Sezioni e Retrazioni

Come sappiamo bene, la composta di due applicazioni iniettive è necessariamente iniettiva, la composta di due applicazioni suriettive è necessariamente suriettiva. Inoltre:

1. *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due applicazioni componibili.*

(i) *se fg è iniettiva, f è iniettiva;*

(ii) *se fg è suriettiva, g è suriettiva;*

(iii) *se fg è biettiva, f è iniettiva e g è suriettiva.*

Dimostrazione. Iniziamo col provare (i). Sia fg iniettiva; per ogni $x, y \in A$, se $x^f = y^f$ allora $x^{fg} = (x^f)^g = (y^f)^g = y^{fg}$. Ma allora, poiché fg è iniettiva, si ha $x = y$. Abbiamo così dimostrato: $(\forall\, x, y \in A)(x^f = y^f \Rightarrow x = y)$, cioè: f è iniettiva, come richiesto dalla (i).

Proviamo (ii). Sia fg suriettiva. Per ogni $c \in C$ esiste $a \in A$ tale che $c = a^{fg}$. Posto $b = a^f$ abbiamo dunque $c = b^g$. È così provato che ogni elemento di C è immagine mediante g di un elemento di B, ovvero che g è suriettiva. Anche la (ii) è così dimostrata; la (iii) è immediata conseguenza delle prime due. □

Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione. Per definizione, un'applicazione $g\colon B \to A$ si dice:

sezione	di f	se $gf = \mathrm{id}_B$
retrazione	di f	se $fg = \mathrm{id}_A$
inversa	di f	se g è sia una sezione che una retrazione di f.

Come è evidente dalle definizioni, dire che un'applicazione g è una sezione di un'applicazione f equivale a dire che f è una retrazione di g. Una semplice dimostrazione algebrica mostra che se un'applicazione ha sia una sezione che una retrazione, queste devono coincidere. Ciò prova, in particolare, l'unicità della (eventuale) inversa di un'applicazione.

2. *Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione e supponiamo che f abbia una sezione g ed una retrazione h. Allora $g = h$, in particolare g è un'inversa di f. Inoltre g è sia l'unica sezione che l'unica retrazione di f.*

Dimostrazione. Poiché g è una sezione di f si ha $gf = \mathrm{id}_B$, poiché h è una retrazione di f si ha $fh = \mathrm{id}_A$. Allora $g = g\,\mathrm{id}_A = g(fh) = (gf)h = \mathrm{id}_B h = h$. Dunque, g è sia una sezione che una retrazione di f, quindi ne è una inversa. Se g_1 è una qualsiasi sezione di f, applicando a g_1 e h la prima parte dell'enunciato, appena dimostrata, si ottiene $g_1 = h$, quindi $g_1 = g$. Per lo stesso motivo, se h_1 è una retrazione di f si deve avere $g = h_1$. Ciò prova l'unicità di g come sezione e come retrazione di f. □

Dunque, un'applicazione è *invertibile* (cioè ha un'inversa) se e solo se ha sia una sezione che una retrazione. Come segue subito da (**2**), di inversa ce n'è al massimo una:

3. *Sia f un'applicazione invertibile. Allora f ha un'unica inversa.*

L'unica inversa di un'applicazione invertibile f viene indicata come f^{-1}. Come vedremo, un'applicazione non invertibile può avere più di una sezione o più di una retrazione. Iniziamo a studiare le sezioni.

4. *Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione. Esistono sezioni di f se e solo se f è suriettiva.*

Dimostrazione. Se f ha una sezione g, allora $gf = \mathrm{id}_B$. Poiché id_B è suriettiva (in effetti è biettiva), da (**1**) segue che f è suriettiva. Viceversa, se f è suriettiva possiamo definire una sezione di f nel modo che stiamo per descrivere. Per ogni $b \in B$ l'antiimmagine A_b di $\{b\}$ mediante f (definita come $A_b = \{a \in A \mid a^f = b\}$) non è vuota; si può dunque scegliere, in modo arbitrario, un elemento $b^* \in A_b$.[‡] Effettuata questa scelta, poniamo $g\colon b \in B \mapsto b^* \in A$. Possiamo ora dimostrare che g è una sezione di f, cioè che $gf = \mathrm{id}_B$. Sappiamo che gf e id_B hanno lo stesso dominio e lo stesso codominio (B in entrambi i casi), quindi dobbiamo solo provare che $b^{gf} = b^{\mathrm{id}_B}$, cioè $b^{gf} = b$ per ogni $b \in B$. Per ogni tale b abbiamo $b^g \in A_b$, per la definizione di g, e quindi $b^{gf} = (b^g)^f = b$, come si voleva. Dunque g è effettivamente una sezione di f, e così l'enunciato è provato. □

Si può approfondire l'argomentazione svolta nella parte finale dell'ultima dimostrazione per descrivere esplicitamente l'insieme di tutte le sezioni di un'assegnata applicazione suriettiva $f\colon A \twoheadrightarrow B$. Sia g un'applicazione da B ad A. Ponendo $A_b = \{a \in A \mid a^f = b\}$ per ogni $b \in B$, abbiamo infatti, come osservato nella dimostrazione,

[‡] qui stiamo sorvolando su una seria difficoltà, alla quale facciamo solo un cenno. Il fatto che si possano effettuare *in simultanea* le scelte degli elementi b^*, anche, ad esempio, quando gli insiemi coinvolti siano infiniti e non abbiamo a disposizione alcun criterio di selezione per gli elementi di A non è affatto scontato. Per poter effettuare questa scelta, e costruire quindi la sezione g come stiamo qui facendo, è necessario un potente assioma della teoria degli insiemi, l'*assioma di scelta*. Senza questo assioma, non è possibile dimostrare l'enunciato (**4**), che si può anzi provare essere una forma equivalente dell'assioma di scelta.

che g è una sezione di f se e solo se $(b^g)^f = b$ per ogni $b \in B$, ma questa condizione equivale a richiedere $b^g \in A_b$ per ogni $b \in B$. Ciò mostra che le sezioni di f costruite col metodo della dimostrazione di (**4**) sono le uniche esistenti, quindi f ha tante sezioni quanti sono i modi di scegliere un elemento da ciascuno degli insiemi A_b.

Esempio 1. Poniamo $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $B = \{u,v,w\}$, dove $|B| = 3$ (cioè: u, v e w sono a due a due distinti) e sia $f\colon A \to B$ definita da

$$f\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ u & v & u & w & v & u \end{pmatrix}.$$

Chiaramente f è suriettiva. Volendo costruire sezioni di f, consideriamo le antiimmagini mediante f dei singleton degli elementi di B: $A_u = \{1,3,6\}$ (antiimmagine di $\{u\}$), $A_v = \{2,5\}$ (antiimmagine di $\{v\}$) e $A_w = \{4\}$ (antiimmagine di $\{w\}$). Un'applicazione $g\colon B \to A$ è una sezione di f se e solo se manda u in un elemento di A_u, v in un elemento di A_v e w in un elemento di A_w. Quindi abbiamo a disposizione tre possibili scelte (1, 3 o 6) per u^g, due per v^g (2 o 5) ed una sola per w^g: dobbiamo porre necessariamente $w^g = 4$. Esistono dunque esattamente $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sezioni di f. Esse sono le applicazioni da B ad A qui descritte:

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

In generale, il numero delle sezioni di un'applicazione suriettiva $f\colon A \twoheadrightarrow B$ è il prodotto delle cardinalità degli insiemi A_b, definiti come sopra, al variare di b in B. Si osservi che l'insieme $\{A_b \mid b \in B\}$ non è altro che $\operatorname{coim} f$ (e $A_b \neq A_{b'}$ se b e b' sono elementi distinti di B). Quindi:

5. *Il numero delle sezioni di un'applicazione suriettiva f è il prodotto $\prod_{X \in \operatorname{coim} f} |X|$ delle cardinalità degli elementi della coimmagine di f.*

Almeno nel caso finito, il seguente enunciato si può vedere come caso particolare del precedente.

6. *Se un'applicazione $f\colon A \to B$ ha una ed una sola sezione allora essa è biettiva.*

Dimostrazione. Affinché f abbia almeno una sezione, f deve essere suriettiva. Se poi f è suriettiva, essa ha una sola sezione se e solo se, con le notazioni adoperate sinora, $|A_b| = 1$ per ogni $b \in B$ (per ogni $b \in B$ deve esistere una sola possibile scelta per l'immagine per b mediante una sezione di f). Ma questa condizione implica che f è anche iniettiva: se $x, y \in A$ e $x^f = y^f$ allora $x, y \in A_{x^f}$; supponendo $|A_{x^f}| = 1$ si ha quindi $x = y$. È così provato che f è biettiva. □

Vedremo tra poco che, viceversa, le applicazioni biettive sono invertibili, quindi, per (**2**), hanno una ed una solo sezione.

Passiamo ora allo studio delle retrazioni. Solo nel caso degli insiemi non vuoti vale per le retrazioni l'analogo della (**4**).

7. *Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione e supponiamo $A \neq \varnothing$. Esistono retrazioni di f se e solo se f è iniettiva.*

Dimostrazione. Se f ha una retrazione g, allora $fg = \mathrm{id}_A$, quindi, poiché id_A è iniettiva, anche f è iniettiva per (**1**). Viceversa, supponiamo f iniettiva e costruiamo una retrazione di f. Fissiamo un elemento $u \in A$; lo possiamo fare perché, per ipotesi, $A \neq \varnothing$. Per ogni $b \in \operatorname{im} f$ esiste uno ed un solo $b^* \in A$ tale che $(b^*)^f = b$, questo perché f è iniettiva. Definiamo g in questo modo:

$$g\colon b \in B \longmapsto \begin{cases} b^* & \text{se } b \in \operatorname{im} f \\ u & \text{se } b \notin \operatorname{im} f \end{cases} \in A.$$

Vogliamo provare che g è effettivamente una retrazione di f, cioè che $fg = \mathrm{id}_A$. Ovviamente $fg\colon A \to A$, inoltre, per ogni $a \in A$, abbiamo $a^f \in \operatorname{im} f$ e $(a^f)^* = a$, quindi $a^{fg} = (a^f)^g = a$. Ciò mostra che $fg = \mathrm{id}_A$, come si voleva. □

Cosa succede nel caso in cui il dominio A dell'applicazione $f\colon A \to B$ considerata sia l'insieme vuoto? In questo caso f è certamente iniettiva (ogni applicazione di dominio vuoto è trivialmente iniettiva), ma ha una retrazione se e solo se $B = \varnothing$. Infatti, se $B = \varnothing$ allora $f = \mathrm{id}_\varnothing$, ed è facile concludere che $f = f^{-1}$, dunque f è inversa, e quindi retrazione, di se stessa; se invece $B \neq \varnothing$ allora f non ha retrazioni per l'ottimo motivo che non esistono applicazioni da B ad $A = \varnothing$ (come mai?). Notiamo infine una forma equivalente dell'enunciato (**7**): *un'applicazione è iniettiva se e solo se o ha retrazioni o ha dominio vuoto.*

8. *Sia f un'applicazione. Sono equivalenti:*

(*i*) *f è biettiva;*
(*ii*) *f ha una sezione ed una retrazione;*
(*iii*) *f è invertibile.*

Dimostrazione. Che (*iii*) implichi (*ii*) è ovvio, che (*ii*) implichi (*iii*) è stato dimostrato in (**2**). Nel caso in cui il dominio di f non sia vuoto, l'equivalenza tra (*i*) e (*ii*) segue immediatamente da (**4**) e (**7**). Nel caso in cui il dominio sia vuoto, come abbiamo osservato subito prima di questo enunciato, f è invertibile se e solo se anche il codominio di f è vuoto; d'altra parte è chiaro che quest'ultima condizione è necessaria e sufficiente affinché f sia biettiva. Dunque, anche in questo caso (*i*) e (*iii*), e quindi (*ii*), sono equivalenti. □

Chiarita la situazione per quanto riguarda le inverse delle applicazioni, ritorniamo sulle retrazioni delle applicazioni iniettive allo scopo di ottenerne una descrizione esplicita (e quindi, nel caso finito, anche contarle).

9. *Sia $f\colon A \rightarrowtail B$ un'applicazione iniettiva e sia $f_0\colon A \to \operatorname{im} f$ la ridotta di f alla sua immagine.*[♮] *Allora un'applicazione $g\colon B \to A$ è una retrazione di f se e solo se la restrizione di g a $\operatorname{im} f$ è f_0^{-1}.*

Dimostrazione. Il fatto che g sia una retrazione di f significa, per definizione, che $fg = \mathrm{id}_A$. Poiché, fg ha lo stesso dominio, A, e codominio, ancora A, di id_A, ciò equivale all'essere $a^{fg} = a^{\mathrm{id}_A}$, cioè $a^{fg} = a$, per ogni $a \in A$. Sia ora g_0 la restrizione di g a $\operatorname{im} f$. Allora, per ogni $a \in A$, poiché $a^f \in \operatorname{im} f$, si ha $a^{fg} = (a^f)^g = (a^f)^{g_0}$; inoltre $a^{f_0} = a^f$, quindi $a^{fg} = a^{f_0 g_0}$. In conclusione g è una retrazione di f se e solo se $a^{f_0 g_0} = a$ per ogni $a \in A$, cioè se e solo se $f_0 g_0 = \mathrm{id}_A$. Dal momento che f_0 è biettiva, f_0 ha una sola retrazione (come visto in (**2**)), cioè f_0^{-1}. Pertanto $f_0 g_0 = \mathrm{id}_A$ se e solo se $g_0 = f_0^{-1}$. In questo modo è provato che g è una retrazione di f se e solo se $g_0 = f_0^{-1}$, che è quanto affermato dall'enunciato.[!] □

Possiamo esprimere lo stesso enunciato anche in questa forma: con le notazioni fissate,

le retrazioni di f sono tutti e soli i prolungamenti di f_0^{-1} a B.

La questione ora diventa: quali e quanti sono i prolungamenti f_0^{-1} a B? Esaminiamo il problema da un punto di vista più generale. Se $h\colon S \to T$ è un'applicazione e X è un insieme contenente S, come possiamo descrivere i prolungamenti di h a X? Intuitivamente è chiaro che un tale prolungamento si ottiene mandando ogni elemento x di S in x^h ed assegnando arbitrarie immagini (in T) agli elementi di $X \smallsetminus S$. Precisando questa idea, per ogni applicazione $k\colon X \smallsetminus S \to T$ definiamo

$$h_k\colon x \in X \longmapsto \begin{cases} x^h & \text{se } x \in S \\ x^k & \text{se } x \notin S \end{cases} \in T,$$

è chiaro che h_k è un prolungamento di h a X. Si ha:

10. *Con le notazioni appena stabilite, indicando con $\mathcal{P}$ l'insieme dei prolungamenti di h a X, l'applicazione $p\colon k \in \operatorname{Map}(X \smallsetminus S, T) \mapsto h_k \in \mathcal{P}$ è biettiva; la sua inversa è $q\colon t \in \mathcal{P} \mapsto t_{|X\smallsetminus S} \in \operatorname{Map}(X \smallsetminus S, T)$.*[♭]

Dimostrazione. Sia $k \in \operatorname{Map}(X \smallsetminus S, T)$. Allora $k^{pq} = (k^p)^q$ è la restrizione $X \smallsetminus S$ di $k^p = h_k$. Questa restrizione è ovviamente k. Dunque $k^{pq} = k$, quindi $pq = \mathrm{id}_{\operatorname{Map}(X\smallsetminus S,T)}$. Sia ora $t \in \mathcal{P}$. Allora $t^{qp} = h_{t^q}$ è l'applicazione da X a T che manda ogni elemento x di S in x^h ed ogni elemento y di $X \smallsetminus S$ in y^{t^q}; ora, poiché h e t^q sono restrizioni di t, si ha $x^h = x^t$ e $y^{t^q} = y^t$. Quindi t^{qp} manda ogni elemento di X nella sua immagine mediante t dunque $t^{qp} = t$, sicché $qp = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$. In questo modo è provato che q è l'inversa di p e quindi, per (**8**), che p è biettiva. □

Otteniamo a questo punto un'altra utile descrizione delle retrazioni di un'assegnata applicazione iniettiva. Questa descrizione è forse meno immediata di quella fornita in (**9**), ma più esplicita. Riprendiamo le notazioni di (**9**) per l'applicazione $f\colon A \rightarrowtail B$ e la sua ridotta f_0, e indichiamo con $\mathcal{R}$ l'insieme delle retrazioni di f, dunque $\mathcal{R} = \{g \in \operatorname{Map}(B, A) \mid fg = \mathrm{id}_A\}$.

11. *Con le notazioni appena fissate, per ogni applicazione $k\colon B \smallsetminus \operatorname{im} f \to A$ si ponga:*

$$g_k\colon b \in B \longmapsto \begin{cases} b^{f_0^{-1}} & \text{se } b \in \operatorname{im} f \\ b^k & \text{se } b \notin \operatorname{im} f \end{cases} \in A.$$

Allora l'applicazione $\theta\colon k \in \operatorname{Map}(B \smallsetminus \operatorname{im} f, A) \longmapsto g_k \in \mathcal{R}$ è biettiva.

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente da (**9**) e da (**10**). □

[♮] quindi f_0 è l'applicazione: $a \in A \mapsto a^f \in \operatorname{im} f$; chiaramente f_0 è biettiva.

[!] non si faccia assolutamente confusione su questo punto: in questa dimostrazione abbiamo potuto dedurre $g_0 = f_0^{-1}$ da $f_0 g_0 = \mathrm{id}_A$ *soltanto perché già sapevamo che f_0 è biettiva.* In generale, se $h\colon X \to Y$ e $k\colon Y \to X$ sono applicazioni e sappiamo che $hk = \mathrm{id}_X$ ciò non ci basta per dedurre che k sia l'inversa di h. Otteniamo questa informazione se sappiamo anche che $kh = \mathrm{id}_Y$, come richiesto dalla definizione di applicazione inversa, oppure, come nella dimostrazione, se sappiamo che almeno una tra h e k è biettiva, potendo in questo caso fare uso di (**2**).

[♭] si ricorda che $t_{|X\smallsetminus S}$ indica la restrizione di t a $X \smallsetminus S$.

Sintetizzando, per costruire una retrazione $g\colon B \twoheadrightarrow A$ di un'applicazione iniettiva $f\colon A \rightarrowtail B$ basta fare in modo che ogni elemento di $\operatorname{im} f$ venga mandato da g nella sua unica controimmagine mediante f, mentre la scelta delle immagini mediante g degli elementi di $B \smallsetminus \operatorname{im} f$ è del tutto arbitraria. Può essere istruttivo ritornare alla dimostrazione di (**7**) ed osservare come quella dimostrazione sia una versione semplificata di quella svolta per (**9**). È poi importante capire bene il significato di (**11**). Questo enunciato mostra che le retrazioni dell'applicazione f sono tutte e sole le applicazioni g_α, e che queste sono a due a due distinte, nel senso che, se α e β sono applicazioni distinte da $B \smallsetminus \operatorname{im} f$ ad A, allora $g_\alpha \neq g_\beta$.

12. *Sia $f\colon A \rightarrowtail B$ un'applicazione iniettiva tra insiemi finiti. Se $|A| = a$ e $|B| = b$, il numero delle retrazioni di f è a^{b-a}.*

Dimostrazione. Abbiamo visto in (**11**) che l'insieme delle retrazioni di f è equipotente a $\operatorname{Map}(B \smallsetminus \operatorname{im} f, A)$. Poiché $|\operatorname{im} f| = |A| = a$ e quindi $|B \smallsetminus \operatorname{im} f| = b - a$, la cardinalità di $\operatorname{Map}(B \smallsetminus \operatorname{im} f, A)$ è a^{b-a}, il che prova l'asserto. □

Conseguenza di (**11**), e nel caso finito anche di (**12**), è:

13. *Sia A un insieme tale che $|A| > 1$. Un'applicazione $f\colon A \to B$ ha una ed una sola retrazione se e solo se è biettiva (in questo caso l'unica retrazione di f è f^{-1}).*

Dimostrazione. Se f ha una retrazione, allora f è iniettiva, come mostra (**7**). Se ciò accade, per (**11**), la retrazione è unica se e solo se $\operatorname{Map}(B \smallsetminus \operatorname{im} f, A)$ ha un solo elemento. Siccome A ha almeno due elementi, ciò accade se solo se $B \smallsetminus \operatorname{im} f = \varnothing$.[†] Dire che $B \smallsetminus \operatorname{im} f = \varnothing$ significa esattamente dire che f è suriettiva, dunque biettiva. Tenendo presenti anche (**3**) e (**8**), ciò prova l'asserto. □

Si può confrontare (**13**) con (**6**). Come nel caso di (**7**), il risultato per le applicazioni iniettive è perfettamente analogo a quello per le applicazioni suriettive solo se un'ipotesi aggiuntiva (in questo caso $|A| > 1$) garantisce che il dominio non sia 'troppo piccolo'. Abbiamo già discusso il caso delle applicazioni con dominio vuoto, vediamo cosa accade se il dominio A ha cardinalità 1 (cioè è un singleton). Se $|A| = 1$, qualunque sia l'insieme B, ogni applicazione f da A a B è iniettiva; affinché una tale applicazione esista deve essere $B \neq \varnothing$. Purché, appunto, $B \neq \varnothing$ si ha però $|\operatorname{Map}(B, A)| = 1$, quindi f ha una ed una sola retrazione, ma f non è suriettiva se $|B| > 1$. Ciò spiega perché è stato necessario inserire nell'enunciato l'ipotesi che A abbia più di un elemento.

Esempio 2. Elenchiamo tutte le retrazioni dell'applicazione iniettiva $f\colon A \rightarrowtail B$ definita da

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

dove $A = \{u, v, w\}$ ha cardinalità 3 e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si ha chiaramente $\operatorname{im} f = \{2, 3, 5\}$. La (**9**) e la (**11**) mostrano come costruire (tutte) le retrazioni di f. L'immagine di ciascuno dei tre elementi di $\operatorname{im} f$ mediante una qualsiasi retrazione g di f è determinata: si deve avere $2^g = u$, $3^g = w$ e $5^g = v$, cioè: ciascuno dei tre elementi di $\operatorname{im} f$ deve essere mandato da g nell'unico elemento del quale è immagine mediante f. In altri termini, questo fa sì che la restrizione di g a $\operatorname{im} f$ sia l'inversa della ridotta di f alla sua immagine, come richiesto da (**9**). Agli altri elementi di B, cioè 1 e 4, possiamo far corrispondere arbitrari elementi di A. Nella maniera più precisa indicata in (**11**), consideriamo le nove applicazioni da $B \smallsetminus \operatorname{im} f$ ad A:

$$\begin{cases} 1 \mapsto u \\ 4 \mapsto u \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto u \\ 4 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto u \\ 4 \mapsto w \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto v \\ 4 \mapsto u \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto v \\ 4 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto v \\ 4 \mapsto w \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto w \\ 4 \mapsto u \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto w \\ 4 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto w \\ 4 \mapsto w \end{cases}$$

da queste, come mostra la biezione θ di (**11**), si ottengono le nove retrazioni di f:

$$\begin{cases} 1 \mapsto u \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto u \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto u \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto v \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto u \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto w \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto v \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto u \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto v \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto v \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto v \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto w \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto w \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto u \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto w \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto v \\ 5 \mapsto v \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto w \\ 2 \mapsto u \\ 3 \mapsto w \\ 4 \mapsto w \\ 5 \mapsto v \end{cases}$$

Esercizi.

1. Si indichi come costruire un numero arbitariamente grande di retrazioni dell'immersione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ e di sezioni dell'applicazione $n \in \mathbb{Z} \mapsto |n| \in \mathbb{N}$.
2. Quante sono le retrazioni dell'applicazione $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \mapsto n^2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$?
3. Provare che se $f\colon A \twoheadrightarrow B$ e $g\colon B \twoheadrightarrow C$ sono applicazioni suriettive componibili e se $\bar{f}$ e $\bar{g}$ sono sezioni di f e g rispettivamente, allora $\bar{g}\bar{f}$ è una sezione di fg. Enunciare e provare l'analoga proposizione per le retrazioni.
4. L'inversa dell'inversa di un'applicazione invertibile è l'applicazione stessa.

[†] se $b \in B \smallsetminus \operatorname{im} f$ e u, v sono due elementi distinti di A, esistono almeno due applicazioni da $B \smallsetminus \operatorname{im} f$ ad A: una che manda b in u e tutti gli altri elementi di $B \smallsetminus \operatorname{im} f$ in v, l'altra che manda ogni elemento di $B \smallsetminus \operatorname{im} f$ in v.