Tautologie e identità insiemistiche

Le formule nella metà sinistra della pagina sono tautologie (le lettere minuscole a, b, c indicano variabili proposizionali); quelle nella metà destra sono le corrispondenti formule della teoria degli insiemi, che valgono qualsiasi siano le collezioni A, B, C e la collezione S *che le comprenda tutte*.

Proprietà associativa:

$$(a \wedge b) \wedge c \iff a \wedge (b \wedge c) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(a \vee b) \vee c \iff a \vee (b \vee c) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Proprietà commutativa:

$$a \wedge b \iff b \wedge a \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$a \vee b \iff b \vee a \qquad A \cup B = B \cup A$$
$$(a \iff b) \iff (b \iff a)$$

Proprietà iterativa:

$$(a \wedge a) \iff a \qquad A \cap A = A$$
$$(a \vee a) \iff a \qquad A \cup A = A$$

Proprietà distributiva:

$$\big(a \wedge (b \vee c)\big) \iff \big((a \wedge b) \vee (a \wedge c)\big) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$\big(a \vee (b \wedge c)\big) \iff \big((a \vee b) \wedge (a \vee c)\big) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$\big(a \Rightarrow (b \vee c)\big) \iff \big((a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)\big)$$
$$\big(a \Rightarrow (b \wedge c)\big) \iff \big((a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)\big) \qquad A \subseteq (B \cap C) \iff (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$$

Disgiunzione esclusiva e differenza simmetrica:

$$\big((a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)\big) \iff \big((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)\big) \qquad (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Doppia negazione:

$$\neg(\neg a) \iff a \qquad S - (S - A) = A$$

Leggi di De Morgan:

$$\neg(a \wedge b) \iff \big((\neg a) \vee (\neg b)\big) \qquad S - (A \cap B) = (S - A) \cup (S - B)$$
$$\neg(a \vee b) \iff \big((\neg a) \wedge (\neg b)\big) \qquad S - (A \cup B) = (S - A) \cap (S - B) \qquad (*)$$

Terzo escluso e non contraddizione:

$$a \vee (\neg a) \qquad S = A \cup (S - A)$$
$$\neg\big(a \wedge (\neg a)\big) \qquad \varnothing = A \cap (S - A)$$

Sull'implicazione:

$$(a \iff b) \iff \big((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)\big) \qquad A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$
$$(a \Rightarrow b) \iff \big((\neg a) \vee b\big) \qquad A \subseteq B \iff S = (S - A) \cup B$$

[contrapposizione]
$$(a \Rightarrow b) \iff \big((\neg b) \Rightarrow (\neg a)\big) \qquad A \subseteq B \iff S - B \subseteq S - A$$

[transitività]
$$\big((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)\big) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \qquad (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

$$\big(a \wedge (a \Rightarrow b)\big) \Rightarrow b$$
$$\neg a \Rightarrow (a \Rightarrow b)$$
$$b \Rightarrow (a \Rightarrow b)$$
$$\neg(a \Rightarrow b) \iff \big(a \wedge (\neg b)\big)$$

(*) le leggi di De Morgan, nella loro versione insiemistica, valgono con identica formulazione anche nel caso in cui A e B non siano parti di S