questo equivale a dire che è vera $\psi(a, b)$, cioè la formula $\varphi(b) \Leftrightarrow b = a$, per ogni possibile scelta di b . Tra le possibili scelte per b c'è anche a ; la formula diventa in questo caso particolare $\varphi(a) \Leftrightarrow a = a$. Poiché $a = a$ è vera, questa equivale a $\varphi(a)$. Se invece scegliamo come b un qualsiasi oggetto diverso da a , allora $b = a$ è falsa, quindi $\varphi(b) \Leftrightarrow b = a$ equivale alla negazione di $\varphi(b)$.

In definitiva, abbiamo mostrato che la formula $\exists x(\forall y(\psi(x, y)))$ è vera se e solo se esiste un a per il quale è vera $\varphi(a)$ e, contemporaneamente, è falsa $\varphi(b)$ per ogni b diverso da a . Questo è precisamente quello che volevamo esprimere col quantificatore $\exists!$; è quindi giustificata l'idea di descrivere formalmente questo quantificatore come abbiamo fatto.

G.2. Non abbiamo descritto in dettaglio le sostituzioni, abbiamo solo avvertito che la nozione è solo ingannevolmente semplice. Un esempio può dare l'idea delle difficoltà che possono sorgere (ma, niente paura, si risolvono). È lecito sostituire a variabili altre variabili. Consideriamo la formula $\exists x(x \neq y)$ nella variabili x (vincolata) e y (libera). Cosa succederebbe se sostituissimo 'meccanicamente' y con x in questa formula?

G.3. Questa osservazione fornisce un suggerimento pratico, mirato a semplificare la scrittura delle formule. Una regola (molto intuitiva) del calcolo dei predicati afferma che se si "cambia nome" alle variabili vincolate in una formula si ottiene una formula equivalente. Più precisamente, data una formula φ in cui appare una variabile x , se y è una variabile che non appare in φ , la formula ottenuta scrivendo y al posto di x in ogni occorrenza vincolata di x in φ è equivalente a φ . Per esempio, " $\forall x(x + 1 > x)$ " e " $\forall y(y + 1 > y)$ " sono equivalenti. Usando questa regola, è possibile riscrivere in modo equivalente qualsiasi formula in modo da evitare che la stessa variabile appaia sia libera che vincolata, con gran vantaggio per la chiarezza. Ad esempio, la [già menzionata](#) formula " $(\forall x(x + 1 > x)) \vee (x = 0)$ " dell'aritmetica si potrebbe equivalentemente riscrivere come " $(\forall y(y + 1 > y)) \vee (x = 0)$ ", sicuramente più facile da leggere.

Quantificatori ristretti. Nella pratica matematica si incontrano con gran frequenza espressioni del tipo " $(\forall x \in S)(\varphi)$ " o " $(\exists x > 0)(\varphi)$ " (le parentesi non sono tutte necessarie, ma rendono le formule più facili da leggere; come si sarà immaginato qui φ è una formula e x una variabile, e S è un insieme), in cui il quantificatore è accompagnato da una condizione che limita l'ambiente in cui la variabile possa assumere i suoi valori. Queste espressioni hanno ovvie interpretazioni, ma è bene sapere che sono semplicemente abbreviazioni di formule in cui i quantificatori sono usati nel modo indicato nella sezione precedente, ed è bene sapere di quali formule sono abbreviazioni. La prima formula può essere definita in questo modo:

$$(\forall x \in S)(\varphi) : \Leftrightarrow \forall x(x \in S \Rightarrow \varphi)$$

(i due punti che precedono \Leftrightarrow ci ricordano solo che questa equivalenza, o meglio l'affermazione che vale questa equivalenza, è stabilita come definizione dell'espressione a sinistra). Come spesso accade, non essersi accontentati di una idea intuitiva ma aver cercato una definizione precisa non è un atto di pignoleria fine a se stesso, ma comporta un utile vantaggio. In questo caso, ci permette di chiarire in modo molto semplice un punto che spesso sfugge agli studenti: cosa accade quando S è l'insieme vuoto? La risposta è:

*per ogni predicato unario φ nella variabile x , la proposizione $(\forall x \in \emptyset)(\varphi)$ è vera.*²³

Come mai? Stando alla nostra definizione " $(\forall x \in \emptyset)(\varphi)$ " significa " $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow \varphi)$ ". Ora, qualunque sia l'oggetto a , la formula $a \in \emptyset$ è falsa (l'insieme vuoto non ha elementi: è questa la sua definizione) quindi l'implicazione " $a \in \emptyset \Rightarrow \varphi(a)$ " ha l'antecedente falso e quindi è vera. Dunque, se sostituiamo a ad x in " $x \in \emptyset \Rightarrow \varphi$ " otteniamo certamente una formula vera. Pertanto " $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow \varphi)$ ", ovvero

²³ricordiamo che se la formula φ non fosse un predicato unario in x , cioè se φ contenesse una variabile libera diversa da x , allora $(\forall x \in \emptyset)(\varphi)$ non sarebbe una proposizione, quindi non sarebbe né vera né falsa.

“($\forall x \in \emptyset$)(φ)”, è vera, come si voleva dimostrare. Possiamo a questo punto dire che, a meno che non esistano cavalli²⁴ verdi, la frase “ogni cavallo verde ha otto zampe” è vera.

Discorso analogo vale per altre restrizioni che possono essere imposte alla variabile quantificata. Ad esempio, $(\forall x > 0)(\varphi)$ significa $\forall x(x > 0 \Rightarrow \varphi)$.

Se cambiamo quantificatore la definizione è diversa:

$$(\exists x \in S)(\varphi) : \iff \exists x((x \in S) \wedge \varphi)$$

e qui non ci dovrebbero essere difficoltà: “esiste x in S tale che ...” significa proprio “esiste x tale che x sia in S e ...”. Ovviamente, nella solita ipotesi che φ sia un predicato unario in x , questa formula è sicuramente una proposizione falsa quando $S = \emptyset$.

Abbiamo introdotto i quantificatori \forall ed \exists suggerendo un’analogia tra essi ed i connettivi \wedge e \vee , cioè che i quantificatori in qualche modo corrispondano a forme più generali di congiunzione (nel caso del quantificatore universale) e disgiunzione (per quello esistenziale). Questa analogia si può effettivamente rendere precisa e verificare nel caso dei quantificatori ristretti ad insiemi finiti e non vuoti. Se S è appunto un insieme finito e $S \neq \emptyset$, se φ è una formula e x una variabile, è chiaro che la formula $(\forall x \in S)(\varphi(x))$ è equivalente a $\bigwedge_{a \in S} \varphi(a)$, cioè a $\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \dots \wedge \varphi(a_k)$, dove a_1, \dots, a_k sono gli elementi di S , mentre $(\exists x \in S)(\varphi(x))$ è equivalente a $\bigvee_{a \in S} \varphi(a)$.²⁵

Si può, a questo punto, tornare all’esempio della frase “per ogni numero intero x compreso tra 1 e 3 si ha che se $x > 2$ allora $x > 1$ ” discussa [nella sezione in cui è stato introdotto il connettivo di implicazione](#). Come si può ora riconoscere, questa frase non è altro che un modo per rendere verbalmente la formula $(\forall x \in \{1, 2, 3\})(x > 2 \Rightarrow x > 1)$; questa è una formula introdotta da un quantificatore universale ristretto ad un insieme di tre elementi, quindi si riduce ad una congiunzione tra tre formule, e sotto questo aspetto l’avevamo studiata.

6. QUALCHE REGOLA D’USO

Esiste un gran numero di regole del calcolo dei predicati che permettono di manipolare formule contenenti quantificatori. Si tratta per lo più di regole estremamente intuitive; una è quella data nell’[Osservazione G.3](#), ne vedremo altre. Spesso queste regole sono enunciate dichiarando la validità di determinate implicazioni. Anche in questa sezione, ma non lo ripeteremo ogni volta, le lettere x , y e z indicano sempre variabili, φ e ψ sono invece formule.

Quantificatori multipli. Innanzitutto, può capitare di avere più quantificatori consecutivi; un esempio lo abbiamo già visto con la formula a secondo membro della equivalenza che [descrive formalmente \$\exists!\$](#) . Abbiamo formule del tipo $\forall x(\forall y(\dots(\varphi)\dots))$ o $\exists x(\exists y(\dots(\varphi)\dots))$, in cui è lo stesso quantificatore a ripetersi; in questi casi l’ordine in cui appaiono i quantificatori è irrilevante nel senso che, ad esempio, $\forall x(\forall y(\varphi))$ e $\forall y(\forall x(\varphi))$ sono equivalenti. Si usa scrivere, per brevità, $\forall x, y, \dots, z(\varphi)$ invece di $\forall x(\forall y(\dots \forall z(\varphi)\dots))$ e $\exists x, y, \dots, z(\varphi)$ invece di $\exists x(\exists y(\dots \exists z(\varphi)\dots))$. Diverso è il caso in cui appaiono sia il quantificatore esistenziale che quello universale. Le formule “ $\forall x(\exists y(\varphi))$ ” e “ $\exists y(\forall x(\varphi))$ ” non sono in generale equivalenti. La prima afferma che, scelto comunque un termine a , ne esiste almeno uno, b , dipendente, in generale, dalla scelta di a , per il quale si abbia $\varphi(a, b)$. La seconda formula dice qualcosa in più: che si ha la stessa situazione ma, questa volta, si può scegliere b indipendentemente dalla scelta di a : esiste un particolare b per il quale si abbia $\varphi(a, b)$ per ogni possibile scelta di a . Dunque, vale sempre l’implicazione

$$\exists y(\forall x(\varphi)) \implies \forall x(\exists y(\varphi))$$

ma, in generale, non vale l’implicazione inversa. Un esempio può aiutare: nel linguaggio dell’aritmetica, sia $\varphi(x, y)$ la formula $x < y$. La prima delle nostre formule diventa

$$\forall x(\exists y(x < y)),$$

²⁴si intende: cavalli *vivi*.

²⁵per una convenzione di uso universale, se S ha un solo elemento, cioè $k = 1$ e $S = \{a_1\}$, sia $\bigwedge_{a \in S} \varphi(a)$ che $\bigvee_{a \in S} \varphi(a)$ valgono $\varphi(a_1)$. In verità la stessa convenzione permette di estendere questa notazione anche al caso in cui $S = \emptyset$, stabilendo che $\bigwedge_{a \in \emptyset} \varphi(a)$ e $\bigvee_{a \in \emptyset} \varphi(a)$ indicano una formula vera ed una falsa, rispettivamente. Con questa ulteriore convenzione le equivalenze $(\forall x \in S)(\varphi(x)) \iff \bigwedge_{a \in S} \varphi(a)$ e $(\exists x \in S)(\varphi(x)) \iff \bigvee_{a \in S} \varphi(a)$ continuano a valere, anche nel caso in cui $S = \emptyset$.

che afferma che per ogni numero esiste un numero più grande. Questa è una proposizione vera: se a è un numero intero, $a + 1$ è un numero intero maggiore di a , quindi $\varphi(a, a + 1)$ è vera.²⁶ La seconda formula è invece

$$\exists y(\forall x(x < y)),$$

che afferma che esiste un intero (quello che andrebbe sostituito ad y) maggiore di tutti gli interi; questa è una proposizione falsa.

Negazione di quantificatori. Come si nega una formula universale? E come si nega una formula esistenziale? Dovrebbe bastare il buon senso a suggerirlo: per stabilire che sia falsa la frase “ogni cittadino italiano si chiama Mario” basta osservare che esiste qualche cittadino italiano che non si chiama Mario; anche se ce ne sono alcuni che effettivamente si chiamano Mario la frase è ugualmente falsa, perché *non tutti* hanno quel nome. Sarebbe un errore pensare che per rendere falsa la frase in questione bisognerebbe che *nessuno* dei cittadini italiani si chiamasse Mario. Questo esempio suggerisce che la negazione di una frase universale sia una frase esistenziale (dove è negata la formula oggetto della quantificazione). È proprio così; per ogni formula φ ed ogni variabile x vale:

$$(\neg(\forall x(\varphi))) \iff (\exists x(\neg\varphi)).^{27} \quad (\text{negazione di formule universali})$$

Simmetricamente, pensiamo che la frase “esiste un cittadino italiano di nome Xwas” sia falsa, non perché esiste un cittadino italiano che non si chiama Xwas, ma perché *nessun* cittadino italiano si chiama Xwas, o, per dirla in modo più utile ai nostri scopi, anche se meno naturale, *ogni* cittadino italiano *non* si chiama Xwas.²⁸ La regola di negazione per le formule esistenziali è, infatti:

$$(\neg(\exists x(\varphi))) \iff (\forall x(\neg\varphi)). \quad (\text{negazione di formule esistenziali})$$

Vale la pena di osservare che questa regola segue dalla precedente e dalle tautologie della **negazione** e della **commutatività** dell’equivalenza. Infatti, “ $(\neg(\exists x(\varphi))) \iff (\forall x(\neg\varphi))$ ” equivale, per queste tautologie, a “ $(\exists x(\varphi)) \iff (\neg(\forall x(\neg\varphi)))$ ” e quindi a “ $(\neg(\forall x(\neg\varphi))) \iff (\exists x(\varphi))$ ”. Questa (per la tautologia della **doppia negazione**) non è altro che la regola per la negazione delle formule universali applicata con $\neg\varphi$ al posto di φ .

Se torniamo all’analogia tra i quantificatori \forall ed \exists ed i connettivi \wedge e \vee , possiamo pensare a queste regole di negazione come all’analogo delle **leggi di De Morgan**.

Notiamo che queste regole di negazione stabiliscono anche l’interdipendenza di \forall ed \exists , nel senso che mostrano come l’uno dei due si possa definire in termini dell’altro; ad esempio, potremmo assumere dato \forall e definire \exists usando l’equivalenza $(\exists x(\varphi)) \iff (\neg(\forall x(\neg\varphi)))$. La situazione, come si vede, è simile a quella dei connettivi proposizionali: abbiamo introdotto due simboli (\forall e \exists) ma ci siamo accorti che, volendo, potremmo fare a meno di uno dei due.

Non sorprendentemente, per formule con quantificatori ristretti abbiamo regole di negazione simili a quelle per i quantificatori non ristretti (le notazioni sono quelle solite; in particolare, S indica un insieme):

$$\neg(\forall x \in S)(\varphi) \iff \exists(x \in S)(\neg\varphi) \quad \text{e} \quad \neg(\exists x \in S)(\varphi) \iff \forall(x \in S)(\neg\varphi).$$

Il senso è chiaro, ma è utile e istruttivo verificare queste formule. Per la prima: $(\forall x \in S)(\varphi)$ significa $\forall x(x \in S \Rightarrow \varphi)$, la cui negazione è $\exists x(\neg(x \in S \Rightarrow \varphi))$. Ricordiamo **come si nega un’implicazione**: affermando l’antecedente e contemporaneamente negando il conseguente. Quindi $\neg(\forall x \in S)(\varphi)$ equivale a $\exists x((x \in S) \wedge (\neg\varphi))$. Ma questa formula, come abbiamo visto sopra, è proprio quella che viene abbreviata con $\exists(x \in S)(\neg\varphi)$. La verifica è così completa. La seconda formula si può dimostrare dalla prima (analogamente a quanto fatto nel caso dei quantificatori non ristretti) oppure in modo diretto, come si suggerisce di fare in **uno dei prossimi esercizi**.

²⁶seguiamo qui una convenzione standard: avendo indicato la formula φ come $\varphi(x, y)$, abbiamo specificato l’ordine in cui consideriamo le variabili. Dunque $\varphi(a, a + 1)$ sarà la formula ottenuta sostituendo a ad x e $a + 1$ ad y , non viceversa.

²⁷stiamo facendo largo uso di parentesi, sperando che questo aiuti nella lettura. Potremmo però anche farne a meno. Ad esempio, questa formula si potrebbe anche scrivere $\neg\forall x(\varphi) \iff \exists x(\neg\varphi)$, senza nessuna ambiguità; si vedano le tautologie della **negazione dell’equivalenza** per il ruolo di \neg nella sua prima occorrenza.

²⁸spero di non essere smentito, su questo punto, da un’indagine anagrafica.

Un errore da evitare. Qualunque sia il termine a , due (ovvie) regole²⁹ stabiliscono la catena di implicazioni:

$$(\forall x(\varphi(x))) \implies \varphi(a) \implies (\exists x(\varphi(x))),$$

da cui segue $(\forall x(\varphi(x))) \implies (\exists x(\varphi(x)))$ (a condizione che si ammetta, come in genere si fa, che esista almeno un oggetto a cui il linguaggio si riferisce). Nel caso in cui i quantificatori siano ristretti la situazione può essere diversa. L'implicazione $((\forall x \in S)(\varphi(x))) \implies ((\exists x \in S)(\varphi(x)))$ vale certamente se S è un insieme non vuoto, *ma non se S è l'insieme vuoto*. Per convincercene, consideriamo il caso in cui φ sia un predicato unario in x . Se $S = \emptyset$ l'antecedente $(\forall x \in \emptyset)(\varphi(x))$ della nostra implicazione è vero (si veda la discussione su queste formule [nella sezione sui quantificatori ristretti](#)) ed il conseguente $(\exists x \in \emptyset)(\varphi(x))$ è falso, quindi l'implicazione è falsa.

Capita non tanto di rado di trovare errori di ragionamento dovuti proprio a questa disattenzione: dal fatto che tutti gli elementi di un insieme abbiano una certa proprietà si deduce l'esistenza di almeno un elemento con quella proprietà. Questo passaggio non è lecito a meno di non essersi assicurati che l'insieme in questione non è vuoto. Per esempio, abbiamo detto che ogni cavallo verde ha otto zampe, da questo non possiamo certamente dedurre che esistano cavalli verdi con otto zampe!

Esercizi.

H.1. Vero o falso? E perché? Questo è un esercizio di corretta lettura ed interpretazione di formule.

- (a) $(\forall x \in \mathbb{N})(x + 1 < x \implies x^2 = 1)$.
- (b) $\exists x \in \mathbb{N}(\forall y \in \mathbb{N}(x \leq y))$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(x < y))$.
- (d) $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}((x = y + 1) \implies (x < y)))$.
- (e) $\exists x \in \mathbb{N}(\forall y \in \mathbb{N}((x < y) \vee (y < x) \vee (y = 11)))$.
- (f) $\exists x \in \mathbb{N}(\forall y \in \mathbb{Z}((x \neq y) \implies (x < y)))$.
- (g) Ogni numero reale il cui quadrato sia negativo è maggiore di 10^{327} .

H.2. Una regola (molto intuitiva) del calcolo dei predicati stabilisce l'equivalenza

$$(\forall x(\varphi \wedge \psi)) \iff ((\forall x(\varphi)) \wedge (\forall x(\psi))),$$

qualsiasi siano le formule φ e ψ (ovviamente x indica una variabile). Oppure mi sbaglio? Anche questo è un esercizio di lettura! Può essere utile pensare a frasi come “ogni giorno mangio una pizza e vado al cinema” e “ogni giorno mangio una pizza e ogni giorno vado al cinema”. Con le stesse notazioni, confrontare tra loro le formule “ $\forall x(\varphi \vee \psi)$ ” e “ $(\forall x(\varphi)) \vee (\forall x(\psi))$ ”.

Ripetere l'esercizio sostituendo, in tutte le formule, “ \forall ” con “ \exists ”.

H.3. Verificare (in modo diretto) la formula $\neg(\exists x \in S)(\varphi) \iff \forall(x \in S)(\neg\varphi)$.

H.4. Si scriva la negazione di $\exists!x(\varphi)$. Sono possibili più risposte, diverse nella forma ma equivalenti tra loro.

H.5. Si neghi ciascuna delle le formule (le notazioni sono le solite):

- (a) $\forall x(\exists y(\varphi(x, y) \implies \psi(x, y)))$;
- (b) $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\neg\psi(x, y)))$;
- (c) $\forall x, y(\exists z(z \neq y \wedge \varphi(x, z)))$;

H.6. Si neghi ciascuna delle frasi:

- (a) Ogni volta che vedo Astolfo, litighiamo.
- (b) Una volta ho visto Astolfo ed ho bevuto un caffè.
- (c) Tutti i giorni della prossima settimana andrò al cinema, ed uno di quei giorni andrò in pizzeria.

7. INSIEMI

Sia $\varphi = \varphi(x)$ un predicato unario nella variabile x . Si indica col simbolo $\{x \mid \varphi\}$ la totalità (potremmo anche dire: la collezione, la classe; stiamo usando questi termini in modo del tutto informale) degli oggetti a che, sostituiti ad x in φ , rendono φ vera (vale a dire: tali che $\varphi(a)$ sia una formula vera). Questa totalità si chiama anche l'*estensione* di φ . Si può pensare a φ come espressione di una ‘proprietà’ che un oggetto può soddisfare oppure no, allora la sua estensione $\{x \mid \varphi\}$ è la totalità degli oggetti che soddisfano (verificano, hanno) la proprietà espressa da φ . Ad esempio, la formula “ $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3)$ ”,

²⁹la prima delle quali si chiama *regola di specializzazione*

esprime la proprietà di “essere un numero naturale minore di 3”, e $\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3)\}$ è costituito dai numeri 0, 1 e 2.

La teoria degli insiemi tratta di enti matematici, appunto gli insiemi, che formalizzano l’idea intuitiva di ‘aggregato di oggetti’; gli assiomi di questa teoria regolano in modo preciso il modo in cui su questi enti si può operare. Un tentativo (quello del logico tedesco Gottlob Frege) di fondare l’intera teoria sull’idea che l’estensione di ogni predicato unario si possa considerare come insieme fallì molto presto, non appena si scoprì che questa assunzione porta necessariamente a contraddizioni.³⁰ In altri termini: non sempre l’estensione $\{x \mid \varphi(x)\}$ di un predicato φ (unario, in x) è un insieme. Detto in modo ancora diverso, esistono ‘proprietà’ perfettamente ragionevoli e ben definite (cioè espresse da un predicato unario) tali che, sfortunatamente, non esista l’insieme degli oggetti che le verificano. Ad esempio, tutti gli studenti che sono stati sottoposti ad una qualche infarinatura di teoria degli insiemi (come questa!) dovrebbero sapere che *non esiste l’insieme di tutti gli insiemi*; si vedano a questo proposito l’Esempio I.2 e l’Esercizio I.3.

Qualcosa dell’idea di Frege, però, si salva. Dato un predicato unario φ , se proviamo a selezionare tutti gli oggetti che verificano φ è possibile, lo abbiamo appena detto, che non si ottenga un insieme; ma se noi abbiamo già a disposizione un insieme S e limitiamo la selezione ai soli elementi di S (lasciando perdere tutto ciò che non appartenga ad S), allora sicuramente otteniamo un insieme: l’insieme degli elementi di S che verificano φ . Ce lo assicura uno degli assiomi della teoria degli insiemi, l’*assioma di separazione* (o di *comprensione*; più precisamente, si tratta di uno schema di assiomi, ma non entriamo in questa sottigliezza). In modo più esplicito: dati un insieme S ed un predicato unario φ nella variabile x , la formula “ $(x \in S) \wedge \varphi$ ” è ancora un predicato unario in x ;³¹ l’assioma di separazione dice che, in queste circostanze, l’estensione $\{x \mid (x \in S) \wedge \varphi(x)\}$ di questo predicato è un insieme. Per indicare questo insieme si usa, in genere, una notazione più compatta: $\{x \in S \mid \varphi(x)\}$. L’insieme così ottenuto è ovviamente una parte di S .

Un altro assioma che conviene menzionare è l’assioma di *estensionalità*. Questo assioma stabilisce che gli insiemi sono completamente determinati dai loro elementi, ovvero: dati un insieme A ed un insieme B , si ha $A = B$ se e solo se A e B hanno esattamente gli stessi elementi—si veda l’Esercizio I.5. Abbiamo implicitamente fatto uso di questo assioma quando abbiamo descritto $\{x \mid \varphi(x)\}$ (quando è un insieme) e $\{x \in S \mid \varphi(x)\}$ specificando solo quali sono i loro elementi.

Torniamo sul significato di queste espressioni. Trattiamo come oggetti matematici ‘veri e propri’ gli insiemi, ma non le estensioni di predicati che non siano insiemi. Quindi, continuando ad usare le notazioni che abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti, per noi $\{x \mid \varphi(x)\}$ esiste come oggetto della matematica se è un insieme, non esiste altrimenti. In effetti, più in generale, nella teoria degli insiemi standard si assume abitualmente che *non esistano enti matematici che non siano insiemi*.³² Scriviamo dunque formule come $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ solo nel caso in cui $\{x \mid \varphi(x)\}$ sia un insieme. In questo caso,

$$\text{l'uguaglianza } A = \{x \mid \varphi(x)\} \text{ equivale a: } \forall x(x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

Invece la formula $A = \{x \in S \mid \varphi(x)\}$ ha sempre senso, perché il secondo membro è un insieme, e

$$\text{l'uguaglianza } A = \{x \in S \mid \varphi(x)\} \text{ equivale a: } \forall x(x \in A \Leftrightarrow ((x \in S) \wedge \varphi(x))).$$

Esempi, Osservazioni, Esercizi (alcuni non facili).

I.1. Usando l’assioma di estensionalità verificare che esiste solo un insieme vuoto.

I.2. Abbiamo detto che se φ è un predicato unario, non necessariamente esiste l’insieme $\{x \mid \varphi(x)\}$ degli oggetti che verificano φ . Per convincerci di questo fatto, esaminiamo un esempio. Scegliamo come φ la formula $x \notin x$ e supponiamo che esista l’insieme $\{x \mid x \notin x\}$, che possiamo chiamare R . Stando al significato che abbiamo stabilito per questa notazione, abbiamo: $\forall x(x \in R \Leftrightarrow x \notin x)$. La **regola di specializzazione**, applicata sostituendo di R a x , fornisce allora $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Questa è evidentemente una contraddizione; dobbiamo concludere che l’insieme $\{x \mid x \notin x\}$ non esiste.

Questo esempio contiene la cosiddetta *Antinomia* (o *Paradosso*) di Russell (da ciò l’uso della lettera R) ed ha una bella ed istruttiva storia alle spalle (anzi, **almeno due**).

³⁰Stiamo rendendo breve una storia che è molto più lunga e complessa. In particolare, il primo sistema di assiomi per la teoria degli insiemi, quello di Zermelo (1908), è storicamente successivo all’emersione delle contraddizioni a cui stiamo accennando.

³¹come già capitato in casi analoghi, ci stiamo prendendo una piccola libertà: trattiamo in questa formula S come un simbolo di costante. Per una versione meglio formulata dell’assioma di separazione si veda l’Esercizio I.4.

³²Esistono teorie degli insiemi alternative, un po’ più sofisticate, nelle quali le cose non stanno così e si può dare un significato matematico preciso a $\{x \mid \varphi(x)\}$ anche nel caso in cui questo non sia un insieme.

I.3. Usando l'osservazione precedente (I.2) e l'**assioma di separazione**, dimostrare che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi. Cosa sappiamo dire su $\{x \mid x = x\}$?

I.4. Sia φ un predicato unario in x . La formula $\forall y \exists z \forall x ((x \in z) \Leftrightarrow ((x \in y) \wedge \varphi))$ è uno dei modi per esprimere l'**assioma di separazione** 'applicato' a φ (per meglio dire: l'istanza dell'assioma di separazione per φ). Verificarlo; è un ulteriore esercizio di lettura.

I.5. Assumendo che non esistano oggetti che non siano insiemi l'**assioma di estensionalità** è invece espresso dalla formula: $(\forall y, z)(y = z \Leftrightarrow (\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z)))$. Verificarlo.

Formule insiemistiche. La vaga ed imperfetta corrispondenza tra predicati unari ed insiemi, di cui abbiamo parlato nella sezione precedente, può essere comunque usata per tradurre risultati del calcolo proposizionale (come la validità di tautologie) in formule della teoria degli insiemi. Questa sorta di traduzione si può ottenere facendo corrispondere relazioni o operazioni insiemistiche a connettivi proposizionali, come vedremo con diversi esempi.

Come punto di partenza, osserviamo che l'idea di estensione di un predicato, discussa nella sezione precedente, si può in un certo senso invertire. Infatti, ogni insieme A si può considerare come l'estensione del predicato " $x \in A$ ", vale a dire: $A = \{x \mid x \in A\}$.³³ Ora, se A e B sono insiemi, l'**assioma di estensionalità** ci dice che vale:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B),$$

mentre, per definizione di inclusione,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Queste due formule suggeriscono che, nello stesso senso, informale in cui facciamo corrispondere (ovvero 'traduciamo') i predicati " $x \in A$ " e " $x \in B$ " con A e B , possiamo far corrispondere i connettivi \Leftrightarrow e \Rightarrow ai simboli di uguaglianza e di inclusione tra insiemi. Ci vuole poco a convincersi di come, nella stessa ottica, la **tautologia della doppia implicazione** si traduca nella ben nota regoletta insiemistica della doppia inclusione. A titolo di esempio, verifichiamolo in dettaglio, senza timore di essere troppo pignoli. La tautologia assicura che " $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ " sia equivalente a " $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$ ". Inoltre, una delle tante regole del calcolo dei predicati (si veda l'**Esercizio H.2**) stabilisce l'equivalenza

$$(\forall x(\varphi \wedge \psi)) \Leftrightarrow ((\forall x(\varphi)) \wedge (\forall x(\psi))). \quad (*)$$

qualsiasi siano le formule φ e ψ . Abbiamo allora le equivalenze (alcune scritte in verticale, questa volta, e giustificate da un commento a destra):

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\Downarrow && \text{(tautologia)} \\ \forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) & \\ &\Downarrow && \text{(regola (*))} \\ (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)) & \\ &\Downarrow && \text{(definizione di inclusione)} \\ (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A). & \end{aligned}$$

Quindi, e non è una sorpresa, $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$; questa è la regola della doppia inclusione. In modo analogo, la tautologia della **transitività dell'implicazione** fornisce la *transitività dell'inclusione*:

$$(\forall A, B, C)((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C);$$

è un utile esercizio verificarlo in dettaglio.

Abbiamo fatto corrispondere i simboli di uguaglianza e inclusione ai connettivi di equivalenza e di implicazione; è chiaro cosa si possa far corrispondere ai connettivi di congiunzione e disgiunzione: le operazioni di intersezione e di unione (binarie). Questo perché, scelti comunque gli insiemi A e B , si ha

$$\forall x(x \in A \cap B \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))) \quad \text{e} \quad \forall x(x \in A \cup B \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))),$$

³³ovviamente questa non sarebbe accettata come una vera e propria descrizione di A . Il discorso su questo punto andrebbe approfondito, ma così si andrebbe molto al là dei nostri scopi. Osserviamo ancora (vedi la nota 31) che nella formula " $x \in A$ " trattiamo A come una costante, similmente faremo in formule analoghe, dove altri insiemi appaiono al posto di A .

quindi il predicato di appartenenza ad $A \cap B$ equivale alla congiunzione del predicato di appartenenza ad A e di quello di appartenenza ad B , mentre il predicato di appartenenza ad $A \cup B$ equivale alla disgiunzione di questi due.³⁴ Dalle tautologie di **idempotenza**, **commutatività** e **associatività** (pag. 7) e dalle **leggi distributive** (pag. 8) per \wedge e \vee si ottengono dunque le analoghe proprietà per le operazioni di unione e intersezione tra insiemi: per ogni A, B, C si ha:

$$\begin{array}{lll} A = A \cap A, & A \cap B = B \cap A, & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \\ A = A \cup A, & A \cup B = B \cup A, & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}$$

e

$$\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{array}$$

Ad esempio, per la commutatività di \wedge abbiamo $((x \in A) \wedge (x \in B)) \iff ((x \in B) \wedge (x \in A))$; ma in questa equivalenza il primo membro equivale a $x \in A \cap B$, il predicato da appartenenza ad $A \cap B$, il secondo membro equivale a $x \in B \cap A$, il predicato da appartenenza ad $B \cap A$. Quindi questi due predicati sono equivalenti e così $A \cap B = B \cap A$ per l'**assioma di estensionalità**. In modo analogo si ragiona per le altre uguaglianze.

Il connettivo di negazione presenta invece una difficoltà: se A è un insieme allora $\{x \mid x \notin A\}$, l'estensione della negazione del predicato di appartenenza ad A , non è un insieme (si veda l'**Esercizio J.3**). Dunque, non abbiamo a disposizione una immediata 'traduzione' insiemistica di \neg . Assegnati comunque due insiemi A e B , abbiamo però l'insieme $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, e questo ci permette comunque di tradurre in formule insiemistiche tautologie sulla negazione.

Ancora De Morgan. Vediamo il caso delle leggi di De Morgan. Siano A, B e C insiemi, e chiamiamo α, β e γ i corrispondenti predicati di appartenenza nella variabile x : α è " $x \in A$ ", β è " $x \in B$ " e γ è " $x \in C$ ". Allora " $x \in A \setminus (B \cap C)$ " equivale ad $\alpha \wedge (\neg(\beta \wedge \gamma))$. Ora, utilizzando la prima delle **leggi di De Morgan** e poi una delle **leggi distributive**, abbiamo:

$$(\alpha \wedge (\neg(\beta \wedge \gamma))) \iff (\alpha \wedge ((\neg\beta) \vee (\neg\gamma))) \iff ((\alpha \wedge (\neg\beta)) \vee (\alpha \wedge (\neg\gamma))).$$

Ricordando le definizioni di α, β e γ , vediamo che l'ultima formula in questa catena equivale a " $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ". Quindi " $x \in A \setminus (B \cap C)$ " e " $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ " sono equivalenti. Similmente, " $x \in A \setminus (B \cup C)$ " equivale ad $\alpha \wedge ((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma))$, quindi ad $(\alpha \wedge (\neg\beta)) \wedge (\alpha \wedge (\neg\gamma))$, cioè a " $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ". Abbiamo così due importanti formule, che, analogamente alle tautologie, sono note come **formule di De Morgan**: scelti comunque gli insiemi A, B e C ,

$$\begin{array}{l} A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{array} \quad (\text{De Morgan})$$

Differenza simmetrica. Definiamo l'operazione insiemistica Δ di **differenza simmetrica** come l'operazione corrispondente alla disgiunzione esclusiva; poniamo dunque, per ogni A e B ,

$$A \Delta B := \{x \mid (x \in A) \text{ XOR } (x \in B)\}.$$

Questa operazione ha proprietà algebriche notevoli che non sono evidenti a prima vista; per questo essa assume un ruolo centrale per lo studio di strutture importanti in informatica, come gli anelli booleani.

Le tautologie che abbiamo chiamato **esplicitazione di XOR**:

$$(p \text{ XOR } q) \iff ((p \wedge (\neg q)) \vee (q \wedge (\neg p))) \iff ((p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)))$$

danno facilmente (chi legge è invitato a verificarlo):

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A),$$

mentre la **commutatività** e l'**associatività** di XOR e la **distributività di \wedge rispetto a XOR** forniscono, ancora più direttamente, la commutatività e l'associatività di Δ e la distributività di \cap rispetto a Δ . Per ogni A, B, C , abbiamo, cioè:

$$A \Delta B = B \Delta A; \quad A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C; \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

³⁴va aggiunto che $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \in A \mid x \in B\}$ e $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ sono effettivamente insiemi se lo sono A e B ; nel primo caso ciò segue dall'**assioma di separazione**, nel secondo invece da un altro, apposito assioma della teoria degli insiemi, che si chiama, guarda caso, **assioma dell'unione**.

Parti di un fissato insieme. La difficoltà che abbiamo incontrato con la ‘traduzione’ del connettivo di negazione scompare se limitiamo le nostre formule a parti di un prefissato insieme anziché ad insiemi arbitrari. Vediamo come. Fissiamo un insieme S . Se A è una parte di S , come abbiamo detto non esiste l’insieme degli oggetti che non appartengono ad A , ma invece esiste (per l’**assioma di separazione**) l’insieme degli elementi di S che non appartengono ad A ; questo insieme è $S \setminus A$. Possiamo dunque considerare l’operazione (unaria) di scelta del complemento in S come ‘traduzione’ insiemistica del connettivo di negazione (nel prefissato ambiente S). Le ‘traduzioni’ degli altri connettivi logici ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \wedge, \vee, \text{XOR}$) che avevamo a disposizione nel caso generale continuano ad essere valide senza sostanziali modifiche (ad esempio, per arbitrarie parti A e B di S vale: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in S)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$) e possiamo, come sopra, ottenere rapidamente formule della teoria degli insiemi da tautologie.

Ad esempio, la tautologia della **doppia negazione** si traduce nella formula

$$S \setminus (S \setminus A) = A \quad \text{per ogni } A \subseteq S$$

(bisogna fare attenzione: questa formula vale nell’ipotesi $A \subseteq S$; se A ed S sono insiemi arbitrari si ha $S \setminus (S \setminus A) = S \cap A$; vedi l’**Esercizio J.4**).

Cosa ricaviamo di nuovo dalle tautologie sulla implicazione? Se A e B sono parti di S , sappiamo che $A \subseteq B$ equivale a $(\forall x \in S)(x \in A \Rightarrow x \in B)$. La tautologia della **implicazione come disgiunzione** e la **legge di contrapposizione** (ricordiamo: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$) mostrano che “ $x \in A \Rightarrow x \in B$ ” equivale da una parte a “ $(x \notin A) \vee (x \in B)$ ”, dall’altra a “ $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ ”. La conclusione è che, per ogni insieme S e per arbitrarie parti A e B di S ,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow S = (S \setminus A) \cup B \Leftrightarrow S \setminus B \subseteq S \setminus A.$$

Osservazioni ed Esercizi.

J.1. Quello descritto nell’ultima sezione di queste note è solo uno dei tanti metodi per provare formule insiemistiche. Esistono tanti altri metodi, ad esempio quello dei diagrammi di Euler-Venn; a seconda dei casi (e dei gusti) può essere conveniente usare i metodi descritti qui o uno degli altri.

Si incoraggia chi legge a verificare le formule dimostrate in quest’ultima sezione *anche* utilizzando i diagrammi di Euler-Venn.

J.2. Siano φ e ψ due predicati unari nella variabile x . Nell’ipotesi che le loro estensioni $A_\varphi = \{x \mid \varphi\}$ e $A_\psi = \{x \mid \psi\}$ siano insiemi, si ha: $A_\varphi = A_\psi \Leftrightarrow (\forall x(\varphi \Leftrightarrow \psi))$ e $A_\varphi \subseteq A_\psi \Leftrightarrow (\forall x(\varphi \Rightarrow \psi))$.

J.3. Dimostrare che, come detto **nel testo**, se A è un insieme allora non esiste l’insieme degli oggetti che non appartengono ad A . Suggerimento: se esistesse questo insieme, allora la sua unione con A sarebbe ...

J.4. Provare, per *arbitrari* insiemi S ed A che $S \setminus (S \setminus A) = S \cap A$. Suggerimento: una volta che si sia osservato che $S \cap A \subseteq S$ e $S \setminus A = S \setminus (S \cap A)$, la dimostrazione è quasi completa.

J.5. Anche il **principio del terzo escluso** e quello di **non contraddizione** hanno una traduzione insiemistica: per ogni insieme S ed ogni sua parte A si ha $A \cup (S \setminus A) = S$ e $A \cap (S \setminus A) = \emptyset$. Verificarlo. Queste formule restano valide senza l’ipotesi che A sia contenuto in S ?

J.6. Dedurre da una delle tautologie proposte nell’**Esercizio E.8** la formula:

$$(\forall A, B, C)((A \subseteq B \cap C) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C))).$$

La formula analoga, con \cup e \vee al posto di \cap e \wedge , non vale. Come mai? (Riguardare *tutto* l’**Esercizio E.8**).