Partizioni ed equivalenze

GIOVANNI CUTOLO

In queste pagine vengono presentate due nozioni insiemistiche di grande importanza e strettamente collegate tra loro, quella di partizione e quella di relazione di equivalenza. Come vedremo le due nozioni sono di fatto interscambiabili.

1. Partizioni

Sia A un insieme. Per definizione, una partizione di A è un insieme $\mathcal{F}$ di parti non vuote di A con la proprietà che ciascun elemento di A appartenga ad uno ed un solo elemento di $\mathcal{F}$, vale a dire:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\varnothing\} \qquad \wedge \qquad \forall x \in A \; \big(\exists! y \in \mathcal{F}(x \in y)\big).$$

Ad esempio, se A è l'insieme $\{1, 2, 3\}$, allora una delle partizioni di A è l'insieme $\big\{\{1\}, \{2, 3\}\big\}$. Non vanno confuse tra loro le nozioni di partizione e quella di parte, che sono molto diverse tra loro benché abbiano nomi simili: quasi sempre una parte (cioè un sottoinsieme) di un insieme non ne è una partizione ed una partizione non ne è una parte. Gli elementi di una partizione vengono qualche volta chiamati anche *blocchi* della partizione.

Una semplice caratterizzazione delle partizioni è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 1. *Siano A e $\mathcal{F}$ due insiemi. Allora $\mathcal{F}$ è una partizione di A se e solo se valgono le seguenti tre proprietà:*

(i) $\bigcup \mathcal{F} = A$;
(ii) $\forall b, c \in \mathcal{F} \; (b \neq c \Rightarrow b \cap c = \varnothing)$;
(iii) $\forall b \in \mathcal{F} \; (b \neq \varnothing)$.

Dimostrazione. Supponiamo in primo luogo che $\mathcal{F}$ sia una partizione di A e proviamo che valgono (i), (ii) e (iii). Per definizione di partizione, $\varnothing \notin \mathcal{F}$, quindi è certamente verificata la condizione (iii). Inoltre, ogni elemento di $\mathcal{F}$ è una parte di A, quindi $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A$ e, viceversa, sempre per definizione di partizione, ogni elemento di A appartiene ad un elemento di $\mathcal{F}$, quindi $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ e possiamo concludere che vale (i)[(1)]. Dimostriamo (ii) ragionando per assurdo. Supponiamo che (ii) sia falsa, cioè che esistano $b, c \in \mathcal{F}$ tali che $b \neq c$ e $b \cap c = \varnothing$.[(2)] Fissati tali b e c, allora esiste $x \in b \cap c$; dunque x è un elemento di A che appartiene a due elementi distinti di $\mathcal{F}$ (a b ed a c), in contraddizione con la definizione di partizione. Questa contraddizione mostra che così come (i) e (iii), anche (ii) è vera se $\mathcal{F}$ è una partizione di A.

Abbiamo dimostrato che la condizione espressa nell'enunciato è necessaria affinché $\mathcal{F}$ sia una partizione; proviamone la sufficienza. Supponiamo dunque che valgano (i), (ii) e (iii). Sia b un elemento di $\mathcal{F}$. Ovviamente $b \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, quindi, per (i), b è una parte di A e, per (iii), $b \neq \varnothing$. Sia ora $x \in A$. Allora, per (i), x appartiene ad almeno un elemento, chiamiamolo ancora b, di $\mathcal{F}$. Se x appartenesse anche ad un elemento c di $\mathcal{F}$ diverso da b, allora avremmo $x \in b \cap c$, quindi $b \cap c \neq \varnothing$ e, poiché $b \neq c$, sarebbe contraddetta (ii). Dunque $\mathcal{F}$ è un insieme di parti non vuote di A ed ogni elemento di A appartiene ad esattamente un elemento di $\mathcal{F}$, quindi $\mathcal{F}$ è una partizione di A, come richiesto. □

In termini più sintetici (ma meno espliciti), la proposizione ci dice che una partizione di un insieme A è un insieme di parti non vuote di A, a due a due disgiunte, la cui unione sia A.

Spesso viene usata la condizione richiesta da questa caratterizzazione come definizione della nozione di partizione. Ovviamente questo approccio è perfettamente equivalente al nostro.

Indicheremo con $\mathrm{Partz}(A)$ l'insieme delle partizioni dell'insieme A. Segue facilmente dalla definizione che l'unica partizione dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso (vale a dire: $\mathrm{Partz}(\varnothing) = \{\varnothing\}$). Se A è un insieme non vuoto, tra le sue partizioni ci sono certamente le cosiddette *partizioni banali*, che sono quella costituita dai singleton degli elementi di A, vale a dire $\mathcal{P}_1(A) = \big\{\{x\} \mid x \in A\big\}$, e quella che ha A stesso come unico elemento, vale a dire $\{A\}$. A titolo di esercizio, può essere utile verificare le affermazioni appena fatte e le seguenti:

- L'unica partizione dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso.
- Se A è un singleton, allora $\{A\}$ è l'unica partizione di A (in questo caso, quindi le partizioni banali di A coincidono. Ovviamente, se $A = \{x\}$, allora $\{A\} = \big\{\{x\}\big\}$);
- Se $|A| = 2$, allora A ha esattamente due partizioni, quelle banali, che in questo caso non coincidono. Ad esempio, se $A = \{1, 2\}$, allora $\mathrm{Partz}(A)$ ha due elementi: la partizione $\mathcal{P}_1(A) = \big\{\{1\}, \{2\}\big\}$ e la partizione $\big\{\{A\}\big\}$.

---

(1) ricordiamo che $\bigcup \mathcal{F}$, anche scritto $\bigcup_{b \in \mathcal{F}} b$, è l'insieme $\{x \mid \exists b \in \mathcal{F}\,(x \in b)\}$ degli oggetti che appartengano ad almeno un elemento di $\mathcal{F}$.

(2) la negazione di (ii) è espressa da: $\exists b, c \in \mathcal{F}\; (b \neq c \wedge b \cap c \neq \varnothing)$.

- Se $|A| = \{1, 2, 3\}$, allora A ha esattamente cinque partizioni: le due banali, $\mathcal{P}_1(A) = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\big\}$ e $\big\{\{A\}\big\}$, ed inoltre le tre partizioni $\big\{\{1\}, \{2, 3\}\big\}$, $\big\{\{2\}, \{1, 3\}\big\}$, $\big\{\{3\}, \{2, 3\}\big\}$ costituite da un singleton ed un insieme di due elementi.
- Per ogni insieme A ed ogni suo sottoinsieme x tale che $\varnothing \neq x \neq A$, l'insieme $\{x, A \smallsetminus x\}$ è una partizione di A. Questo non resta vero se non si richiede la condizione $\varnothing \neq x \neq A$, come mai? Verificare che ogni partizione $\mathcal{F}$ di A tale che $|\mathcal{F}| = 2$ ha questa stessa forma, infatti se x ne è un elemento, allora l'altro elemento di $\mathcal{F}$ è $A \smallsetminus x$.

La penultima affermazione può essere giustificata (anche) facendo uso di questa osservazione davvero elementare:

- Sia A un insieme finito e sia $\mathcal{F} \in \mathrm{Partz}(A)$. Allora $|A| = \sum_{b \in \mathcal{F}} |b|$.

Infine, dalla definizione di partizione segue che per ogni insieme A ed ogni sua partizione $\mathcal{F}$ è ben definita l'applicazione $\pi_{\mathcal{F}} \colon A \to \mathcal{F}$ che a ciascun $x \in A$ associa l'unico $b \in \mathcal{F}$ tale che $x \in b$. Chiamiamo $\pi_{\mathcal{F}}$ la *proiezione* di A su $\mathcal{F}$. Abbiamo:

Lemma 2. *Per ogni A ed ogni $\mathcal{F} \in \mathrm{Partz}(A)$ la proiezione $\pi_{\mathcal{F}}$ di A su $\mathcal{F}$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che ogni elemento di $\mathcal{F}$ è nell'immagine di $\pi_{\mathcal{F}}$. Sia $b \in \mathcal{F}$. Poiché, per definizione di partizione, $b \neq \varnothing$, esiste $x \in b$. Fissato un tale x, allora b è l'unico elemento di $\mathcal{F}$ a cui x appartiene, dunque $b = \pi_{\mathcal{F}}(x)$ e $b \in \operatorname{im} \pi_{\mathcal{F}}$. Pertanto, $\pi_{\mathcal{F}}$ è suriettiva. □

2. Relazioni di equivalenza

Fissiamo un insieme A. Una relazione binaria $\sim$ in A è, come ben noto, una *relazione di equivalenza* se e solo se verifica ciascuna delle tre proprietà:

riflessiva: $\forall x \in A\ (x \sim x)$;
simmetrica: $\forall x, y \in A\ (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$;
transitiva: $\forall x, y, z \in A\ \big((x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z\big)$.

Indichiamo con $\mathrm{Eq}(A)$ l'insieme delle relazioni di equivalenza in A. Vediamo alcuni esempi; è importante che chi legge sia in grado di giustificare pienamente tutte le affermazioni che seguono:

(1) Per ogni insieme A, come è facile verificare (farlo!) sono relazioni di equivalenza la relazione di uguaglianza in A (rispetto alla quale due qualsiasi elementi x e y di A sono in relazione se e solo $x = y$) e la relazione universale in A (cioè la relazione binaria τ in A tale che $x\ \tau\ y$ per ogni $x, y \in A$). La relazione di uguaglianza in A ha per grafico l'insieme $\Delta_A := \{(x, x) \mid x \in A\}$, mentre la relazione universale ha per grafico $A \times A$.

(2) Sia ρ la relazione binaria in $\mathbb{Z}$ definita da: $\forall x, y \in \mathbb{Z}\ (x\ \rho\ y \iff x + y$ è pari$)$. Verifichiamo che ρ è di equivalenza. Per ogni $x \in \mathbb{Z}$, il numero $x + x = 2x$ è pari, quindi $x\ \rho\ x$; dunque vale la proprietà riflessiva. Per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x\ \rho\ y \iff x + y$ è pari $\iff y + x$ è pari $\iff y\ \rho\ x$; vale quindi anche la proprietà simmetrica. Infine, verifichiamo la proprietà transitiva: siano $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ed assumiamo $x\ \rho\ y$ e $y\ \rho\ z$. Allora $x + y$ e $y + z$ sono pari, quindi è pari la loro somma $x + 2y + z$ e quindi anche $x + z = (x + y) + (y + z) - 2y$, dunque $x\ \rho\ z$. Pertanto $\rho \in \mathrm{Eq}(A)$.

(3) Modifichiamo l'esempio precedente considerando la relazione binaria ρ_3 definita in modo analogo alla precedente ma sostituendo la nozione di numero pari (cioè multiplo di 2) con quella di numero multiplo di 3. Dunque ρ_3 è la relazione binaria in $\mathbb{Z}$ definita da: $\forall x, y \in \mathbb{Z}\ (x\ \rho_3\ y \iff x+y$ è multiplo di 3$)$. La relazione ρ_3 non è riflessiva (infatti, ad esempio, $1 \not\rho_3 1$), quindi non è di equivalenza. Cambiando ancora relazione, definiamo ρ_3^*, ancora una relazione binaria in $\mathbb{Z}$, ponendo: $\forall x, y \in \mathbb{Z}\ \big(x\ \rho_3^*\ y \iff (x = y \vee x\ \rho_3\ y)\big)$. A differenza della precedente, ρ_3^* è riflessiva, inoltre essa è simmetrica, ma non è transitiva, ad esempio perché $1\ \rho_3^*\ 2$ e $2\ \rho_3^*\ 4$, ma $1 \not\rho_3^* 4$. Dunque, neanche ρ_3^* è una relazione di equivalenza.

(4) Sia σ la relazione binaria definita in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ponendo, per ogni $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $x\ \sigma\ y \iff x \cap \mathbb{N} = y \cap \mathbb{N}$. Per ogni $x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ si ha $x \cap \mathbb{N} = x \cap \mathbb{N}$, ovvero $x\ \sigma\ x$, quindi σ è riflessiva; per ogni $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, se $x\ \sigma\ y$, cioè $x \cap \mathbb{N} = y \cap \mathbb{N}$, allora $y \cap \mathbb{N} = x \cap \mathbb{N}$, ovvero $y\ \sigma\ x$, quindi σ è simmetrica; per ogni $x, y, z \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, se $x\ \sigma\ y$ e $y\ \sigma\ z$, cioè $x \cap \mathbb{N} = y \cap \mathbb{N}$ e $y \cap \mathbb{N} = z \cap \mathbb{N}$, allora $x \cap \mathbb{N} = z \cap \mathbb{N}$, cioè $x\ \sigma\ z$. Abbiamo verificato anche la proprietà transitiva per σ, quindi $\sigma \in \mathrm{Eq}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

In modo particolare, l'ultimo degli esempi ammette un'importante generalizzazione, che andiamo ora a discutere.

Sia $f \colon A \to B$ una qualsiasi applicazione di dominio l'insieme A. Si chiama *nucleo di equivalenza di f* la relazione binaria $\Re_f$ definita ponendo, per ogni $x, y \in A$, $x\ \Re_f\ y \iff f(x) = f(y)$. Ad esempio, la relazione di equivalenza σ considerata nell'ultimo degli esempi appena visti è il nucleo di equivalenza dell'applicazione $x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto x \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ (ma anche, ad esempio, della sua ridotta $x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto x \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$). Non solo in questo caso, ma sempre, i nuclei di equivalenza sono relazioni di equivalenza; verifichiamolo:

Proposizione 3. *Siano $f \colon A \to B$ un'applicazione e $\Re_f$ il suo nucleo di equivalenza. Allora $\Re_f \in \mathrm{Eq}(A)$.*

Dimostrazione. La verifica, molto semplice, segue la falsariga dell'esempio già visto. Per ogni $x \in A$ si ha ovviamente $f(x) = f(x)$, ovvero $x\ \Re_f\ x$, quindi $\Re_f$ è riflessiva; per ogni $x, y \in A$, abbiamo $x\ \Re_f\ y \iff f(x) = f(y) \iff f(y) = f(x) \iff y\ \Re_f\ x$, quindi $\Re_f$ è simmetrica; per ogni $x, y, z \in A$, se $x\ \Re_f\ y$ e $y\ \Re_f\ z$, cioè $f(x) = f(y)$ e $f(y) = f(z)$, allora $f(x) = f(z)$, cioè $x\ \Re_f\ z$; quindi $\Re_f$ è transitiva. □

In alcuni testi il nucleo di equivalenza di un'applicazione viene chiamato *equivalenza associata* (all'applicazione). La costruzione del nucleo di equivalenza fornisce immediatamente un gran numero di esempi di relazioni di equivalenza: per ottenere una relazione di equivalenza in un insieme A basta considerare una qualsiasi applicazione che abbia A come dominio ed il nucleo di equivalenza di questa. Non solo: questa costruzione permette di verificare in modo diretto che alcune relazioni binarie sono di equivalenza. Ad esempio, consideriamo la relazione binaria $\sim$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, $x \sim y \iff x^2 - 3x = y^2 - 3y$. Si può verificare che $\sim$ è di equivalenza procedendo, come fatto per gli esempi presentati sopra, a verificare le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, ma anche, più rapidamente ed in un colpo solo, osservando che $\sim$ è il nucleo di equivalenza dell'applicazione $n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 - 3n \in \mathbb{Z}$, e quindi $\sim \in \mathrm{Eq}(\mathbb{N})$ per la proposizione 3.

Un punto molto importante, che discuteremo più avanti (corollario 10), è che quella dei nuclei di equivalenza non è semplicemente una costruzione che fornisce esempi di relazioni di equivalenza, ma è l'esempio più generale possibile, nel senso che le fornisce tutte: vedremo infatti che ogni relazione di equivalenza è il nucleo di equivalenza di qualche applicazione.

Esercizio 4. Determinare le applicazioni f tali che…

i) …il nucleo di equivalenza di f sia la relazione di uguaglianza nel dominio di f;
ii) …il nucleo di equivalenza di f sia la relazione universale nel dominio di f.

3. Classi di equivalenza ed insieme quoziente

Forse la più importante nozione legata alle relazioni di equivalenza è quella di classe di equivalenza. Siano A un insieme, x un suo elemento e $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$. La *classe di equivalenza* di x rispetto a $\sim$ (si dice anche: "modulo $\sim$") è l'insieme

$$[x]_\sim := \{y \in A \mid y \sim x\},$$

che è ovviamente una parte di A. Osserviamo subito che, per ogni $x \in A$, $x \in [x]_\sim$, per la proprietà riflessiva di $\sim$ (dunque $[x]_\sim \neq \varnothing$), e $[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}$, dal momento che, per la proprietà simmetrica, scelti comunque x e y in A si ha $y \sim x \iff x \sim y$.

Con queste stesse notazioni, si chiama *insieme quoziente* (di A rispetto a $\sim$, o modulo $\sim$) l'insieme

$$A/{\sim} = \{[x]_\sim \mid x \in A\}$$

di tutte le classi di equivalenza rispetto a $\sim$ degli elementi di A.

Facciamo un esempio: se ρ è la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$ presentata all'esempio (2) di pagina 2, allora $[0]_\rho = \{n \in \mathbb{Z} \mid n + 0 \text{ è pari}\}$, quindi $[0]_\rho$ è l'insieme $P = 2\mathbb{Z}$ dei numeri interi pari. Similmente $[1]_\rho = \{n \in \mathbb{Z} \mid n + 1 \text{ è pari}\}$ è l'insieme $D = \mathbb{Z} \smallsetminus 2\mathbb{Z}$ dei numeri interi dispari. Seguirà dai prossimi risultati che ci accingiamo a provare che $\mathbb{Z}/\rho$ è una partizione di $\mathbb{Z}$, e di conseguenza, poiché $\mathbb{Z} = P \cup D$, si ha $\mathbb{Z}/\rho = \{P, D\}$.

Le proprietà principali delle classi di equivalenza sono raccolte nella proposizione 7; per comodità di esposizione ne verifichiamo prima un caso particolare:

Lemma 5. *Siano A un insieme, $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$ e $x, y \in A$. Sono allora equivalenti:*

(i) *$x \sim y$;*
(ii) *$x \in [y]_\sim$;*
(iii) *$[x]_\sim = [y]_\sim$.*

Dimostrazione. Per definizione di classe d'equivalenza, certamente (i) $\iff$ (ii). Supponiamo ora che valga (i). Per ogni $z \in [x]_\sim$ si ha, sempre per la stessa definizione, $z \sim x$, quindi, per la proprietà transitiva, $z \sim y$, cioè $z \in [y]_\sim$. Dunque, se vale (i), allora $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$. Ma, se vale (i) si ha anche $y \sim x$, per la proprietà simmetrica, quindi, scambiando i ruoli di x e di y, abbiamo anche $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$. Abbiamo così provato che (i) implica (iii). Infine, se assumiamo (iii), poiché, come sappiamo, $x \in [x]_\sim$ per la proprietà riflessiva, concludiamo $x \in [y]_\sim$. Dunque (iii) implica (ii). A questo punto la dimostrazione è completa. □

Proposizione 6. *Siano A un insieme e $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$. Allora $A/{\sim}$ è una partizione di A. Inoltre, per ogni $x \in A$, l'unica classe di equivalenza rispetto a $\sim$ a cui x appartenga è $[x]_\sim$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in A$, sappiamo che vale $x \in [x]_\sim$. Se $y \in A$ è tale che $x \in [y]_\sim$, allora, per il lemma precedente, $[y]_\sim = [x]_\sim$. Possiamo concludere che $[x]_\sim$ è l'unica classe di equivalenza rispetto a $\sim$ a cui x appartenga (giustificando così l'ultima parte dell'enunciato). Abbiamo anche provato che $A/{\sim}$ è un insieme di parti non vuote di A con la proprietà che ogni elemento di A appartenga ad uno ed un solo elemento di $A/{\sim}$, quindi $A/{\sim} \in \mathrm{Partz}(A)$, come richiesto dalla prima parte dell'enunciato. □

Proposizione 7. *Siano A un insieme, $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$ e $x, y \in A$. Sono allora equivalenti:*

(i) *$x \sim y$;*
(ii) *$y \sim x$;*
(iii) *$x \in [y]_\sim$;*
(iv) *$y \in [x]_\sim$;*
(v) *$[x]_\sim = [y]_\sim$;*
(vi) *$[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \varnothing$.*

Dimostrazione. (i) e (ii) sono equivalenti tra loro per la proprietà simmetrica, e, per il lemma 5, sono anche equivalenti a (iii), (iv) e (v). Se queste valgono, allora, ovviamente, $[x]_\sim \cap [y]_\sim = [x]_\sim \neq \varnothing$, e quindi vale (vi). Infine, $[x]_\sim$ e $[y]_\sim$ sono due elementi di $A/\sim$, che è una partizione per la proposizione 6, quindi, come segue dalla proposizione 1, se $[x]_\sim \neq [y]_\sim$, allora $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing$. Questo vuol dire che (vi) implica (v); a questo punto la dimostrazione è completata.(3) □

Possiamo aggiungere un semplice esercizio: nelle ipotesi della proposizione 7, anche la condizione $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$ equivale a $x \sim y$.

È utile fissare l'attenzione su questo punto stabilito nella proposizione 7: scelti comunque due elementi x e y di un insieme A sul quale sia assegnata una relazione di equivalenza $\sim$, si verifica necessariamente una delle due: o $x \sim y$ e $[x]_\sim = [y]_\sim$, oppure $x \nsim y$ e $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing$.

La proposizione 6 garantisce che ogni insieme quoziente è una partizione. Vale anche l'inverso: ogni partizione è l'insieme quoziente rispetto ad una relazione di equivalenza; più precisamente rispetto ad una ed una sola relazione di equivalenza. Questo è il contenuto del teorema fondamentale su partizioni e relazioni di equivalenza.

Teorema 8. *Per ogni insieme A, l'applicazione $\sim \in \mathrm{Eq}(A) \longmapsto A/\sim \in \mathrm{Partz}(A)$ è biettiva.*

Dimostrazione. Chiamiamo α l'applicazione $\sim \in \mathrm{Eq}(A) \mapsto A/\sim \in \mathrm{Partz}(A)$ considerata nell'enunciato. Innanzitutto, osserviamo che α è ben definita per la proposizione 6. Per verificare che α è iniettiva, supponiamo che ρ e σ siano relazioni di equivalenza in A tali che $\alpha(\rho) = \alpha(\sigma)$, cioè $A/\rho = A/\sigma$, e proviamo che di conseguenza $\rho = \sigma$. Per ogni $x \in A$, si ha ovviamente $[x]_\rho \in A/\rho$, ma anche $A/\rho = A/\sigma$, quindi $[x]_\rho \in A/\sigma$, vale a dire: $[x]_\rho$ è una classe di equivalenza rispetto a σ. L'unico elemento di A/σ a cui x appartenga è $[x]_\sigma$ (ancora per la proposizione 6), pertanto $[x]_\sigma = [x]_\rho$. Questo vale per ogni $x \in A$. Ora, per ogni $x, y \in A$ abbiamo:

$$x \;\rho\; y \iff [x]_\rho = [y]_\rho \iff [x]_\sigma = [y]_\sigma \iff x \;\sigma\; y,$$

per via del lemma 5 e della coincidenza, appena osservata, tra le classi modulo σ e quelle modulo ρ. La conclusione è che σ e ρ coincidono. Abbiamo così provato che α è iniettiva.

Proviamo ora che α è suriettiva. Sia $\mathcal{F} \in \mathrm{Partz}(A)$, e sia $\pi = \pi_{\mathcal{F}}$ la proiezione di A su $\mathcal{F}$, cioè, ricordiamo, l'applicazione che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere quell'unico elemento di $\mathcal{F}$ a cui x appartiene. Sia ora $\sim$ il nucleo di equivalenza di π. Per ogni $x \in A$ la classe $[x]_\sim$ è l'insieme degli $y \in A$ tali che $\pi(y) = \pi(x)$. Come dovrebbe essere chiaro, si ha $\pi(y) = \pi(x)$ se e solo se $y \in \pi(x)$, quindi $[x]_\sim = \pi(x)$. Allora

$$A/\sim\, = \{[x]_\sim \mid x \in A\} = \{\pi(x) \mid x \in A\} = \operatorname{im} \pi = \mathcal{F},$$

per il lemma 2. Abbiamo appena provato che $\mathcal{F}$ è l'immagine di $\sim$ mediante α. Con questo è verificato che α è suriettiva, dunque biettiva. □

La dimostrazione appena esposta fornisce anche una descrizione dell'inversa dell'applicazione α. Se, nelle notazioni del teorema, $\mathcal{F}$ è una partizione di A, allora l'immagine di $\mathcal{F}$ mediante α^{-1} è la relazione di equivalenza $\sim$ in A descritta nella dimostrazione come nucleo di equivalenza di π, cioè quella definita da: $\forall x, y \in A\ (x \sim y \iff \pi(x) = \pi(y))$, o, per darne una descrizione ancora più esplicita, da:

$$\forall x, y \in A\ \big(x \sim y \iff (\exists\, b \in \mathcal{F}(x \in b \wedge y \in b))\big),$$

infatti, se $x \in A$ e $b \in \mathcal{F}$ sono tali che $x \in b$, allora $b = \pi(x)$ (perché $\pi(x)$ è *l'unico* blocco di $\mathcal{F}$ a cui x appartenga), quindi se x e y sono due elementi di A, dire che essi appartengono ad uno stesso blocco di $\mathcal{F}$ equivale a dire: $\pi(x) = \pi(y)$.

Il teorema 8 è di grande importanza: esso stabilisce che il problema di descrivere le relazioni di equivalenza in un dato insieme è essenzialmente lo stesso che quello (generalmente più facile da affrontare direttamente) dello studio delle partizioni dello stesso insieme. Per descrivere le prime basta descrivere le seconde ed usare la biezione che abbiamo chiamato α^{-1} per 'tradurre' le partizioni in relazioni di equivalenza. Facciamo qualche esempio:

(1) Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e consideriamo la partizione $\mathcal{F} = \big\{\{0,2,4\}, \{1\}, \{3,9\}, \{5,6,7,8\}\big\}$ di A (è una partizione, vero?). Qual è la relazione di equivalenza $\sim$ di A che corrisponde ad $\mathcal{F}$? In accordo con quanto appena stabilito, è quella descritta dalla proprietà che due arbitrari elementi di A siano in relazione se e solo se appartengono allo stesso blocco di $\mathcal{F}$. Dunque sono equivalenti tra loro 0, 2 e 4 (che però non sono equivalenti ad altri elementi di A), 1 è equivalente solo a sé stesso;(4) sono equivalenti tra loro 3 e 9 ed infine sono equivalenti tra loro (ma non equivalenti a 1, 3 e 9) i rimanenti elementi: 5, 6, 7 e 8. Per essere ancora più espliciti, il grafico di $\sim$ è l'insieme

$$(\{0,2,4\} \times \{0,2,4\}) \cup \{(1,1)\} \cup (\{3,9\} \times \{3,9\}) \cup (\{5,6,7,8\} \times \{5,6,7,8\}),$$

(3) A titolo di esercizio, o di ulteriore chiarificazione, mostriamo anche in che modo si può dedurre che (vi) implica (v) per via diretta. Assumiamo che valga (vi). Allora esiste $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$, dunque z appartiene sia a $[x]_\sim$ che a $[y]_\sim$. Ma, per la proposizione 6, $[z]_\sim$ è l'unica classe rispetto a $\sim$ a cui z appartenga, dunque $[x]_\sim = [z]_\sim = [y]_\sim$ e quindi $[x]_\sim = [y]_\sim$.

(4) chi avesse perplessità sull'ortografia può consultare il sito dell'Accademia della Crusca, ad esempio 1, 2 o 3

cioè l'insieme

$$\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7.7),(8,8),(9,9),\\ (0,2),(2,0),(2,4),(4,2),(0,4),(4,0),(3,9),(9,3),\\ (5,6),(6,5),(5,7),(7,5),(5,8),(8,5),(6,7),(7,6),(6,8),(8,6),(7,8),(8,7)\}$$

che può essere rappresentato, in modo molto meno pesante, dalla tabella (ogni cella della tabella rappresenta una elemento di $A \times A$, quelle marcate da un pallino rappresentano gli elementi del grafico):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	●		●		●					
1		●								
2	●		●		●					
3				●						●
4	●		●		●					
5						●	●	●	●	
6						●	●	●	●	
7						●	●	●	●	
8						●	●	●	●	
9				●						●

(2) le due relazioni di equivalenza banali in un insieme $A \neq \varnothing$, cioè la relazione di uguaglianza e la relazione universale, corrispondono alle due partizioni banali di A, infatti il quoziente di A rispetto alla relazione di uguaglianza è $\mathcal{P}_1(A) = \{\{x\} \mid x \in A\}$ (ogni classe di equivalenza è un singleton), quello rispetto alla relazione universale è $\{A\}$ (poiché tutti gli elementi di A sono in relazione tra loro, A costituisce una classe di equivalenza). Cosa cambia se A è l'insieme vuoto?

(3) Dal teorema fondamentale (il teorema 8), segue che, per ogni insieme A, ci sono tante relazioni di equivalenza in A quante sono le partizioni di A. Ad esempio, se $|A| = 2$, poiché, come abbiamo visto sopra, A ha esattamente due partizioni (quelle banali), A ha anche esattamente due relazioni di equivalenza (quelle banali). Quante sono le relazioni di equivalenza in A se $|A| < 2$?

(4) Descriviamo le relazioni di equivalenza in un insieme di tre elementi: $A = \{1, 2, 3\}$. Per farlo ci basta elencare le partizioni di A e quindi applicare il teorema 8. Le partizioni già le conosciamo: come abbiamo visto in un esempio precedente sono in tutto cinque, le due partizioni banalie e poi le tre partizioni $F_1 = \big\{\{1\}, \{2, 3\}\big\}$, $F_2 = \big\{\{2\}, \{1, 3\}\big\}$ ed $F_3 = \big\{\{3\}, \{1, 2\}\big\}$. Allora le relazioni di equivalenza in A saranno anch'esse cinque: le due banali (quella di uguaglianza e quella universale) e le tre relazioni di equivalenza σ_1, σ_2 e σ_3 che corrispondono, nell'ordine, a F_1, F_2 ed F_3. Le rappresentiamo in tabella:

σ_1	1	2	3
1	●		
2		●	●
3		●	●

σ_2	1	2	3
1	●		●
2		●	
3	●		●

σ_3	1	2	3
1	●	●	
2	●	●	
3			●

(5) Abbiamo usato il teorema 8 per elencare le relazioni di equivalenze in un insieme, vediamo ora un esempio di in cui lo stesso teorema viene usato per elencare tutte le relazioni di equivalenza (sempre in un assegnato insieme) con assegnate proprietà, traducendo questo problema in un problema espresso in termini di partizioni. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$. Proviamo a descrivere l'insieme E di tutte le relazioni di equivalenza $\sim$ in A tali che $0 \sim 1 \nsim 2$, $3 \in [1]_\sim \subseteq [5]_\sim$, $4 \in [2]_\sim \cap [6]_\sim$ e $7 \sim 8$. Usando la proposizione 7 (ed il piccolo esercizio che segue), possiamo verificare (farlo in dettaglio) che la condizione equivale al richiedere $7 \sim 8$, che gli elementi di $X := \{0, 1, 3, 5\}$ siano equivalenti tra loro e quelli di $Y := \{2, 4, 6\}$ siano equivalenti tra loro ma non a quelli di X. In altri termini la condizione significa precisamente questo: che X sia contenuto in una classe di equivalenza in $A/\sim$ ed Y sia contenuto in una classe di equivalenza in $A/\sim$ diversa da quella contenente X, ed infine che $7 \sim 8$. Usiamo il teorema 8 per tradurre il nostro problema in termini di partizioni di A: dobbiamo cercare le partizioni di A costituite da almeno due blocchi distinti, uno contenente X ed uno contenente Y, ed in cui 7 ed 8 appartengono allo stesso blocco; siccome $A = X \cup Y \cup \{7, 8\}$ questo implica che i blocchi di una tale partizione sono al massimo tre. È facile riconoscere che le partizioni che soddisfano le condizioni sono tre: una con tre blocchi distinti: $F_1 := \{X, Y, \{7, 8\}\}$, e due con soli due blocchi: $F_2 := \{X \cup \{7, 8\}, Y\}$ e $F_3 := \{X, Y \cup \{7, 8\}\}$. Quindi, per il teorema 8, l'insieme E che volevamo descrivere ha esattamente tre elementi, le tre relazioni corrispondenti a F_1, F_2 e F_3, descritte come segue. Come già avevamo osservato, rispetto a tutte e tre gli elementi di X sono equivalenti tra loro, e quelli di Y pure, ma quelli di X non sono equivalenti a quelli di Y, inoltre 7 ed 8 sono equivalenti tra loro. Rispetto alla prima relazione di equivalenza (quella corrispondente a F_1) 7 ed 8 non sono equivalenti a nessun elemento di X o di Y, rispetto alla seconda (quella corrispondente a F_2) 7 ed 8 sono equivalenti agli elementi di X, rispetto alla terza (quella corrispondente a F_3) 7 ed 8 sono equivalenti agli elementi di Y.

4. Ancora sui nuclei di equivalenza

Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si chiama *proiezione canonica* (di A su $A/\sim$, oppure definita da $\sim$) l'applicazione

$$\pi_\sim \colon x \in A \longmapsto [x]_\sim \in A/\sim.$$

È evidente dalla definizione di insieme quoziente che $\pi_\sim$ è suriettiva, ma in realtà questo è già noto dal lemma 2, dal momento che $\pi_\sim$ non è altro che la proiezione di A su $A/\sim$ visto come partizione di A. Da questo e dalla dimostrazione del teorema 8 si potrebbe fare seguire la proposizione seguente, di cui però forniamo una dimostrazione diretta.

Proposizione 9. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza. Allora $\sim$ è il nucleo di equivalenza della proiezione canonica che definisce.*

Dimostrazione. Continuiamo ad usare la notazioni appena introdotte; sia $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$ e sia $\pi_\sim \colon A \to A/\sim$ la proiezione canonica. Sia ρ il nucleo di equivalenza di $\pi_\sim$. Allora, per ogni x, $y \in A$, abbiamo:

$$x \,\rho\, y \iff \pi_\sim(x) = \pi_\sim(y) \iff [x]_\sim = [y]_\sim \iff x \sim y,$$

per il lemma 5. Dunque, $\rho = \sim$ e l'enunciato è provato. □

È davvero importante questa conseguenza, che avevamo già annunciato:

Corollario 10. *Ogni relazione di equivalenza è il nucleo di equivalenza di qualche applicazione.*

In maggior dettaglio, se A è un insieme e $\sim$ è una relazione di equivalenza in A, esiste almeno un'applicazione f *di dominio* A tale che $\sim$ sia il nucleo di equivalenza di f. Non dimostriamo qui (ma non è difficile farlo) che è possibile scegliere f in modo che A sia anche il codominio di f.

Notiamo che applicazioni diverse possono avere lo stesso nucleo di equivalenza. Ad esempio, segue dall'esercizio 4 che le relazioni di equivalenza banali in un, qualsiasi, fissato insieme non vuoto sono nuclei di equivalenza di infinite applicazioni. Per fare un esempio diverso, le applicazioni $n \in \mathbb{Z} \mapsto |n| \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} \mapsto |n| \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2 \in \mathbb{Z}$ e tante altre hanno lo stesso nucleo di equivalenza: la relazione binaria in $\mathbb{Z}$ che dichiara equivalenti due numeri interi se e solo se essi hanno lo stesso valore assoluto.

Abbiamo così che le relazioni di equivalenza si possono riguardare da almeno tre punti di vista: come particolari relazioni binarie, secondo la definizione, come concetto associato a quello di partizione (attraverso il teorema 8) e come nozione collegata a quella di applicazione: le relazioni di equivalenza sono i nuclei di equivalenza delle applicazioni. Mentre però il teorema 8 mostra che la corrispondenza tra relazioni di equivalenza e partizioni in un dato insieme è descritta da un'applicazione biettiva, e per questo studiare le partizioni dell'insieme equivale a studiarne le relazioni di equivalenza, lo stesso non vale nel caso delle applicazioni e dei corrispondenti nuclei di equivalenza.

Studiamo ora in maggior dettaglio i nuclei di equivalenza ed i corrispondenti quozienti.

Lemma 11. *Siano $f \colon A \to B$ un'applicazione e τ il suo nucleo di equivalenza. Allora, per ogni $x \in A$, si ha $[x]_\tau = \overleftarrow{f}\big(\{f(x)\}\big)$*

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Allora $[x]_\tau = \{y \in A \mid y \;\tau\; x\} = \{y \in A \mid f(y) = f(x)\}$. Ora, per ogni $y \in A$, la condizione $f(y) = f(x)$ è equivalente a $f(y) \in \{f(x)\}$, cioè alla condizione che y appartenga all'antiimmagine $\overleftarrow{f}\big(\{f(x)\}\big)$ di $\{f(x)\}$ mediante f. Pertanto $[x]_\tau = \big\{y \in A \mid y \in \overleftarrow{f}\big(\{f(x)\}\big)\big\} = \overleftarrow{f}\big(\{f(x)\}\big)$. □

Teorema 12 (teorema di omomorfismo per insiemi)**.** *Siano $f \colon A \to B$ un'applicazione e τ il suo nucleo di equivalenza. Allora, l'applicazione*

$$y \in \operatorname{im} f \longmapsto \overleftarrow{f}\big(\{y\}\big) \in A/\tau$$

è biettiva ed ha per inversa l'applicazione

$$\tilde{f} \colon [x]_\tau \in A/\tau \longmapsto f(x) \in \operatorname{im} f.$$

Di conseguenza, $|A/\tau| = |\operatorname{im} f|$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\operatorname{im} f$ è, per definizione, l'insieme $\{f(x) \mid x \in A\}$, quindi per ogni $y \in \operatorname{im} f$ esiste $x \in A$ tale che $y = f(x)$ e così, per il lemma 11, $\overleftarrow{f}\big(\{y\}\big) = [x]_\tau \in A/\tau$. Questo mostra che l'applicazione $\alpha \colon y \in \operatorname{im} f \mapsto \overleftarrow{f}\big(\{y\}\big) \in A/\tau$ è ben definita. Verifichiamo che essa è suriettiva. Per ogni $c \in A/\tau$ esiste $x \in A$ tale che $c = [x]_\tau$, e $[x]_\tau = \overleftarrow{f}\big(\{f(x)\}\big)$ ancora per il lemma 11, inoltre $f(x) \in \operatorname{im} f$, dunque $c = \alpha(f(x))$. Pertanto α è suriettiva. Per verificare che α è iniettiva siano ora $u, v \in \operatorname{im} f$ tali che $\alpha(u) = \alpha(v)$. Dal momento che $u \in \operatorname{im} f$, esiste $x \in A$ tale che $u = f(x)$. Per tale x si ha così $x \in \overleftarrow{f}\big(\{u\}\big) = \alpha(u)$. Ma abbiamo assunto $\alpha(u) = \alpha(v)$, quindi si ha anche $x \in \alpha(v) = \overleftarrow{f}\big(\{v\}\big)$, cioè $f(x) = v$. Pertanto $u = f(x) = v$. Abbiamo così mostrato che α è iniettiva, quindi anche biettiva. Vogliamo infine descrivere α^{-1}. A questo scopo, sia c un qualsiasi elemento di A/τ. Naturalmente $c = [x]_\tau$ per un opportuno $x \in A$, e $\alpha(f(x)) = \overleftarrow{f}\big(\{f(x)\}\big) = [x]_\tau$ per il lemma 11, quindi $f(x) = \alpha^{-1}([x]_\tau) = \alpha^{-1}(c)$. In questo modo abbiamo verificato che l'inversa di α è, come richiesto dall'enunciato, l'applicazione $\tilde{f} \colon [x]_\tau \in A/\tau \mapsto f(x) \in \operatorname{im} f$, provando così anche che quest'applicazione è ben definita. □

La situazione descritta nel teorema precedente può essere descritta da questo diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_\tau"'] & B \\ A/\tau \arrow[r, "\tilde{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

in cui π_τ è la proiezione canonica definita dal nucleo di equivalenza τ dell'applicazione f, $\tilde{f}$ è definita come nell'enunciato del teorema e ι è l'immersione di $\operatorname{im} f$ in B, ed $\tilde{f}$ è biettiva per il teorema 12. Risulta $f = \iota \circ \tilde{f} \circ \pi_\tau$, infatti per ogni $x \in A$ si ha $(\iota \circ \tilde{f} \circ \pi_\tau)(x) = \iota(\tilde{f}(\pi_\tau(x))) = \iota(\tilde{f}([x]_\tau)) = \iota(f(x)) = f(x)$. Siccome π_τ è suriettiva, $\tilde{f}$ è biettiva e ι è iniettiva, vediamo così che *ogni applicazione è ottenibile come composta tra un'applicazione iniettiva ed una suriettiva*: $f = (\iota \circ \tilde{f}) \circ \pi_\tau$.(5)

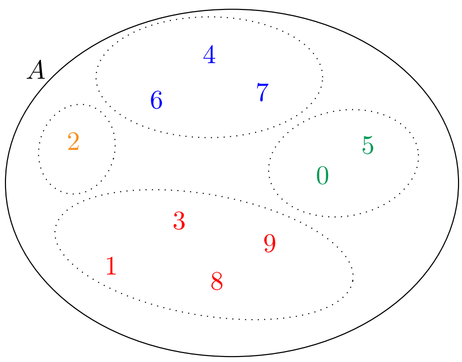
Vediamo qualche esempio:

(1) Siano $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq n \leq 5\}$ e $f\colon n \in A \mapsto n^2 \in \mathbb{N}$. Sia poi τ il nucleo di equivalenza di f. Per descrivere il quoziente A/τ possiamo partire dalla descrizione di $\operatorname{im} f$. Dovrebbe essere chiaro che $\operatorname{im} f = \{n^2 \mid n \in A\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$. Allora $\operatorname{im} f$ ha sei elementi, quindi, per il teorema 12 abbiamo $|A/\tau| = 6$; in altri termini in A ci sono esattamente sei classi di equivalenza rispetto a τ, che corrispondono ai sei elementi di $\operatorname{im} f$. Le classi, cioè gli elementi di A/τ sono dunque, sempre per lo stesso teorema: $\overleftarrow{f}(\{0\}) = \{0\}$, $\overleftarrow{f}(\{1\}) = \{1, -1\}$, $\overleftarrow{f}(\{4\}) = \{2, -2\}$, $\overleftarrow{f}(\{9\}) = \{3, -3\}$, $\overleftarrow{f}(\{16\}) = \{4\}$ e $\overleftarrow{f}(\{25\}) = \{5\}$.

(2) Utilizziamo lo stesso insieme A dell'esempio precedente, e studiamo il nucleo di equivalenza σ dell'applicazione $g\colon x \in \mathcal{P}(A) \mapsto x \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Iniziamo con l'identificare $\operatorname{im} f$. Posto $B = A \cap \mathbb{N}$, per ogni $x \in \mathcal{P}(B)$ si ha evidentemente $g(x) = x \cap \mathbb{N} \subseteq B$. Viceversa, per ogni $y \in \mathcal{P}(B)$ abbiamo $y = y \cap \mathbb{N} = g(y)$, quindi $y \in \operatorname{im} g$. Pertanto $\operatorname{im} g = \mathcal{P}(B)$ e quindi, come mostra il teorema 12, $|\mathcal{P}(A)/\sigma| = |\operatorname{im} g| = |\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|} = 32$. Come sono fatte le singole classi di equivalenza rispetto a σ? Sempre per lo stesso teorema esse corrispondono agli elementi di $\operatorname{im} g = \mathcal{P}(B)$, sono cioè gli insiemi $\overleftarrow{g}(\{y\})$ al variare di $y \in \mathcal{P}(B)$. Ad esempio, l'elemento $\varnothing$ di $\mathcal{P}(B)$ corrisponde alla classe $\overleftarrow{g}(\{\varnothing\}) = \{x \in \mathcal{P}(A) \mid g(x) = \varnothing\} = \{x \in \mathcal{P}(A) \mid x \cap \mathbb{N} = \varnothing\}$. Non è difficile vedere che questo insieme è $\mathcal{P}(A \smallsetminus B) = \mathcal{P}(\{-3, -2, -1\})$, un insieme di otto elementi. Chi legge può provare a dimostrare che, per ogni $y \in \mathcal{P}(B)$ si ha $\overleftarrow{g}(\{y\}) = \{x \in \mathcal{P}(A) \mid g(x) = y\} = \{y \cup z \mid z \in \mathcal{P}(A \smallsetminus B)\}$ e questo insieme ha esattamente otto elementi. Come ulteriore esempio, dal momento che $g(\{1, -1\}) = \{1\}$, il lemma 11 mostra che $[\{1, -1\}]_\sigma = \overleftarrow{g}(g(\{1, -1\})) = \overleftarrow{g}(\{1\}) = \{\{1\} \cup z \mid z \in \mathcal{P}(A \smallsetminus B)\}$.

Per un esempio conclusivo, che illustri i diversi punti di vista presentati in queste note, facciamo ancora una volta riferimento allo stesso insieme A, attribuendo un colore ad i suoi elementi, come indicato qui: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Con riferimento ad A ed a questi colori possiamo ...:

- ... definire una relazione di equivalenza $\rho \in \operatorname{Eq}(A)$ dichiarando, per ogni $x, y \in A$, $x \mathrel{\rho} y$ se e solo se x e y hanno lo stesso colore;
- ... definire un'applicazione $c\colon A \to C$, dove C è un insieme di colori contenente (almeno) i quattro colori utilizzati, ad esempio $C = \{$*verde*, *rosso*, *giallo*, *arancione*, *blu*, *grigio*$\}$. Come la nostra rappresentazione suggerisce, c manda 0 e 5 in *verde*, 1, 3, 8 e 9 in *rosso*, 4, 6 e 7 in *blu* e 2 in *arancione*.
- ... "raggruppare" gli elementi di A per colore, come nel diagramma che segue. Questo significa definire una partizione $\mathcal{F}$ di A costituita da quattro blocchi, uno per ciascuno dei colori utilizzati, ciascuno dei quali è l'insieme degli elementi di A del colore dato, quindi $\mathcal{F} = \big\{\{0, 5\}, \{1, 3, 8, 9\}, \{4, 6, 7\}, \{2\}\big\}$:



Vediamo (e se non lo vediamo immediatamente riflettiamoci sopra sino a convincercene) che ρ non è altro che il nucleo di equivalenza di c, e che $\mathcal{F}$ è precisamente A/ρ. Come sappiamo dal teorema 8, $\mathcal{F}$ è determinata univocamente da ρ e ρ è determinata univocamente da $\mathcal{F}$, quindi assegnare ρ equivale ad assegnare $\mathcal{F}$. In accordo con il teorema 12, $\mathcal{F} = A/\rho$ ha esattamente $4 = |\operatorname{im} c|$ elementi (le quattro classi rispetto a ρ, ovvero i quattro colori utilizzati). Notiamo infine che, mentre $\mathcal{F}$ e ρ sono determinate da c, c non è univocamente determinata da $\mathcal{F}$ e ρ. Infatti, se proviamo a cambiare l'insieme C (il codominio di c) aggiungendo ad esempio un nuovo colore (come *viola*), oppure cancellando da esso uno dei colori non usati (come *grigio*), l'applicazione c cambia, ma il suo nucleo

(5) o, se si preferisce, $f = \iota \circ (\tilde{f} \circ \pi_\tau)$.

di equivalenza resta ρ. Ancora più radicalmente, possiamo scambiare tra loro i colori, o sostituirne alcuni con altri in modo che l'applicazione c cambi senza che cambi il suo nucleo di equivalenza. Ad esempio, se ripetiamo l'intera discussione a partire da una colorazione di A come questa: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, otteniamo un insieme C ed un'applicazione c sicuramente diversi da quelli presentati sopra ma, come si invita chi legge a verificare, la relazione d'equivalenza e la partizione risultanti (quelle che sopra erano ρ ed $\mathcal{F}$) non cambieranno.