Il Teorema di Omomorfismo per Insiemi

Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione dall'insieme A all'insieme B. Ad f possiamo associare una relazione di equivalenza nel dominio A di f, detta il *nucleo di equivalenza* di f (o, come nel testo di Facchini, equivalenza associata ad f) e che indicheremo con $\sim_f$. Essa è definita ponendo, per ogni x e y in A,

$$x \sim_f y \iff x^f = y^f.$$

Si veda Facchini (pagine 61 e seguenti) per tutti gli (importantissimi) dettagli.

L'insieme quoziente $A/{\sim_f}$ prende il nome di *coimmagine* di f e si indica abitualmente come $\operatorname{coim} f$. Quali sono i suoi elementi? Si può facilmente mostrare che $\operatorname{coim} f$ consiste precisamente delle antiimmagini dei singleton degli elementi di $\operatorname{im} f$ mediante f, cioè che:

$$\operatorname{coim} f = A/{\sim_f} = \big\{\{b\}^{\overleftarrow{f}} \mid b \in \operatorname{im} f\big\} \tag{1}$$

(ricordiamo che, per ogni $b \in B$, per definizione di antiimmagine si ha

$$\{b\}^{\overleftarrow{f}} = \big\{x \in A \mid x^f \in \{b\}\big\} = \{x \in A \mid x^f = b\};$$

questo insieme è diverso da $\varnothing$ se e solo se $b \in \operatorname{im} f$). Per provare la (1) osserviamo che, per ogni $a \in A$ la classe di equivalenza di a modulo $\sim_f$ è $\{x \in A \mid x^f = a^f\}$, l'insieme degli elementi di A che hanno, mediante f, la stessa immagine di a. Evidentemente questo insieme è $\{a^f\}^{\overleftarrow{f}}$. Pertanto $\operatorname{coim} f \subseteq \big\{\{b\}^{\overleftarrow{f}} \mid b \in \operatorname{im} f\big\}$. Viceversa, se $b \in \operatorname{im} f$ esiste $a \in A$ tale che $b = a^f$. Allora, per quanto appena visto, $\{b\}^{\overleftarrow{f}} = \{a^f\}^{\overleftarrow{f}} = [a]_{\sim_f} \in \operatorname{coim} f$. La (1) è così provata. Prima di proseguire con la discussione, vediamo un esempio (a colori).

Esempio 1. Supponiamo che A sia l'insieme dei numeri naturali minori di 10 e B sia un insieme di colori, poniamo $B = \{\text{rosso, verde, blu, marrone, giallo}\}$. Sia f un'applicazione da A a B; dunque f associa a ciascuno dei numeri in A uno dei colori in B. Supponiamo che f sia definita in questo modo: a 1, 5 e 7 è associato il colore rosso, a 0, 3, 6 e 8 il verde, a 2 e 9 il blu e a 4 il marrone:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Allora, rispetto a $\sim_f$, due elementi di A sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso colore, e $\operatorname{coim} f$ è costituita da quattro classi di equivalenza: quella degli elementi di colore rosso: $\{1, 5, 7\}$, che è l'antiimmagine di $\{\text{rosso}\}$ mediante f, quella degli elementi verdi: $\{0, 3, 6, 8\}$, quella degli elementi blu: $\{2, 9\}$ e quella degli elementi marroni: $\{4\}$; dunque

$$\operatorname{coim} f = \big\{\{1, 5, 7\}, \{0, 3, 6, 8\}, \{2, 9\}, \{4\}\big\}.$$

Si noti che, benché B abbia tra i suoi elementi il colore giallo, questo colore non determina nessun elemento di $\operatorname{coim} f$. Ciò è in accordo con la (1): $\operatorname{coim} f$ è l'insieme delle antiimmagini dei singleton degli elementi di $\operatorname{im} f$ (cioè rosso, verde, blu e marrone), mentre giallo è in B ma non in $\operatorname{im} f$.

Torniamo ora alla discussione generale. Per un'arbitraria applicazione f, rifacendoci a (1) ed alle osservazioni immediatamente successive, possiamo osservare che l'applicazione

$$\alpha\colon b \in \operatorname{im} f \longmapsto \{b\}^{\overleftarrow{f}} \in \operatorname{coim} f$$

è suriettiva. D'altra parte, è evidente che α è anche iniettiva: se $b, c \in \operatorname{im} f$ e $b \neq c$ allora certamente $b^\alpha = \{b\}^{\overleftarrow{f}} \neq \{c\}^{\overleftarrow{f}} = c^\alpha$, perché gli elementi di b^α vengono mandati da f in b mentre quelli di c^α vengono mandati in c. Dunque, α è biettiva, e possiamo considerare la sua inversa, che indichiamo con $\tilde{f}$. Questa è

$$\tilde{f}\colon [a]_{\sim_f} \in \operatorname{coim} f \longmapsto a^f \in \operatorname{im} f, \tag{2}$$

infatti, come abbiamo visto sopra, per ogni $a \in A$ la classe $[a]_{\sim_f}$ è proprio $\{a^f\}^{\overleftarrow{f}}$, che è l'immagine di a^f mediante α.

Anche se in senso stretto è inutile farlo, osserviamo che avremmo potuto definire direttamente $\tilde{f}$ tramite la (2) senza utilizzare α; in questo caso però sarebbe stato necessario verificare che $\tilde{f}$ è ben definita. Per far questo avremmo dovuto prima osservare che ogni elemento di $\operatorname{coim} f$ si può rappresentare nella forma $[a]_{\sim_f}$ per un opportuno $a \in A$. Questa rappresentazione non è unica, ma l'applicazione è comunque ben posta perché, per ogni $x, y \in A$,

$$[x]_{\sim_f} = [y]_{\sim_f} \iff x \sim_f y \iff x^f = y^f,$$

quindi, effettivamente, ogni elemento di $\operatorname{coim} f$ ha un solo corrispondente mediante $\tilde{f}$, anzi, questa catena di equivalenze, letta da destra verso sinistra, mostra anche l'iniettività di $\tilde{f}$ (la suriettività è ovvia).

Qualunque sia il modo preferito per definire di $\tilde{f}$, è importante comprendere bene questo: che scelto comunque $X \in \operatorname{coim} f$, tutti gli elementi di X hanno, mediante f la stessa immagine, vale a dire: $(\forall\, x, y \in X)(x^f = y^f)$, e $\tilde{f}$ è l'applicazione da $\operatorname{coim} f$ a $\operatorname{im} f$ che associa ad ogni tale X questa immagine comune.

Utilizziamo l'applicazione $\tilde{f}$ per costruire un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"'] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & & B \\ \operatorname{coim} f \arrow[rr, "\sim", "\tilde{f}"'] & & \operatorname{im} f \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

dove π è la proiezione canonica: $a \mapsto [a]_{\sim_f}$ e ι è l'immersione di $\operatorname{im} f$ in B. Che il diagramma (3) sia commutativo significa, naturalmente, che $\pi\tilde{f}\iota = f$ ed è piuttosto facile da provare. Infatti, per ogni $a \in A$, abbiamo

$$a^{\pi\tilde{f}\iota} = ([a]_{\sim_f})^{\tilde{f}\iota} = \big(([a]_{\sim_f})^{\tilde{f}}\big)^{\iota} = (a^f)^{\iota} = a^f.$$

Questo risultato, di grande importanza, è noto come Teorema fondamentale di omomorfismo per insiemi. Il suo contenuto è perfettamente reso dalla commutatività del diagramma (3). Lo possiamo comunque enunciare in questa forma:

Teorema. *Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione. Allora:*

(i) *l'applicazione $\tilde{f}\colon [a]_{\sim_f} \in \operatorname{coim} f \longmapsto a^f \in \operatorname{im} f$ è biettiva;*

(ii) *se π è la proiezione canonica da A a $\operatorname{coim} f$ e ι è l'immersione di $\operatorname{im} f$ in B, si ha $f = \pi\tilde{f}\iota$.*

Vediamo due importanti conseguenze del teorema. In primo luogo, poiché $\tilde{f}$ è biettiva si ha

$$|\operatorname{im} f| = |\operatorname{coim} f|.$$

In secondo luogo il teorema mostra che ogni applicazione f ha una fattorizzazione nel prodotto di una applicazione suriettiva (π), un'applicazione biettiva ($\tilde{f}$) ed una iniettiva (ι). Questa fattorizzazione $f = \pi\tilde{f}\iota$ è nota come *fattorizzazione canonica* di f.

Esempio 2. La signora Pacchetti è addetta allo smistamento delle lettere all'ufficio postale del paese di Rocca Insiemistica. Il suo lavoro consiste nel suddividere la corrispondenza in partenza secondo la città di destinazione. Nella giornata in cui si svolge questa storia sono state consegnate all'ufficio postale diverse lettere, alcune destinate a Roma, altre a Milano, altre ancora a Palermo, a Torino, a Verona, a Bari. Come procede la signora Pacchetti? Raccoglie tutte le lettere destinate a Roma in un apposita cassetta, quelle per Milano in un'altra cassetta e così via; su ciascuna cassetta appone un'etichetta con il nome della città di destinazione delle lettere lì contenute. Queste cassette saranno poi portate all'ufficio spedizioni, in modo che il loro contenuto sia inviato alle rispettive destinazioni.

Possiamo descrivere tutto ciò in termini del teorema di omomorfismo per insiemi; vediamo in che modo. Chiamiamo L l'insieme delle lettere che vengono spedite oggi da Rocca Insiemistica (passano tutte per l'ufficio postale), e chiamiamo D l'insieme di tutte le possibili destinazioni (possiamo dire che D sia l'insieme di tutte le città del mondo). Ogni lettera, cioè ogni elemento di L, ha una ed una sola destinazione, quindi abbiamo un'applicazione $d\colon L \to D$, quella che ad ogni lettera associa la sua città di destinazione. L'immagine $\operatorname{im} d$ dell'applicazione d è l'insieme delle destinazioni alle quali, nella nostra giornata, è stata effettivamente spedita almeno una lettera da Rocca Insiemistica, dunque $\operatorname{im} d = \{$Roma, Milano, Palermo, Torino, Verona, Bari$\}$. Due lettere sono in relazione rispetto al nucleo di equivalenza di d se e solo se hanno la stessa destinazione. Ad esempio, la classe di equivalenza di una lettera per Torino è l'insieme di tutte le lettere per Torino, cioè l'insieme di tutte le lettere che la signora Pacchetti ha infilato in una certa cassetta, quella a cui ha poi apposto l'etichetta "Torino". Quindi le cassette che la signora Pacchetti ha preparato rappresentano le classi di equivalenza; di conseguenza l'insieme di queste cassette rappresenta la coimmagine di d. È chiaro che ci ritroviamo con esattamente una cassetta per ciascuna città di destinazione (dunque, nel nostro esempio, la signora Pacchetti ha preparato sei cassette). In altri termini, a ciascuna di queste cassette corrisponde una città di destinazione (quella indicata dall'etichetta) e, viceversa, a ciascuna delle sei destinazioni in $\operatorname{im} d$ corrisponde una cassetta. Questa corrispondenza non è altro che l'applicazione biettiva $\tilde{d}\colon \operatorname{coim} d \to \operatorname{im} d$ data dal teorema: ad ogni elemento X di $\operatorname{coim} d$ (cioè ad ogni cassetta) associamo l'immagine mediante d (cioè la città di destinazione) di un qualsiasi elemento di X (cioè di una qualsiasi lettera che la signora Pacchetti ha infilato nella cassetta X). Possiamo, in un certo senso dire che la nostra signora Pacchetti ha applicato prima la proiezione canonica $\pi\colon x \in L \mapsto [x]_{\sim_d} \in \operatorname{coim} d$ quando ha messo ciascuna lettera nella sua cassetta, poi l'applicazione biettiva $\tilde{d}\colon [x]_{\sim_d} \in \operatorname{coim} d \mapsto x^d \in \operatorname{im} d$ quando ha apposto un etichetta con il nome della città di destinazione a ciascuna delle cassette. Cosa significa, nel nostro esempio, il fatto che il diagramma (3) sia commutativo, cioè che $\pi\tilde{d}\iota = d$ dove ι è l'immersione di $\operatorname{im} d$ in D? Semplicemente che (per fortuna!) la procedura seguita nell'ufficio postale di Rocca Insiemistica fa sì che ogni lettera arrivi effettivamente alla città alla quale era destinata. Infatti questa procedura avrà per risultato la spedizione di ogni lettera x alla città $x^{\pi\tilde{d}\iota}$, che, per il teorema, coincide con x^d, la destinazione indicata dal mittente. Ad esempio, una lettera x per Palermo viene prima messa nella cassetta di tutte le lettere per Palermo (l'insieme di queste lettere è x^π), a questa cassetta viene messa un'etichetta con su scritto "Palermo", e tutto il contenuto della cassetta viene spedito a Palermo (quindi $(x^\pi)^{\tilde{d}} =$ Palermo). Dunque $x^{\pi\tilde{d}\iota} =$ Palermo, sicché x viene spedita a Palermo. Tutto è andato a buon fine, perché Palermo ($= x^d$) era proprio la destinazione della lettera.