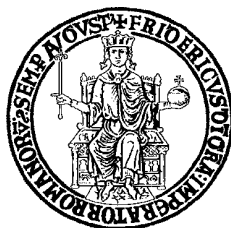


Piano delle Ricerche 2006 ¹

Università degli Studi di Napoli
Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
“Renato Caccioppoli”



¹Approvato nella seduta del Consiglio di Dipartimento del 13 ottobre 2005

Indice

Capitolo 1. Attività e Strutture del Dipartimento	1
§1. Sedi e personale del Dipartimento	1
§2. Attività didattica	1
§3. Attività scientifica e pubblicazioni	2
§4. Strutture del Dipartimento	3
Capitolo 2. Attività di ricerca	5
§1. Considerazioni generali	5
§2. Algebra	5
§3. Analisi Matematica	7
§4. Didattica della Matematica, Fondamenti e Logica	16
§5. Fisica Matematica	19
§6. Geometria	24
§7. Matematica Computazionale	26
§8. Probabilità e Statistica Matematica	29
§9. Ricerca Operativa	31
§10. Informatica	31

Attività e Strutture del Dipartimento

1. Sedi e personale del Dipartimento

I locali del Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli” sono situati in quattro sedi diverse:

- Complesso Universitario di Monte S. Angelo,
- Via Mezzocannone n. 8, III piano,
- Via Claudio n. 21, edificio del “Biennio di Ingegneria”,
- Piazzale Tecchio, X piano della Facoltà di Ingegneria.

Al Dipartimento afferiscono:

- 38 Professori ordinari o straordinari,
- 53 Professori associati,
- 49 Ricercatori,
- 5 Assistenti ordinari,
- 25 unità di personale tecnico-amministrativo.

Il Dipartimento è organizzato in due sezioni denominate “Sezione di Scienze” e “Sezione di Ingegneria”.

2. Attività didattica

L’attività didattica del Dipartimento è connessa con gli insegnamenti di tutte le discipline matematiche inserite nei piani di studio di tutti i corsi di Laurea e Diploma della Facoltà di Scienze MM.FF.NN., della Facoltà

di Ingegneria, della Facoltà di Biotecnologie, della Facoltà di Farmacia e della Facoltà di Agraria. Al Dipartimento afferiscono anche alcuni docenti dell'area INF/01 (Informatica).

In complesso, sono circa 100 i Corsi di lezioni svolti dai docenti dell'intero Dipartimento. Inoltre il Dipartimento è sede del Dottorato di Ricerca in *Scienze Matematiche* e del Dottorato di Ricerca in *Scienze Computazionali ed Informatiche* (cofinanziati dall'U.E.), consorziati con altre Università e frequentati complessivamente da circa 70 dottorandi.

Il Dipartimento è anche sede del Corso di Perfezionamento in *Didattica della Matematica*, del Corso di Perfezionamento in *Metodi e Modelli Matematici Applicati ai Problemi dell'Ambiente*, del Corso di Perfezionamento in *Un Approccio scientifico all'educazione musicale*, e del Corso di Aggiornamento in *Un approccio moderno all'educazione musicale*

Il Dipartimento è anche coinvolto nelle attività della Scuola Interuniversitaria Campana di Specializzazione per l'Insegnamento (SICSI), sia in quanto molti suoi docenti sono impegnati nelle relative attività didattiche, sia perché mettere a disposizione della Scuola laboratori e attrezzature didattiche e scientifiche.

3. Attività scientifica e pubblicazioni

Il Dipartimento promuove e coordina le attività di ricerca in numerosi settori delle Scienze Matematiche e delle discipline ad essa affini. Nel suo ambito si svolge una intensa e costante attività seminariale e si organizzano cicli di conferenze, scuole di avviamento alla ricerca e convegni scientifici a livello nazionale e internazionale.

Il Dipartimento è sede amministrativa di vari progetti COFIN e CNR, nonché di convenzioni con società scientifiche nazionali ed estere. Esso ha varie e costanti relazioni, nonché avviati programmi di studi, con Università e strutture di ricerca nazionali ed estere.

Il Dipartimento pubblica la *Rivista Ricerche di Matematica*, fondata nel 1952, che raccoglie contributi scientifici di alto livello della comunità matematica internazionale e viene scambiata con circa 150 riviste di analoga natura. Il Comitato di Redazione è composto da un Consiglio di Redazione formato da 15 professori del Dipartimento, da un Comitato Consultivo formato da 15 professori esterni e da un Consiglio Scientifico di cui fanno parte professori del Dipartimento non facenti parte del C.d.R.

Al fine di dare immediata diffusione dei risultati conseguiti nel suo ambito, il Dipartimento pubblica anche una serie di preprint che vengono scambiati con quelle di numerose istituzioni scientifiche.

4. Strutture del Dipartimento

Le principali strutture sono:

4.1. Biblioteca “Carlo Miranda”. La biblioteca possiede un patrimonio librario di circa 70.000 volumi (di cui ca. 30.000 monografie e oltre 700 raccolte di periodici, di cui 405 correnti, che derivano da abbonamenti, scambi nazionali ed internazionali e donazioni).

La biblioteca dispone di 123 posti a sedere distribuiti in tre sale ed ha un carico di utenza studentesca e accademica giornaliera di circa 300 presenze. Offre servizi di fotocopiatura a studenti e ricercatori, nonché servizi di document delivery.

Negli ultimi anni è stato anche esteso e curato in modo particolare il servizio di ricerca e visualizzazione online sia dei cataloghi che delle riviste accessibili elettronicamente. Tali informazioni sono consultabili dalla sezione relativa alla biblioteca del sito web del dipartimento (all'indirizzo <http://www.dma.unina.it>)

Della biblioteca fa parte una sezione storica. Essa è costituita da una raccolta di circa 20.000 opuscoli, da una raccolta di libri rari costituita da circa 250 opere in 350 volumi, da una raccolta di circa 2.000 volumi antichi, da una raccolta di circa 120 modelli e strumenti matematici, e da alcuni fondi manoscritti contenenti soprattutto materiale epistolare.

È stata istituita presso il Dipartimento una Commissione (coordinata dal Prof. G. Lunardon) che si occupa dei problemi relativi alla Biblioteca.

4.2. Centro di Calcolo. Il Centro di Calcolo, coordinato dal Prof. G. Laccetti, si occupa di gestire i sistemi informatici di uso comune, i laboratori didattici e di assicurare il collegamento in rete delle macchine presenti nel dipartimento.

Il sito web del Dipartimento è gestito dal Dott. G. Cutolo.

4.3. Centro stampa. Il Centro stampa provvede alla stampa del materiale scientifico e di quello connesso con le attività istituzionali prodotto dagli afferenti al Dipartimento utilizzando macchine digitali fotostampatrici.

4.4. Collezioni museali. È anche presente nella sede di Via Mezzocannone 8 un Museo dove è custodita un'ampia collezione storica di modelli e strumenti matematici, composta da circa 120 pezzi di vario materiale, oltre a tomi e testi di alto valore storico e scientifico.

Attività di ricerca

1. Considerazioni generali

Molte delle ricerche che saranno sviluppate nel 2006 costituiscono per lo più il completamento di quelle in corso. Esse riguardano principalmente i settori scientifico-disciplinari dell'Algebra, dell'Analisi Matematica, della Didattica della Matematica, della Storia della Matematica, della Fisica Matematica, della Geometria, della Matematica Computazionale, della Probabilità, della Statistica Matematica.

In ciò che segue viene presentata per linee essenziali una descrizione complessiva delle ricerche che si intendono sviluppare. Il Dipartimento utilizzerà anche i fondi che il MURST, il CNR e altri Enti assegneranno ai progetti presentati.

2. Algebra

2.1. Teoria dei Gruppi. Un classico ed importante risultato di B.H. Neumann assicura che in un gruppo G tutte le classi di coniugio di sottogruppi sono finite se e soltanto se il centro del gruppo ha il centro di indice finito, e questo risultato è stato poi esteso da Eremin ai gruppi in cui ogni sottogruppo abeliano ha un numero finito di coniugati. D'altra parte, Romalis e Sesekin hanno descritto il comportamento dei gruppi in cui ogni sottogruppo non abeliano è normale. Al fine di generalizzare sia il teorema di Neumann che i risultati di Romalis e Sesekin, si studieranno i gruppi in cui ogni sottogruppo non abeliano ha un numero finito di coniugati. Si analizzerà inoltre il comportamento dei gruppi in cui ogni sottogruppo non abeliano ha indice finito nella sua chiusura normale.

Si intende inoltre approfondire lo studio dei gruppi in cui ogni sottogruppo è pronormale in un sottogruppo di indice finito, sperando di poter fornire estensioni del teorema di Neumann anche in questa direzione.

Inoltre si proseguirà lo studio di classi di gruppi finiti, con particolare riguardo a formazioni, classi di Fitting e classi di Schunck.

Sempre nell'ambito della teoria dei gruppi, si prevede di proseguire ricerche su sottogruppi subnormali, gruppi nilpotenti generalizzati e automorfismi di gruppi.

2.2. Gruppi di Butler. La ricerca affonda le radici nella teoria dei gruppi abeliani; l'argomento di cui si occupa il gruppo si situa però in un crocevia con altre strutture, lineari, ordinate e combinatoriche. Lo studio dei gruppi abeliani senza torsione di rango finito si concentra, a partire dal 1965, sui gruppi di Butler, una vasta e tuttora ampiamente inesplorata estensione della classe delle somme dirette di gruppi senza torsione di rango 1 (classificati da R. Baer nel 1935). I gruppi di Butler si ripartiscono in classi $B(i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), dove $B(i)$ è la classe dei gruppi senza torsione puramente generati da n elementi soggetti ad i relazioni di dipendenza. Un tale insieme di generatori, che nel caso $i = 0$ è indipendente, si dice "base i -volte-ridondante". $B(0)$ è la classe dei gruppi completamente decomponibili di rango finito, una delle poche classi di gruppi abeliani senza torsione ad essere classificata con invarianti cardinali; il suo studio, iniziato da Baer, fa parte della teoria classica dei gruppi abeliani; i gruppi di Butler ne sono i quozienti senza torsione. I risultati sui gruppi di Butler ottenuti fino al 1991 sono riassunti in: D.M. Arnold and C. Vinsonhaler, Finite rank Butler groups: A survey of recent results, Abelian Groups, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 146 (Marcel Dekker, 1991), 17-41, con una bibliografia di più di 50 tra lavori e volumi. È del 1983 l'inizio dello studio dei gruppi di Butler di rango infinito, che ha dato adito a un ricco filone di ricerca, spesso intersecato con la teoria dei modelli e la teoria degli insiemi. Dal 1991, grazie ad una serie di lavori di Arnold, Vinsonhaler, Fuchs e Metelli, la ricerca si specializza alla sottoclasse dei $B(1)$ -gruppi, i cui ultimi sviluppi mostrano un forte trend verso la computabilità, alquanto insolito per i gruppi abeliani senza torsione. L'ampia produzione posteriore al 1991 mostra la continuità e la vivacità dell'interesse nel campo dei gruppi di Butler, e le loro connessioni con i più vari campi: le rappresentazioni; altre classi di gruppi Abeliani (i Murley groups, gli almost separable); i gruppi topologici; le categorie; la costruibilità; i moduli su anelli di valutazione. Per la nostra ricerca, osserviamo che, nello studio delle strutture matematiche vi sono situazioni in cui una "base ridondante", cioè un insieme di generatori con una relazione di dipendenza, è più naturale di quanto sarebbe una base (indipendente). Nella ricerca sui $B(1)$ -gruppi di Butler si è messo in luce

uno strumento lineare-combinatorio (una $(0, 1)$ -tabella detta “tenda”) con funzionamento e trasformazioni del tutto originali, che può essere usato in molti ambiti (gruppi abeliani, spazi vettoriali di dimensione finita, rappresentazioni) in cui sia rilevante l’esistenza di una base ridondante. L’obiettivo del programma di ricerca è lo studio, l’applicazione e la generalizzazione di tale strumento (individuato e sperimentato in vari lavori pubblicati o in via di pubblicazione), che consente soluzioni algoritmiche a problemi algebrici sia in strutture finite che infinite. Ci si propone di individuare una generalizzazione delle tende al caso di basi bi-ridondanti (insiemi di generatori con due relazioni di dipendenza), iniziando con lo studio dei $B(2)$ -gruppi (del tutto assenti nella letteratura). Anche nell’ambito (già molto complesso) di $B(2)$ -gruppi “degeneri”, vi sono solo alcuni studi nel caso particolare in cui tale somma sia essa stessa un $B(1)$ -gruppo. Dopo aver caratterizzato il typeset di un $B(2)$ -gruppo degenero a partire dalle partizioni associate ai suoi elementi (ciò che non è possibile fare per i $B(2)$ -gruppi non degeneri, si intende ricercare un algoritmo che consenta di identificare questi ultimi, problema rimasto aperto dopo che è stato individuato un errore nell’unica caratterizzazione conosciuta.

3. *Analisi Matematica*

3.1. *Regolarità per soluzioni di equazioni differenziali.*

3.1.1. *Quasiminimi in una dimensione – integrabilità ottimale della derivata. Mappe inverse.* Si considerano i K -quasiminimi per l’integrale di Dirichlet unidimensionale

$$u \mapsto \int |u'|^p dx$$

e si vuol determinare il migliore esponente di sommabilità per $|u'|$ in funzione di $K \geq 1$ e di $p > 1$.

Il caso $p = 2$ si può trattare con risultati ottimali di maggiore integrabilità per un peso che verifichi la disegualianza di Holder al contrario in L^2 . Si considera anche il problema di determinare, sempre in funzione di p e K , il migliore esponente di sommabilità per la derivata della funzione inversa di un quasiminimo.

Analogo problema in due dimensioni per classi particolari di quasiminimi vettoriali.

Si vogliono anche studiare le connessioni tra quasiminimi, superquasiminimi e soluzioni di problemi di ostacolo.

3.1.2. *Equazioni con dati L^p sul bordo.* Si vuol riprendere lo studio delle equazioni ellittiche omogenee con dati irregolari sulla frontiera, condotto pochi anni fa da R. Fefferman e C. Kenig. A partire dai loro risultati che

fanno uso della teoria dell'estensione di mappe quasiconformi a domini con una dimensione in più, si ritiene interessante determinare il miglior esponente p per cui il problema di Dirichlet sia risolubile con dati L^p sia per il caso variazionale che per quello non variazionale, sempre limitatamente al caso bidimensionale. Si pensa di utilizzare un risultato di maggior sommabilità ottimale per funzioni verificanti disuguaglianze di Holder al contrario dovuto a D'Apuzzo-Sbordone e A. Korenovsy in una dimensione spaziale.

3.1.3. *Regolarità per equazioni subellittiche completamente nonlineari.* Nello studio di equazioni ellittiche degeneri, un approccio alternativo è di guardarle come uniformemente ellittiche rispetto ad una nuova classe di operatori. Questo approccio ha determinato lo studio di nuove strutture geometriche come i gruppi di Carnot-Carathéodory.

Il punto di partenza per la teoria della regolarità per equazioni subellittiche completamente nonlineari è, nel caso euclideo, la disuguaglianza di Alexandrov-Bakelmann-Pucci, che si basa sulla definizione di convessità. È allora naturale, per trattare lo stesso argomento in gruppi di Carnot, cercare una definizione di convessità, compatibile con la struttura geometrica. Le funzioni convesse in senso viscoso (v -convesse) sono definite richiedendo che le derivate orizzontali seconde simmetrizzate sono nonnegative in senso viscoso. Utilizzando la teoria delle soluzioni di viscosità, in particolare il teorema di unicità delle soluzioni del laplaciano infinito nel gruppo di Heisenberg, (Bieske) e per campi di Hormander (Wang), si dimostra la locale Lipschitz continuità delle funzioni v -convesse. Un'altra definizione è quella di convessità orizzontale, considerata anche da Caffarelli-Cabré e Garofalo. Le due definizioni sono equivalenti se le funzioni sono di classe C^2 , derivando una formula di Taylor subellittica col resto in forma integrale. Usando un recente risultato di Bonfiglioli e Lanconelli sulle funzioni subarmoniche in gruppi di Carnot, abbiamo dimostrato l'equivalenza per funzioni semicontinue superiormente. Nuovi risultati sui lagrangiani nulli in gruppi di Heisenberg, (Gutierrez-Montanari e Garofalo-Tournier) e risultati sulle funzioni a variazioni limitata in gruppi di Carnot (Ambrosio-Magnani) consentono di dimostrare il Teorema di Alexandrov di differenziabilità quasi ovunque del secondo ordine nel gruppo di Heisenberg. Si intendono studiare lagrangiani nulli in gruppi di Carnot e sviluppare la teoria dell'elasticità nonlineare nel nuovo contesto geometrico. Il programma di ricerca prevede la collaborazione di J.Manfredi(University of Pittsburgh), A.Montanari (Bologna), V.Magnani (Pisa). Un'altro tema riguardo lo studio di problemi di controllo nella geometria subellittica.

Consideriamo nello spazio euclideo \mathbb{R}^N la seguente equazione di Hamilton-Jacobi:

$$u + H(\sigma(x)\nabla u) = 0$$

dove $\sigma(x)$ è una matrice $m \times N$ e $H(x, q) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}$ è coerciva in q . Le righe della matrice $\sigma(x)$ sono considerate come coefficienti di campi vettoriali che soddisfano la condizione di Hörmander e che generano un gruppo di Carnot, quindi $\sigma(x)\nabla u$ sarà il gradiente orizzontale in un gruppo di Carnot e denotato con $D_h u$. Consideriamo problemi di omogenizzazione per equazioni di Hamilton-Jacobi del tipo:

$$u_\varepsilon + H\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, D_h u_\varepsilon\right) = 0$$

In un gruppo di Carnot G , dove l'Hamiltoniana H è G -periodica nella seconda variabile e $\frac{x}{\varepsilon}$ verrà interpretato nella geometria del gruppo. Dopo aver definito la nozione di soluzione viscosa in ambito subellittico, si dimostra un teorema di confronto. Si dimostra la convergenza uniforme delle soluzioni u_ε alla soluzione della Hamiltoniana effettiva

$$u(x) + \mathcal{H}(x, D_h u) = 0$$

L'Hamiltoniana \mathcal{H} è ottenuta risolvendo un problema di cella:

$$\mathcal{H}(x, \eta, p + D_h v(\eta)) = \lambda$$

Per ogni (x, p) fissati and ponendo $\mathcal{H}(x, p) = \lambda$.

3.1.4. *Classi chiuse di operatori ellittici nel piano rispetto alla G -convergenza.*

La teoria delle trasformazioni quasiconformi sul piano complesso si è sviluppata in forte interazione con quella delle equazioni ellittiche in forma divergenza. È opportuno perciò vedere se le connessioni stabilite tra mappe ed equazioni specialmente tramite il teorema di Morrey, oggi noto come “Riemann measurable mapping Theorem” possono essere utilizzate per teoremi di compattezza e chiusura rispetto alla G -convergenza.

In un precedente lavoro si è visto che, limitatamente al caso che il determinante della matrice dei coefficienti sia q. o. uguale a 1, il teorema di compattezza di Spagnolo può essere ridotto, via argomenti di famiglie normali, al teorema di compattezza di Montel.

Analogamente ci si propone di utilizzare tali connessioni per caratterizzare classi G -chiuse.

3.2. Problemi a discontinuità libera. Negli ultimi 15 anni col termine *Problemi a discontinuità libera* è stata indicata una classe di problemi di minimo caratterizzati dalla presenza sia di energie di volume, concentrate su insiemi n -dimensionali, sia di energie di superficie, concentrate su insiemi $(n-1)$ -dimensionali. Un'altra caratteristica di questi problemi è quella che i supporti delle energie di superficie non sono noti a priori, anzi rappresentano per certi aspetti l'incognita rilevante del problema.

In questa classe di problemi rientrano ad esempio il problema di determinare un insieme di perimetro finito con curvatura assegnata (problema di

Wulff) e vari problemi variazionali collegati alla teoria dei cristalli liquidi e alla meccanica delle fratture. Ma il problema di questa classe senz'altro piú noto è quello della minimizzazione del funzionale di Mumford–Shah. Tale problema consiste nel determinare il minimo del funzionale

$$J(K, u) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \beta \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \Omega)$$

fra tutte le coppie (K, u) , dove K è un compatto di \mathbb{R}^n e u è una funzione di classe C^1 in $\Omega \setminus K$. In tale problema l'aperto Ω del piano è assegnato, g è un'assegnata funzione definita in Ω e α, β sono due costanti positive. Nel minimizzare J si cerca in sostanza un'approssimazione regolare a tratti della funzione g con la proprietà che le varie porzioni di Ω in cui tale approssimazione è definita siano separate da un insieme K di misura $(n-1)$ -dimensionale finita e non troppo grande rispetto all'integrale del gradiente di u e alla distanza al quadrato di u dal dato g .

Lo studio del funzionale J nel caso $n = 2$ è stato proposto da D.Mumford e J.Shah quale modello variazionale per il problema della segmentazione delle immagini in “computer vision”. In tale contesto Ω è un rettangolo del piano, $g: \Omega \rightarrow [0, 1]$ rappresenta i livelli di grigio di un'immagine in bianco e nero, α, β sono parametri rispettivamente di scala e di contrasto. Con tale modello si cerca di ottenere un'approssimazione u dell'immagine data che nello stesso tempo sia piú liscia e priva di effetti di tipo ‘rumore’ e un insieme di ‘contorni’ K che venga fuori dalle zone di maggiore discontinuità di g .

Un altro modello variazionale molto utilizzato nello studio della segmentazione delle immagini è il modello di Blake–Zisserman, il cui funzionale

$$B(K_1, K_2, u) = \int_{\Omega \setminus (K_1 \cup K_2)} [|\nabla^2 u|^2 + \alpha(u - g)^2] dx + \beta \mathcal{H}^{n-1}(K_1 \cap \Omega) + \gamma \mathcal{H}^{n-1}((K_2 \setminus K_1) \cap \Omega),$$

facendo intervenire le derivate seconde di u , tiene conto sia della lunghezza dell'insieme dei contorni, sia della lunghezza dei tratti in cui questi contorni presentano delle ‘pieghe’.

A tale riguardo si intendono studiare le seguenti questioni:

- (1) determinazione della dimensione di Hausdorff dell'insieme di singolarità di K ,
- (2) descrizione e classificazione (almeno in dimensione due) delle singolarità di K ,
- (3) esistenza (in dimensione maggiore di due) di minimi per il funzionale di Blake e Zisserman,

- (4) sviluppo di modelli di approssimazione discreta per il funzionale di Blake e Zisserman.

Su parte di questo programma si collaborerà con L.Ambrosio (Scuola Normale di Pisa), J.Hutchinson (Australian National University di Canberra), D.Pallara (Università di Lecce), F.Tomarelli (Politecnico di Milano) e (relativamente al solo punto (4)) con U.Amato e R.March (Istituto per le Applicazioni del Calcolo del CNR).

3.3. Disuguaglianze di tipo Polya–Szegö. Il cosiddetto principio di Polya–Szegö stabilisce che se E è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e E^* è un insieme ottenuto da E mediante un’opportuna simmetrizzazione, allora $P(E^*) \leq P(E)$, dove con $P(E)$ si intende il perimetro nel senso di De Giorgi. Analogamente se $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ è una funzione di classe $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, e u^* è un’opportuna simmetrizzazione di u , vale la relazione

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx$$

La (1) si estende più in generale ad opportuni funzionali convessi del gradiente e ai funzionali a crescita lineare definiti su $BV(\mathbb{R}^n)$.

Negli ultimi anni Nicola Fusco ha studiato le proprietà degli insiemi e delle funzioni (di Sobolev e BV) per cui la disuguaglianza di Polya–Szegö si riduce ad un’uguaglianza, sia nel caso della simmetrizzazione sferica che in quello della simmetrizzazione di Steiner rispetto ad un iperpiano ($n - 1$)-dimensionale di \mathbb{R}^n (simmetrizzazione di Steiner in codimensione 1).

In futuro si vogliono studiare studiare:

- (i) Le proprietà degli insiemi di perimetro finito e delle funzioni estremali (rispetto alla disuguaglianza di Polya–Szegö) per altri tipi di simmetrizzazione, quali ad esempio la simmetrizzazione di Steiner di codimensione maggiore di 1 e la simmetrizzazione convessa;
- (ii) le proprietà qualitative dei minimi di funzionali dipendenti da funzioni di Sobolev e BV o definiti su insiemi di perimetro finito per i quali si possano stabilire a priori opportune simmetrie;
- (iii) l’estensione del principio di Polya–Szegö e le proprietà dei relativi insiemi e funzioni estremali nell’ambito di particolari strutture metriche, quali ad esempio gli spazi di Carnot–Carathéodory e i gruppi di Heisenberg.

Tale programma di ricerca verrà portato avanti in collaborazione con M. Chlebik del Max–Planck Institut di Lipsia e di A. Cianchi dell’Università di Firenze.

3.4. Equazioni alle Derivate Parziali: metodi di simmetrizzazione. In questi ultimi anni l'approccio, mediante metodi di simmetrizzazione, allo studio qualitativo di soluzioni di problemi al bordo relativi ad operatori differenziali si è rilevato estremamente utile. Con il termine "metodi di simmetrizzazione" si intende quel complesso di tecniche dimostrative (ri-conducibili essenzialmente all'uso di disequaglianze isoperimetriche e delle proprietà dei riordinamenti) mediante le quali si riesce a confrontare, in un senso opportuno, la soluzione di un problema al bordo relativo, per esempio ad una equazione ellittica del secondo ordine con parte principale in forma di divergenza, con quella di un opportuno problema i cui dati, dominio, coefficienti e termine noto, si presentano a simmetria radiale. I primi risultati in tale ambito (cfr H. Weinberger (1962), G. Talenti (1976), C. Bandle (1977)) si riferiscono sostanzialmente all'equazione di Poisson o a quella del calore: la soluzione, o meglio il suo riordinamento, si migliora, nel caso ellittico, con la soluzione dell'equazione di Poisson, in una sfera con la stessa misura del dominio originario, il cui termine noto è il riordinamento sferico del termine noto dell'equazione di partenza. Tale risultato di confronto viene tra l'altro utilizzato per ottenere stime numeriche ottimali per le soluzioni dei problemi studiati. Su tali tematiche hanno lavorato e tuttora lavorano alcuni ricercatori del Dipartimento. Le tematiche affrontate e gli obiettivi che si intendono raggiungere possono essere raggruppati in forma sintetica nel modo seguente:

- (1) Ottenere risultati di confronto per soluzioni di problemi relativi a vari tipi di operatori: operatori la cui parte principale presenti varie forme di degenerazione, operatori che nella loro struttura presentino termini di ordine inferiore, ecc.
- (2) Dare un quadro esauriente dei risultati che è possibile ottenere con tali metodi nel caso in cui il termine noto non è una funzione ma una misura o, piú in generale, una distribuzione.
- (3) Riproporre le tematiche sopra descritte nel caso delle disequazioni variazionali e nel caso di equazioni di evoluzione.
- (4) Approfondire alcune questioni riguardanti il caso di operatori non lineari e applicare i risultati ottenuti per dedurre teoremi di esistenza e regolarità delle soluzioni.
- (5) Studiare la classe di equazioni totalmente non lineari tipo l'equazione di Monge-Ampere o, piú in generale, le equazioni la cui parte principale è un operatore differenziale definito a partire dai minori principali della matrice hessiana della funzione incognita.
- (6) Verificare fino a che punto i risultati di confronto ottenuti in relazione alla classica simmetrizzazione sferica possono essere estesi

quando si prendono in considerazione altri tipi di simmetrizzazione quali ad esempio quella di Steiner.

3.5. Equazioni Differenziali Nonlineari.

3.5.1. *Teoria dei punti critici e sistemi dinamici.* Un primo argomento di ricerca è lo studio dell'esistenza di soluzioni omocline e di comportamento caotico per sistemi Hamiltoniani mediante il "Calcolo delle Variazioni in grande". I primi lavori sull'argomento con tecniche variazionali sono dovuti a Bolotin (1983) e Coti Zelati-Ekeland-Séré (1990). Successivamente in Séré (1992) vengono introdotte alcune nuove tecniche che permettono di dimostrare l'esistenza di infinite soluzioni omocline per un'ampia classe di sistemi Hamiltoniani. Utilizzando tali tecniche variazionali è possibile dimostrare il comportamento caotico (cioè semi-coniugazione con il Bernoulli shift e positività dell'entropia topologica) di un sistema Hamiltoniano. L'utilizzo di tali metodi ha permesso di dimostrare l'esistenza di infinite omocline e, sotto un'opportuna condizione di nondegenerazione, il comportamento caotico per un'ampia classe di sistemi dipendenti dal tempo in modo quasi o almost-periodico e non necessariamente "vicini" a sistemi completamente integrabili.

Una direzione in cui si è sviluppata recentemente la ricerca è quella relativa alla determinazione di orbite omocline e/o eterocline a orbite periodiche. Allo studio di tale problema, attaccato con tecniche variazionali da Bolotin e Rabinowitz (si vedano anche i lavori di Bosetto-Serra), ha dato recentemente un interessante contributo Patrick Bernard, che è stata in parte da noi generalizzata, in particolare provando l'esistenza di soluzioni di tipo *multibump*.

Intendiamo proseguire tale studio in varie direzioni:

- cercando di dimostrare l'esistenza di soluzioni omocline di assegnata energia;
- cercando di generalizzare i risultati al caso in cui la varietà centrale abbia dimensione superiore a due;
- cercando di dimostrare l'esistenza per tali sistemi di comportamento caotico.

Con tecniche variazionali simili si vogliono anche studiare problemi di onde viaggianti.

Un altro filone di ricerca che intendiamo perseguire è quello relativo all'esistenza di soluzioni per il problema dei 3-corpi che siano asintotiche a collisioni per $t \rightarrow \pm\infty$.

3.5.2. *Problemi ellittici motivati da modelli di Chern-Simons.* Lo studio delle soluzioni statiche per alcune teorie di gauge di Chern-Simons autoduali

richiede l'analisi di alcune equazioni ellittiche con nonlinearità di tipo esponenziale, definite su varietà bidimensionali e contenenti un dato di tipo misura. Intendiamo studiare il comportamento di tipo blow-up di tali equazioni, sulla linea di alcuni recenti risultati di Tarantello.

3.5.3. *Disuguaglianze di Sobolev ottimali su varietà Riemanniane.* Le disuguaglianze di Sobolev ottimali sono di interesse in geometria ed in fisica, v. Aubin (1982). Recentemente, nel lavoro Ricciardi-YanYan Li, si sono trovate alcune disuguaglianze che includono un termine di curvatura scalare. Si intende proseguire lo studio di tali disuguaglianze, in particolare determinando le estensioni al caso di dimensioni basse e di varietà con bordo. I metodi comprenderanno l'analisi di blow-up di soluzioni di corrispondenti problemi ellittici ad esponente critico. La ricerca sarà condotta in collaborazione con YanYan Li (Rutgers).

3.6. Calcolo delle Variazioni. Uno dei filoni di ricerca nel campo del Calcolo delle Variazioni sviluppato nel Dipartimento concerne lo studio di funzionali variazionali non limitati, cioè a valori reali estesi e possibilmente non finiti su ampie classi di funzioni regolari. In tale ambito possono essere studiate varie classi di energie relative a problemi provenienti, ad esempio, dalle teorie della torsione elastoplastica, dell'elettrostatica, e dalla modellizzazione di elastomeri non lineari, nei quali le configurazioni ammissibili sono soggette a vincoli di tipo puntuale sul gradiente. Per detti funzionali energia sono stati provati, e sono in corso di elaborazione da parte dei componenti del Dipartimento, risultati di rappresentazione integrale, rilassamento ed omogeneizzazione.

In tale trattazione sono stati messi in evidenza diversi nuovi problemi e fenomeni allo studio dei quali è stata indirizzata l'attuale attività di ricerca, in vista di applicazioni a varie questioni di rilassamento e Gamma-convergenza di funzionali illimitati interessanti per le applicazioni. Tra queste si segnalano in particolare problemi di rilassamento di energie integrali definite su configurazioni soggette a vincoli puntuali sul gradiente, sia nel caso in cui le condizioni di vincolo dipendano esplicitamente ed in maniera non necessariamente regolare dalla variabile spaziale, sia in quello in cui detta dipendenza sia supposta continua. I risultati ottenuti lasciano aperti alcuni problemi verso i quali si intende indirizzare la ricerca. In particolare si intende completare lo studio del rilassamento di funzionali integrali in presenza di vincoli puntuali sui gradienti delle funzioni ammissibili, quando detti vincoli siano variabili con la variabile spaziale in maniera misurabile, estendendo i risultati già ottenuti a tutto lo spazio di coercitività. Per la trattazione di tale problema sembra necessario sviluppare opportune tecniche mensurali, che sembrano avere un interesse autonomo.

Un altro tema di ricerca nel quale sono attivi membri del Dipartimento e che è ancora in fase di sviluppo concerne problemi di omogeneizzazione, anche per strutture sottili, e possibilmente coinvolgenti riduzione di dimensione. In particolare, si segnalano problemi di omogeneizzazione affrontati attraverso tecniche di “periodic unfolding” recentemente sviluppate dalla scuola francese. Su tali argomenti sono state sviluppate varie collaborazioni con ricercatori stranieri, ottenendo diversi risultati. Partendo da tali basi si prevede di proseguire e completare tali studi attraverso le collaborazioni già in atto.

Infine, sono in corso studi sul controllo ottimo e sulla controllabilità in problemi di omogeneizzazione per domini perforati.

3.6.1. *Ottimizzazione e Teoria dei Giochi.* I problemi di equilibrio, sia in ambito scalare che vettoriale, sono stati oggetto, negli ultimi anni, di crescente interesse da parte di molti autori, poiché modellizzano problemi economici e ingegneristici. Di tali problemi, ci si propone di completare lo studio della buona posizione nel senso di Hadamard e quello della buona posizione nel senso di Tikhonov. Come è noto, la Tikhonov buona posizione di un problema di minimizzazione P consiste nella convergenza delle successioni minimizzanti verso l'unica soluzione del problema P . Tuttavia, nel caso dei problemi variazionali in forma implicita, sia in ambito scalare che vettoriale, l'unicità delle soluzioni viene difficilmente raggiunta. Perciò, si vuole introdurre e studiare concetti di buona posizione per i problemi variazionali in forma implicita in linea con il concetto di Tikhonov buona posizione in senso generalizzato per i problemi di minimizzazione, nel quale si richiede che P ammetta almeno una soluzione e che ogni successione minimizzante abbia un'estratta convergente verso una soluzione del problema P . Considerando opportune successioni approssimanti, che giocano il ruolo delle successioni minimizzanti nei problemi di minimizzazione, si potranno ottenere vari concetti di buona posizione per i problemi variazionali in forma implicita, sia in ambito scalare che vettoriale. I differenti tipi di soluzioni approssimate verranno inoltre usati nello studio dei problemi di ottimizzazione parametrica con vincoli descritti da problemi variazionali, allo scopo di ottenere risultati di stabilità.

Per quanto riguarda le applicazioni all'Economia, in particolare sono stati studiati problemi di equilibrio per mercati oligopolistici con un'impresa leader che detta la sua decisione alle rimanenti imprese (followers). Queste ultime rispondono scegliendo le quantità ottimali come soluzioni di un problema di equilibrio di Cournot. Si tratta di competizioni nella quantità che vanno sotto il nome di equilibri di Stackelberg-Cournot. Nel caso generale di funzione inversa di domanda a più valori, risultati di esistenza di equilibri di Stackelberg-Cournot sono stati dati sia nel caso in cui le imprese followers

reagiscono in unico modo (unicità della reazione) sia nel caso in cui ad ogni decisione del leader possono rispondere in più modi. Se la competizione è nei prezzi, le imprese followers scelgono i prezzi ottimali come soluzioni di un problema di equilibrio di Bertrand e, in questo caso, si parla di equilibri di Stackelberg-Bertrand. Ci si propone di studiare l'esistenza di tali equilibri e, successivamente, ottenere risultati di buona posizione sia per gli equilibri di Stackelberg-Cournot che per quelli di Stackelberg-Bertrand.

Inoltre, nell'ambito della Teoria dei Giochi, si intende studiare l'esistenza di equilibri per giochi semi-infiniti, ovvero giochi dove un solo giocatore ha un insieme di strategie grande. In particolare si intende indagare la questione dell'esistenza per giochi semi-infiniti nel caso di informazione incompleta.

3.7. Analisi Reale. Il progetto parte dai risultati ottenuti in questi ultimi anni dai gruppi "Analisi Reale" di Napoli, Potenza e Udine, e si propone di approfondire le conoscenze nello studio di funzioni a valori in gruppi topologici e semigrupp uniformi e nella cosiddetta Teoria della Misura non commutativa o generalizzata. I risultati ottenuti saranno utilizzati in Teoria dei Giochi ed in Economia Matematica. Ci si propone pertanto:

- (1) Nell'ambito della teoria della misura classica ci si propone di approfondire lo studio dell'integrale di Sion allo scopo di pervenire ad un soddisfacente teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. La ricerca parte dallo studio dei teoremi di convergenza.
- (2) Si intende proseguire lo studio dei teoremi di decomposizione di Alexandroff, tentando una formulazione topologica del problema analoga a quella del caso Booleano. Questo permetterebbe di estendere alcuni risultati alle funzioni modulari definite in un reticolo.
- (3) Nell'ambito della teoria della misura non commutativa ci si propone di affrontare lo studio del codominio di una o più funzioni (teorema di Liapunoff, teorema di Nikodym) definite in posets ortomodulari o in "effect algebras", dei teoremi di decomposizione e di estensione di misure su reticoli ortomodulari, e della struttura prodotti di reticoli che godono di particolari proprietà. Anche qui si utilizzano i risultati ottenuti sui teoremi di convergenza.
- (4) Si intende studiare nel caso bidimensionale le relazioni tra misure di Hausdorff, insiemi analitici e funzioni di classe C^n e $C^{n,\alpha}$, in termini di insiemi di livello. Ci si propone di dare una caratterizzazione delle derivate e di classi di funzioni mediante immagine inversa.

4. Didattica della Matematica, Fondamenti e Logica

Le attività di ricerca relative a questo settore sono condotte da membri del Dipartimento, con cui collaborano insegnanti di scuole elementari, medie e

superiori prevalentemente della Campania. Il Dipartimento è inoltre parte attiva in convenzioni o accordi stipulati con il C.N.R., con il MIUR (Università e Scuola) e altre istituzioni scolastiche, come l'IRRE Campania, per la realizzazione di specifici progetti di ricerca afferenti all'area della Didattica della Matematica.

Molti dei temi di ricerca affrontati prevedono tipicamente una fase di analisi critica di argomenti di interesse scolastico, una fase di progettazione di proposte o strumenti per interventi nelle scuole, una fase di sperimentazione nelle classi, e una fase di valutazione dei risultati. In altri casi l'attività di ricerca ha carattere più di osservazione e consiste nell'analisi di specifiche situazioni scolastiche, con l'impiego delle metodologie di ricerca didattiche più recenti e avanzate. Infine vengono affrontati, sul piano teorico, particolari argomenti di carattere epistemologico e cognitivo.

I principali temi di ricerca affrontati e per i quali si prevedono sviluppi per gli anni 2006-2007, sono i seguenti, alcuni dei quali distinti per livelli di scuola:

4.1. Università. Elaborazione, sperimentazione e analisi critica di metodi di insegnamento per gli insegnanti in formazione (nell'ambito della SSIS e del Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria), che mirano al recupero delle conoscenze matematiche e alla riattivazione delle risorse cognitive, in connessione con gli obiettivi della comprensione della realtà e della ricaduta sulla futura attività di insegnanti. Produzione di corrispondente materiale didattico.

4.2. Scuola superiore. Inquadramento storico-epistemologico dell'insegnamento della geometria nella scuola secondaria superiore: aspetti logici, linguistici, metodologici. Su questo tema si propone di analizzare le relazioni tra linguaggio matematico e linguaggio quotidiano nell'approccio alle teorie matematiche e alle loro applicazioni nell'ambito della scuola secondaria superiore. In particolare, nel primo biennio si centra l'attenzione sul passaggio dalla geometria intuitiva a quella basata su sistemi ipotetico-deduttivi, cercando, nel contempo, di operare in continuità con l'approccio del precedente ciclo di studi; nel triennio si studiano i collegamenti tra la geometria del piano e dello spazio e le sue applicazioni ad ambiti disciplinari diversi (con i loro linguaggi specifici, e l'uso del linguaggio quotidiano come mediatore).

4.3. Scuola elementare. Individuazione e sperimentazione di strumenti didattici per l'insegnamento del numero e delle frazioni. L'analisi dei protocolli e delle registrazioni relativi alle sperimentazioni, condotte in classi pilota appartenenti a realtà socio-culturali diverse, ha inoltre reso evidenti che illusorio pensare ad itinerari invarianti rispetto a differenze sociali,

culturali, storiche, se si vuole che gli allievi diventino partecipanti in un fare collettivo e se si condivide una visione della mente come essenzialmente sociale nelle sue origini e inestricabilmente dipendente dai fattori storici, culturali (Vygotskij). Per cui, alla luce dei dati sperimentali raccolti, si intende approfondire sul piano teorico: a) l'analisi delle competenze linguistiche su cui si fonda l'apprendimento dei numeri naturali e razionali, e delle relative difficoltà; b) l'analisi del rapporto tra l'ambiente sociale e le variabili personali di natura affettiva e cognitiva; c) l'analisi, da un punto di vista disciplinare, di alcuni dei contenuti emersi durante le sperimentazioni (lingua-logica, congetture, argomentazioni, infinito).

Le attività sono progettate allo scopo di favorire il processo di matematizzazione, utilizzando in alcuni casi storie inventate nelle quali personaggi di fantasia noti ai bambini propongono situazioni che inducono tale processo.

Infine il laboratorio povero di fisica (cfr. successivo punto 4.4) viene utilizzato come ambiente di apprendimento privilegiato di matematizzazione del reale in continuità con la naturale attitudine di ogni essere umano a ricercare strutture per organizzare, interpretare e dare senso a ciò che osserva e a ciò che fa. Tale modalità didattica viene proposta con l'obiettivo di uno sviluppo integrato di competenze scientifiche matematiche e linguistiche nella scuola dell'obbligo ed ha prodotto finora un copioso materiale in termini di itinerari didattici flessibili e articolati per tutti gli anni della scuola primaria, e per gli insegnanti elementari futuri e in servizio, specialmente di numero razionale.

4.4. Per tutti i livelli scolastici sono in corso inoltre ricerche, in collaborazione con P. Guidoni del Dipartimento di Fisica, ispirate al quadro teorico che fa capo a Vygotskij e più recentemente a Lakoff e Nùñez, relative all'apprendimento di concetti matematici attraverso attività di modellizzazione di fenomeni fisici, con particolare attenzione allo sviluppo contemporaneo delle capacità linguistiche e di rappresentazione, e in continuità con la base di esperienza percettiva e motoria degli studenti.

4.5. È anche in corso un'indagine, condotta in collaborazione con altre sedi universitarie italiane nell'ambito di un progetto FIRB, per approfondire i significati teorici delle nozioni di convinzione e atteggiamento nei riguardi della matematica, e l'impatto che questi elementi hanno sull'apprendimento. La ricerca si avvale di strumenti di rilevazione e di elaborazione di dati raccolti in vari settori interni ed esterni alla scuola.

4.6. Tecnologie Didattiche. Particolare attenzione viene infine dedicata al settore delle Tecnologie Didattiche. Al fine di creare una continuità tra il processo di formazione iniziale degli insegnanti affidata all'Università

(SSIS) e la formazione permanente (Corsi di Perfezionamento, convenzioni Università/Scuola, ...) si intende sviluppare, in quest'area disciplinare, un progetto di formazione continua per docenti di matematica e fisica che prevede la realizzazione e la gestione di un portale in cui opera una Comunità virtuale di docenti e che ha finalità di formazione, di aggiornamento, di attività collaborative in rete e di scambio di esperienze di pratica di classe.

Nel progetto le tecnologie didattiche sono intese come quell'area della didattica che propone, sviluppa e analizza metodi, incardinati sul costruttivismo sociale, per l'insegnamento/apprendimento della matematica e della fisica con l'uso di strumenti informatici e di rete (ICT).

Il progetto si propone l'analisi, l'elaborazione e la sperimentazione di metodi innovativi con l'uso delle ICT per l'insegnamento della matematica e della fisica, rivolti sia agli insegnanti in formazione che a quelli in servizio.

La Comunità afferente al progetto è strutturata in gruppi di lavoro che convergono rispetto a diverse attività:

- (1) ricerca, elaborazione e produzione di segmenti didattici ad alto contenuto tecnologico fruibili in presenza (in classe) e/o in rete in modalità e-learning;
- (2) sperimentazione, osservazione e confronto di materiali didattici creati;
- (3) utilizzo dei materiali didattici e degli ambienti di lavoro accessibili dall'archivio della comunità con scambio delle esperienze.

Il progetto che si sviluppa nell'arco di tre anni accademici ha già avviato la creazione della piattaforma di supporto della Comunit (con tecnologie web html, javascript, php con lo spazio groupware basato su database MySQL), nonché di moduli didattici sviluppati in ambiente e-learning, rivolti a corsisti della Scuola di Specializzazione, indirizzo FIM, e a docenti di classi del triennio di scuola superiore.

5. Fisica Matematica

5.1. Modelli fluidodinamici. Svariati fenomeni fisici sono rappresentati attraverso modelli non lineari dei continui dissipativi ed in particolare da "modelli fluidodinamici". L'analisi qualitativa e quantitativa di alcuni di essi è già stata effettuata nel piano 2005. Come naturale prosecuzione ci si propone di studiare le seguenti problematiche 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3:

5.1.1. *Stabilità non lineare ed andamenti asintotici.* rispettivamente per

- (1) Sistemi ad infiniti gradi di libertà (stabilità di flussi di jets in domini illimitati con angoli, miscele fluide elettroconduttrici e non). Si intendono considerare i seguenti problemi: moti fluidi in domini non

limitati in spazi con peso idonei per l'esistenza e la determinazione di sistemi assorbenti, attrattori strani e stime delle loro dimensioni, varietà inerziali, nel caso di flussi non necessariamente decadenti all'infinito spaziale.

- (2) Sistemi ad un numero finito di gradi di libertà. Si intendono considerare i seguenti problemi: andamenti asintotici per modelli fluidodinamici della biomatematica con particolare riguardo ai fenomeni che si svolgono nei chemostati ed alla epidemiologia.
- (3) Problemi di stabilità non lineare per fluidi comprimibili retti dalle equazioni di Navier-Stokes. Si vogliono ricercare condizioni sufficienti di stabilità non lineare in norme equivalenti (o più fini) della norma in energia, nel caso del problema di Bénard per un fluido omogeneo e nel caso di moti base diversi dalla quiete (moti tipo Couette-Poiseuille).

5.1.2. *Diffusione non lineare ed andamenti asintotici.* rispettivamente per

- (1) la diffusione non lineare retta da equazioni differenziali alle derivate parziali ed in particolare la diffusione nei porosi (percolazione) ed in biomatematica. Inoltre ci si propone di definire modelli matematici appropriati per lo studio di problemi di diffusione-reazione-trasporto attinenti il trasporto di inquinanti nei mezzi porosi o nell'atmosfera.
- (2) Caso della diffusione retta da equazioni integro-differenziali (equazioni cinetiche). Si effettuerà lo studio di problemi di buona posizione e ricerca di soluzioni esatte per equazioni non lineari integro-differenziali interessanti la teoria del trasporto.

5.1.3. *Convezione naturale.* con particolare riguardo alla convezione guidata da un gradiente (spazialmente periodico nella direzione orizzontale) di temperatura in uno strato fluido, nei porosi e nelle miscele fluide. Nella convezione guidata da un gradiente di temperatura spazialmente periodico nella direzione orizzontale, si presenta - già nella soluzione del problema linearizzato - la determinazione di autovalori ed autofunzioni di sistemi a coefficienti variabili con il posto. La determinazione rigorosa di essi appare non agevole e pertanto è essenziale l'applicazione di metodi numerici per la determinazione, con approssimazioni significative, degli autovalori. Si intendono studiare gli stati base stazionari o convettivi e le relative proprietà di stabilità-instabilità.

Sono previste inoltre le seguenti collaborazioni internazionali: Prof. B. Straughan (U.K.), Prof. J. N. Flavin (Irlanda), Prof. V. Kolmanowskii (Russia), Prof. M. McCarty (Irlanda), V. Protopopescu (U.S.A.).

5.2. Questioni di stabilità per equazioni differenziali.

5.2.1. *Questioni di stabilità per equazioni differenziali con singolarità.* Si prevede di approfondire ed estendere alcuni risultati ottenuti recentemente mediante l'uso di più funzioni di Liapunov. Un altro tema di ricerca riguarda la stabilità, attrattività e proprietà definitive per problemi di evoluzione. Lo studio considera anche l'esistenza, l'unicità e la ricerca di soluzioni particolari. In particolare, ci si propone di studiare le proprietà di soluzioni "travelling-wave" esatte (in particolare solitoniche), la cui esistenza è stata recentemente dimostrata, di un'equazione di Sine-Gordon perturbata, sull'asse reale e sulla circonferenza. La perturbazione dell'equazione consiste di un termine forzante costante ed uno dissipativo lineare. L'equazione ha applicazioni fisiche di grande attualità, in particolare descrive l'effetto Josephson in giunzioni unidimensionali in teoria dei superconduttori.

5.2.2. *Questioni di stabilità condizionata per equazioni differenziali.* Si prenderanno in esame problemi di stabilità totale condizionata, cioè rispetto a classi di perturbazioni che nel problema in esame appaiono di interesse preminente attraverso lo studio della stabilità totale dell'equilibrio e dei moti merostatici di sistemi olonomi a coordinate ignorabili. Si effettuerà anche uno studio di questioni concernenti la stabilità incondizionata per sistemi generali di equazioni differenziali attraverso l'esame della stabilità ristretta alle soluzioni per le quali un integrale primo vettoriale assume un conveniente valore assegnato.

5.3. Modellizzazione Matematica. È noto come la modellizzazione matematica si presenti spesso come un utile strumento di indagine nello studio di problemi di grande attualità come quello della diffusione delle innovazioni o quello dell'inquinamento ambientale (sia atmosferico che idrico).

In entrambi questi contesti, modellizzazioni matematiche frequentemente adoperate conducono a sistemi di equazioni differenziali ordinarie (sia autonome che non autonome) ad equazioni alle derivate parziali e ad equazioni con ritardo. Queste ultime in particolare nascono dalla considerazione di processi biologici ritardati come quello di crescita o di riciclo di nutrienti o di inquinanti oppure dei processi di incubazione o di maturazione degli individui di una popolazione. Un'analisi delle principali proprietà qualitative di soluzioni significative di tali sistemi si effettuano spesso attraverso un'analisi della stabilità di tali soluzioni sia con l'uso del Metodo Diretto di Liapunov che con il ricorso ai sistemi linearizzati, sia, infine, attraverso il computo di soluzioni approssimate per via numerica. Le ricerche in corso attualmente nel nostro gruppo rientrano tutte in questo ambito e sono svolte in collaborazione con due gruppi di ricercatori cinesi guidati rispettivamente dal Prof. Ma Zhien (Xi'an Jiaotong University of Xi'an) e dal Prof. Wang Wendi (South West Normal University of Chongqing).

L'attività di ricerca nel 2006 dovrebbe investire ambedue le aree menzionate, nelle direzioni qui appresso precisate.

5.3.1. *Dinamica di popolazioni in ambiente di tipo chemostato.* Sono ormai consolidate in letteratura alcune modellizzazioni matematiche concernenti la crescita di una o più popolazioni di microrganismi in ambienti acquatici di tipo chemostato, in presenza cioè di uno o più nutrienti limitanti. In quest'ultimo contesto, acquista particolare rilevanza il problema della influenza di sostanze tossiche (spesso di origine antropica) sui processi di crescita di tali popolazioni. Recentemente molta attenzione è stata rivolta ad un diverso problema di inquinamento dell'ecosistema, cioè a quello derivante dalla produzione allelopatica di sostanze tossiche da parte di una popolazione algale in competizione con un'altra. È noto che in natura l'esito di una tale competizione prevede spesso la coesistenza di entrambe le specie. Solo raramente però è possibile prevedere tale risultato per via teorica, a partire dal modello matematico corrispondente. Questa circostanza suggerisce un'attenta analisi sia del processo stesso che delle funzioni matematiche adoperate per rappresentare gli aspetti biologici fondamentali in esso coinvolti.

Uno dei temi che sarà oggetto dell'attività di ricerca prevista per il 2006 sarà appunto l'analisi sia di sistemi nei quali si sostituisce la classica funzione di Michaelis-Menten con altre funzioni di prelievo (quale ad esempio quella di Andrews) sia di sistemi nei quali si studia l'influenza di meccanismi del tipo "quorum sensing".

5.3.2. *Modelli matematici di diffusione di innovazioni.* Generalmente nella costruzione di modelli matematici che rappresentano processi di diffusione delle innovazioni in un dato ambiente sociale, si assume che al generico istante t siano individuabili due classi, rispettivamente, degli utenti e dei non utenti, le cui misure rappresentano le variabili di stato del fenomeno. Nel modello di evoluzione possono inoltre essere introdotti termini di ritardo, ad esempio, al fine di tenere conto che la decisione di adottare o abbandonare l'uso di un prodotto non è quasi mai istantanea. I modelli considerati sono usualmente di tipo deterministico e sono costituiti da equazioni differenziali ordinarie o integro-differenziali. Per tali sistemi è di rilevante interesse la ricerca di soluzioni stazionarie "positive" che siano globalmente asintoticamente stabili.

Due ulteriori temi che saranno oggetto dell'attività di ricerca prevista per il 2006 saranno l'analisi della dinamica di siffatti sistemi ed esaminare le forti analogie che tali sistemi hanno con molte modellizzazioni di importanti processi epidemiologici.

5.3.3. Un ulteriore tema di ricerca è costituito da un nuovo approccio alla teoria dei giochi evolutiva che consiste in un'analisi rigorosa della dinamica al fine di determinare una struttura sotto la quale tale dinamica

converga. È già stato dimostrato che la dinamica converge ad un equilibrio stabile che garantisce una sorta di comportamento razionale, o “strategia evolutivamente stabile” (ESS), degli individui della popolazione, nel caso in cui ciascuno cerchi di massimizzare una specifica funzione che ha un significato biologico. La maggior parte delle ricerche concerne la dinamica di conflitti caratterizzati da un tratto continuo, lo stato della popolazione è dato ad ogni istante da una funzione di distribuzione del tratto stesso. È già stato provato che le ESS non soddisfano i requisiti per la convergenza ed è stato definito il concetto di strategia stabile in modo continuo (CSS). Una questione da essere ancora considerata era se e per quale classe di dinamiche delle popolazioni il nuovo concetto di stabilità garantisca una convergenza tipo L2. Dopo aver già provato che c'è convergenza per la dinamica del replicatore si intende ora estendere la proprietà a situazioni multidimensionali più generali. In un recente lavoro pubblicato sul *J.Math.Bio* (2003) sono state poi provate le proprietà di stabilità asintotica delle CSS nella dinamica deterministica del replicatore., si sta ora lavorando anche su una generalizzazione di questa. Le ricerche si avvalgono della fondamentale collaborazione del Prof Ilan Eshel dell'Università di Tel Aviv e del Prof. Avner Shaked dell'Università di Bonn.

5.4. Meccanica del Continuo.

- (1) Edizione del secondo volume del testo *Continuum Mechanics using Mathematica: Fundamentals, Applications and Scientific Computing* edito dalla Birkhäuser nel corrente anno.
- (2) Problemi dinamici in elasticità non lineare e propagazione ondosa.
- (3) Mezzi porosi. Stabilità di pendii. Modelli di frontiera libera per l'evoluzione della falda acquifera.
- (4) Comportamento dinamico di continui elastici in regime transitorio. Funicolari.
- (5) Metodi computazionali ed analisi qualitativa.

5.5. Ottica teorica ed Applicata.

- (1) Analisi delle aberrazioni ottiche del quinto ordine.
- (2) Implementazione di un software per la progettazione di combinazioni ottiche, come estensione di quello già realizzato e premiato col terzo posto della Campania Start Up nel progetto Optimath.

5.6. Metodi geometrico-differenziali in Dinamica Analitica.

- (1) Equazioni differenziali in forma implicita su varietà differenziabili
- (2) Formulazione geometrica della dinamica d'Alembertiana

- (3) Integrabilità, simmetrie e riduzione dell'equazione di Dirac in dinamica presimplessica

5.7. Geometria noncommutativa e sue applicazioni alle teorie quantistiche.

- (1) Sviluppo di strumenti della geometria differenziale su spazi non commutativi ottenuti per deformazione di spazi commutativi tramite "jordanian twist" o "Drinfel'd twist".
- (2) Deformazione della nozione di quaternioni, e sua applicazione alla ricerca di soluzioni istantoniche di teorie di gauge su spazi noncommutativi.

6. Geometria

6.1. Geometria Combinatoria. L'attività di ricerca dei componenti del gruppo di geometria combinatoria si è sviluppata, negli ultimi anni, nell'ambito dei seguenti temi: quadrangoli generalizzati, geometrie su campi di Galois e blocking set, spazi lineari. Su ciascuno di questi filoni di ricerca richiamiamo brevemente le tematiche che si vogliono studiare.

6.1.1. *Quadrangoli generalizzati di traslazione e flock.* Tutti gli esempi noti di quadrangoli generalizzati di traslazione con parametri (q, q^2) si costruiscono usando gli ovaloidi (egg), e tutti gli esempi noti, quando q è dispari, sono associati ad un flock su un semicorpo. Per i risultati di "L. Bader, G. Lunardon: *On non-hyperelliptic flocks*, Europ. J. Combin. **15** (1994)", ogni nuovo esempio di tale flock deve essere sporadico e l'unico esempio sporadico noto è stato esplicitamente calcolato in "L. Bader, G. Lunardon, I. Pinneri: *A new semifield flock*, J. Comb. Theory (A) **86** (1999)". Si vogliono costruire degli esempi di ovaloide, concentrando l'attenzione o sulla caratteristica pari o su nuovi possibili esempi sporadici. Quando q è dispari, i BLT-set di $Q(4, q)$ sono equivalenti a flock del cono quadratico di $PG(3, q)$. Si conoscono molte classi di esempi e alcuni esempi sporadici in buona parte costruiti mediante l'uso del calcolatore. Si vogliono classificare i BLT-set invarianti per l'azione di una riflessione iperbolica, che possiedono un gruppo regolare di simmetrie.

6.1.2. *Geometria di Galois e blocking set.* Nel lavoro "S. Ball, A. Blokhuis, M. Lavrauw: *Scattered spaces with respect to a spread in $PG(n, q)$* , to appear in Geom. Dedicata" si estende il concetto di blocking set lineare introducendo i sottospazi scattered rispetto a una fibrazione normale di $PG(3t - 1, q)$ dimostrando l'esistenza di un blocking set multiplo di $PG(2, q^4)$. Si vogliono costruire esempi di tali strutture, in relazione con lo studio dei blocking set lineari di $PG(2, qt)$ e provare ad estendere la teoria dei blocking set di Rédei, sviluppata nei piani desarguesiani, agli spazi proiettivi di dimensione

superiore. Si vogliono, inoltre, studiare gli insiemi di rette che generalizzano i complessi quadratici di $PG(n, q)$.

Un blocking set rispetto ad un insieme F di rette dello spazio proiettivo $PG(d, q)$ (un F -blocking set) è un insieme di punti di $PG(d, q)$ ad intersezione non vuota con ogni retta di F . Aguglia-Korcharos e Giulietti hanno caratterizzato gli F -blocking set di minima cardinalità in $PG(2, q)$, dove F è l'insieme delle rette esterne ad una conica non degenere. Si pone allora in modo naturale il problema di caratterizzare famiglie di F -blocking set di $PG(d, q)$, $d \geq 3$, dove F è l'insieme delle rette esterne ad una quadrica. Risultati in tal senso sono stati ottenuti da P. Biondi e P.M. Lo Re in: *On blocking sets of external lines to a quadric in $PG(3, q)$, q prime*, e *On blocking sets of external lines to a hyperbolic quadric in $PG(3, q)$, q even*.

P. Biondi e P.M. Lo Re stanno ora lavorando, in collaborazione con L. Storme, alla caratterizzazione degli F -blocking set di minima cardinalità di $PG(d, q)$, dove F è la famiglia delle rette esterne ad una quadrica.

6.1.3. *Geometria di Galois.* In uno spazio proiettivo tridimensionale $PG(3, q)$ costruito su un campo di Galois d'ordine q le quadriche non riducibili sono il cono, la quadrica iperbolica e quella ellittica. I piani dello spazio intersecano tali quadriche in $1, q + 1$ o $2q + 1$ punti.

È naturale chiedersi se un insieme K di punti di $PG(3, q)$ che sia intersecato da ogni piano in $1, q + 1$ o $2q + 1$ punti sia necessariamente una quadrica non riducibile. Tale problema è affrontato in un recente lavoro di D. Olanda N. Durante V. Napolitano ed il risultato trovato dà risposte al problema posto nell'ipotesi che K contenga almeno due rette. Ulteriori indagini sono in corso nell'ipotesi che K non contenga rette o ne contenga una sola.

6.1.4. *Spazi lineari.* Un problema di grande interesse nella teoria degli spazi lineari è trovare condizioni affinché uno spazio planare finito sia immergibile in uno spazio proiettivo. Per uno spazio planare finito sembra naturale supporre che ci siano alcune regolarità che rendano possibile tale immersione.

In particolare sembra naturale supporre che nello spazio planare sia costante il numero $q + 1$ di rette di un fascio e sia costante il numero $n + 1$ di piani per una retta. Ovviamente è $n \geq q$.

Gli spazi affini e proiettivi hanno ovviamente queste due regolarità anche quando essi siano privati di qualche loro punto.

Ci si può chiedere se queste due proprietà possano bastare per l'immergibilità dello spazio in uno spazio proiettivo.

Tale problema è affrontato in un recente lavoro di D. Olanda N. Durante V. Napolitano nell'ipotesi che i piani dello spazio a due a due hanno intersezione non vuota. Il risultato maggiore mostra che se $n > q$ allora lo

spazio è $PG(4, q)$.

Ulteriori ricerche sull'argomento sono in corso al fine di trovare caratterizzazioni di $PG(r, q)$.

6.2. Geometria Algebrica. Le tematiche affrontate possono essere schematizzate nel modo seguente:

6.2.1. *Varietà algebriche.* (a) conduttore, singolarità ordinarie e K-teoria. Si studiano le proprietà locali delle sottovarietà multiple ordinarie di codimensione uno, con particolare attenzione al conduttore e ai gruppi di K-teoria dei relativi anelli locali. (b) Spazi osculatori, Jacobiane e Hessiana di ipersuperfici. Studio delle varietà con difetto di tangenza e loro classificazione. Studio dei sistemi lineari di ipersuperfici a jacobiana indeterminata. Studio delle falde di una superficie nell'intorno di un punto e problema della loro rappresentazione analitica. (c) Sistemi lineari di curve algebriche piane. Problemi di interpolazione.

6.2.2. *Calcolo simbolico.* costruzione e implementazione di algoritmi, seriali e paralleli, relativi a varietà algebriche, in particolare razionali. Interessano algoritmi di tipo polinomiale per il calcolo della risoluzione di ideali di un numero finito di punti anche grassi in posizione generica e di una generica varietà razionale che si distinguano dagli algoritmi esponenziali preesistenti, basati sulla nozione di basi Groebner.

6.3. Topologia algebrica. Le tematiche affrontate possono essere schematizzate nel modo seguente:

- (1) Metodi di Teoria degli Invarianti Modulari applicati allo studio dell'algebra di Steenrod ed altre algebre ad essa correlate, ed allo studio delle k-teorie di Morava di spazi classificanti.
- (2) Funtori omotopici rappresentabili geometricamente su oggetti stratificati, trasversalità.

7. Matematica Computazionale

7.1. Metodi, algoritmi e software per la risoluzione di problemi delle scienze applicate. Parte dell'attività di ricerca nel settore della Matematica Numerica si colloca nell'ambito dello sviluppo di metodi, algoritmi e software per la risoluzione di problemi delle scienze applicate in ambienti di calcolo ad alte prestazioni, con particolare riguardo all'impatto che le nuove architetture hanno sullo sviluppo di software numerico accurato.

In particolare, nell'anno 2006, proseguendo nella direzione intrapresa negli ultimi anni, l'interesse sarà rivolto verso applicazioni riguardanti l'elaborazione di immagini la cui risoluzione dà origine a problemi inversi mal posti.

Le applicazioni riguarderanno la ricostruzione di immagini cerebrali tridimensionali a partire da acquisizioni di dati SPECT, ricostruzione di sequenze di immagini tridimensionali provenienti da ecocardiografie e restauro digitale di pellicole cinematografiche.

La necessità di ottenere soluzioni attendibili richiede l'introduzione di tecniche di regolarizzazione basate sulla norma uno del gradiente o di una funzione del gradiente. Ciò conduce a equazioni di Eulero Lagrange di tipo differenziale alle derivate parziali non lineari.

Data la complessità del problema, il software applicativo verrà sviluppato nel contesto di un PSE (Problem Solving Environment) in grado di consentire un accesso ed un utilizzo trasparente delle risorse di calcolo e di tutto il software (lowlevel e medium-level) necessario alla risoluzione dell'applicazione. In particolare, nel caso specifico verrà preso in considerazione l'ambiente PETSc (Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation), particolarmente adatto per la risoluzione di PDE in ambiente di calcolo ad alte prestazioni.

Altra parte dell'attività di ricerca si colloca nell'area della modellizzazione di numerosi problemi di meccanica applicata, più in generale, di metodi integrali per la risoluzione di vari problemi al contorno per equazioni differenziali alle derivate parziali. Efficienti metodi di risoluzione possono essere usati in molte applicazioni (e.g. in aerodinamica, elasticità, resistenza dei materiali porosi).

Questa attività è incentrata prevalentemente su

- (1) Analisi e modellizzazione, in termini di equazioni integrali singolari (SIE) ed ipersingolari (IDE), di problemi di meccanica della frattura;
- (2) Studio analitico delle SIE e IDE tramite la teoria degli operatori;
- (3) Metodi numerici convergenti e stabili per la risoluzione delle SIE e IDE;
- (4) Algoritmi per la computazione della soluzione delle SIE e IDE.

Tale ricerca è il proseguimento di uno studio avviato negli ultimi anni e che ha già portato ad originali risultati di interesse ed applicabilità relativamente a particolari classi di equazioni integrali singolari ed ipersingolari.

L'attività verrà concentrata in una prima fase di indagine più propriamente analitica (individuazione di spazi funzionali di invertibilità degli operatori integrali) ed in una successiva trattazione numerica (uniforme limitatezza dei proiettori, stabilità e convergenza dei corrispondenti metodi numerici), fino a trattare questioni più propriamente algoritmiche e computazionali, quali il condizionamento della matrice caratteristica del metodo

numerico, nonché la determinazione di algoritmi veloci per l'inversione della suddetta matrice.

Particolare interesse sarà rivolto alla risoluzione numerica di certi problemi al contorno con frontiera libera con l'aiuto delle equazioni integrali singolari di Cauchy. In questo caso l'equazione integrale è non lineare e deve essere risolta mediante una successione di equazioni singolari di Cauchy lineari. Pertanto è necessario stabilire e studiare metodi numerici per il caso lineare con basso costo computazionale e fast soluzione delle equazioni discrete. Sono necessarie investigazioni allo scopo di approssimare al meglio la rappresentazione asintotica della soluzione e di dare algoritmi efficienti per risolvere numericamente problemi di controllo ottimale relativamente ai menzionati problemi al contorno.

Nello studio di tali problematiche si interagisce con ricercatori della Technische Universität Chemnitz (Germany), della University of Hannover (Germany) e della University of Göttingen (Germany).

7.2. Trattamento numerico di problemi di evoluzione. Molti problemi di evoluzione con memoria di interesse nelle scienze applicate (ad esempio nello studio della dinamica delle popolazioni, in alcune applicazioni economiche ed in molti problemi della biologia, della fisica e della chimica) si modellizzano con sistemi di equazioni integrali di Volterra (VIEs). Tali sistemi sono caratterizzati spesso da grandi dimensioni e/o da soluzioni con particolari proprietà. La risoluzione numerica efficiente di questo tipo di problemi richiede la conoscenza delle caratteristiche intrinseche del modello e delle sue complessità. Inoltre, i metodi numerici per VIEs, oltre a risentire di tutte le problematiche comuni ai metodi per problemi evolutivi, sono particolarmente complessi dal punto di vista computazionale proprio a causa della natura ereditaria delle equazioni. Proseguendo il lavoro intrapreso negli ultimi anni, si intende svolgere una ricerca che ha come scopo lo sviluppo e l'analisi di metodi numerici che catturino le proprietà strutturali del problema e che producano soluzioni accurate con un basso costo computazionale. Si intende inoltre sviluppare il relativo software matematico per la risoluzione numerica di sistemi di VIEs. Saranno considerate le seguenti classi di VIEs:

- i) equazioni a nucleo di convoluzione di cui è nota la trasformata di Laplace del nucleo;
- ii) equazioni di Volterra con nucleo discontinuo;
- iii) equazioni di Volterra-Fredholm su un dominio spaziale non limitato;
- iv) equazioni con soluzioni periodiche ed asintoticamente periodiche.

Per equazioni di tipo i), si sono sviluppati metodi veloci di tipo collocazione e Runge-Kutta che, utilizzando direttamente i campioni della trasformata di Laplace del nucleo, hanno un costo computazionale $O(N_t \ln(N_t))$ su N_t punti di rete e ordine di accuratezza elevato. Per tali metodi si intende completare lo studio della convergenza ed analizzare le proprietà di stabilità rispetto all'equazione test di convoluzione.

Equazioni del tipo ii), che nascono ad esempio da problemi di dinamica delle popolazioni con struttura di età, si traducono in equazioni integrali di Volterra con due ritardi costanti e possono essere risolte adattando opportunamente metodi di quadratura diretta alla particolare forma del problema. Poiché l'analisi classica della stabilità non può essere applicata in questo caso, si intende effettuare uno studio a priori dell'asintotica stabilità della soluzione e, conseguentemente, un'analisi sul comportamento dei metodi usati al fine di ottenere soluzioni numeriche che ereditino le proprietà del problema continuo.

Problemi del tipo iii) possono essere efficientemente integrati utilizzando un nuovo approccio per la risoluzione numerica della parte Fredholm dell'equazione. Si è sviluppata una strategia risolutiva basata sull'uso di regole di quadratura gaussiane per l'intervallo infinito di integrazione spaziale e su metodi di quadratura diretta per la parte temporale. Si intende effettuare l'analisi dell'efficienza ed accuratezza del metodo su un modello reale di reti neurali.

Per l'integrazione efficiente di equazioni di tipo iv), modelli di problemi di diffusione di epidemie di tipo SIS con flusso periodico di immigranti infetti, si richiedono metodi numerici che preservino la struttura della soluzione, in questo caso l'asintotica periodicità. A tal fine si è analizzato sotto quali condizioni le equazioni discrete di Volterra traenti origine dai problemi presi in esame ammettono un'unica soluzione periodica. Si intende ora analizzare e/o costruire metodi numerici che verifichino tali condizioni, ossia siano *AP*-stabili.

Inoltre si intende continuare la raccolta di Problemi ai Valori Iniziali e relativo software per equazioni integrali di Volterra che nascono da problemi del mondo reale al fine di ampliare la collezione del Test Set for IVP solvers (progetto INDAM - <http://pitagora.dm.uniba.it/~testset>) con una sezione dedicata.

8. Probabilità e Statistica Matematica

L'attività di ricerca si colloca nell'area della probabilità applicata ed è incentrata prevalentemente sullo sviluppo di metodi e di strumenti matematici di natura probabilistico-computazionale con particolare riferimento a

- (1) Modellizzazione ed analisi di sistemi di interesse biologico.
- (2) Algoritmi per problemi di cammino minimo.
- (3) Affidabilità e ordinamenti stocastici.

In particolare, si intende proseguire nello sviluppo di metodi per l'analisi del comportamento ingresso-uscita di sistemi "neuron-like" sottoposti a perturbazioni di natura stocastica, riguardati come elementi di un sistema complesso devoluto all'elaborazione ed alla trasmissione di informazione. Ci si prefigge, specificatamente di elucidare il ruolo svolto dal rumore nel processo di elaborazione e di trasmissione dell'informazione da parte di unità neuronali facendo ricorso a modelli fondati sulle approssimazioni diffusive dei processi intrinsecamente discreti caratterizzanti l'effetto della stimolazione sinaptica cui il neurone è sottoposto sia in quanto elemento di una complessa rete, le attività dei cui elementi sono essenzialmente ignote, sia in quanto sistema la cui attività spontanea è determinata da instabili equilibri tra flussi ionici, soggetti quindi a complicati meccanismi autoperturbativi anche in condizioni di equilibrio termico. Le indagini verranno concentrate nelle seguenti direzioni: (a) studio dell'effetto dei potenziali di inversioni limitanti lo spazio degli stati del processo ed analisi dei modelli diffusivi corrispondenti; (b) modellizzazione mediante processi di ritorno in presenza di tempi di refrattarietà aleatori; (c) costruzione di modelli non-markoviani caratterizzati da tempi di correlazione finiti; (d) indagine delle proprietà di modelli neuronali basati su processi stocastici gaussiani attraverso lo sviluppo di algoritmi numerici e di tecniche di simulazione per la determinazione di densità dei tempi di sparo in tali modelli; (e) studio di processi di diffusione in presenza di una barriera di tipo elastico finalizzato alla descrizione del periodo di refrattarietà esibito dai neuroni dopo l'emissione di potenziali d'azione; (f) studio di caratteristiche fondamentali di processi stocastici a realizzazioni continue e miste a salti idonei alla descrizione del potenziale di membrana neuronale in presenza di stimoli con periodicità e con fasi alternanti, sia di tipo aleatorio che di tipo deterministico, da effettuarsi anche mediante uso di algoritmi simulativi ad hoc e di strumenti tipici della teoria dell'affidabilità e della teoria del rinnovo quali funzioni d'azzardo inverse. Questa parte della ricerca è rivolta anche alla modellizzazione stocastica di rischi in competizione. In particolare, per la versione bivariata di siffatti modelli ci si prefigge di estendere talune nozioni di caratterizzazioni per tempi di vita di specifico interesse in teoria dell'affidabilità, quale ad esempio la caratterizzazione "New Better than Used". Ci si propone poi di individuare nuove proprietà di misure di informazione basate su funzioni d'azzardo e dei valori medi condizionati di possibile utilizzazione nell'ambito di modelli di interesse applicativo.

Un'ulteriore linea di ricerca, riguarda la prosecuzione di un progetto già in parte sviluppato nell'ambito di un accordo di cooperazione internazionale tra l'Università di Napoli Federico II e la Japan Science and Technology Corporation avente per oggetto la costruzione di modelli probabilistico-statistici e di simulazione di processi caratterizzanti la dinamica di molecole singole, utilizzando dati sperimentali ottenuti all'Università di Osaka mediante sofisticate tecniche sperimentali da parte del gruppo diretto dal Prof. T. Yanagida. In particolare, si tenterà di costruire un modello di motore di proteine basato su un'equazione di Langevin con potenziale dipendente dallo stato di un ciclo chimico associato al moto di una particella browniana e in grado di manifestare le caratteristiche qualitative e quantitative emerse negli esperimenti di cui sopra.

S'intende infine affrontare la progettazione e l'analisi di algoritmi per la risoluzione di problemi di cammino minimo definiti su grafi orientati con pesi e/o topologia, non stazionari. Nonostante la vasta produzione scientifica dedicata allo studio di problemi di cammino minimo su grafi orientati, scarsi e frammentari sono invero i risultati relativi alla risoluzione di siffatti problemi nel caso di caratteristiche variabili nel tempo. Tali problemi saranno riguardati in contesto di controllo stocastico per sistemi dinamici discreti le cui funzioni di transizione di stato sono definite dalla topologia del grafo caratterizzante le transizioni di stato.

9. Ricerca Operativa

L'attività scientifica che si intende svolgere è incentrata nello studio e nello sviluppo di metodi euristici per problemi combinatori cosiddetti difficili, in quanto una loro soluzione ottima è ottenibile solo tramite applicazione di metodi esibenti comportamento computazionale superpolinomiale.

Nell'ambito dei suddetti problemi ci si prefigge di studiare con particolare attenzione i problemi di taglio ottimale di un grafo non orientato pesato, per risolvere i quali si intende proporre alcune varianti della cosiddetta metaeuristica GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure), ottenute dalla combinazione di GRASP ad altre tecniche, quali Path-relinking e Variable Neighborhood Search, al fine di ottenere soluzioni qualitativamente migliori.

10. Informatica

10.1. Informatica Teorica. L'attività di ricerca riguarda principalmente i metodi formali che sono utilizzati nella teoria degli Automi, dei Linguaggi Formali e nello studio di varie strutture combinatorie quali parole, alberi, arrays bidimensionali e grafi.

In particolare, lo studio delle proprietà combinatorie e strutturali delle sequenze finite o infinite di simboli di un alfabeto finito (parole) è di grande interesse in vari campi quali l'Algebra (teoria combinatoria dei semigrupp e gruppi), la Fisica (dinamica simbolica e teoria ergodica), l'Informatica (pattern matching, data compression) e la Biologia (analisi del DNA e delle sequenze proteiche).

Si è attualmente molto interessati nell'analisi di nuove tecniche combinatorie e strutturali per lo studio delle parole. I risultati finora ottenuti hanno varie conseguenze che sono di interesse sia nella teoria degli automi e dei linguaggi sia per le applicazioni (comunicazione, sequenziamento, compressione). Inoltre, tali tecniche sono spesso estendibili a strutture combinatorie non lineari quali gli alberi e parole bidimensionali.

In collaborazione con Alessandro De Luca si sono studiate le parole Sturmiane finite che sono palindrome. In particolare, si è fornita una formula che permette di calcolare in modo esatto il numero di Sturmiane palindrome di ogni lunghezza. I risultati ottenuti sono stati comunicati alla Conferenza internazionale DLT '05 e pubblicati nel lavoro: A. de Luca e A. De Luca: Palindromes in Sturmian words, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3572, Springer (Berlin 2005) pp. 199–208.

Si ha intenzione con A. De Luca di fornire nuove caratterizzazioni delle parole Sturmiane finite e di studiare alcuni operatori di chiusura nei monoidi liberi con particolare riferimento alle chiusure palindrome.

Una ulteriore ricerca sviluppata da M. Bucci riguarda lo studio di sequenze che evitano ripetizioni del tipo $xvy\theta(v)z$ (hairpin-free sequences) dove θ è un morfismo o antimorfismo involutorio del monoide libero. Tale problematica è di grande interesse per le sue applicazioni in Biologia.

Una tematica di ricerca che si intende sviluppare riguarda lo studio di alcune famiglie di linguaggi formali quali i codici a lunghezza variabile nell'ambito della Teoria dell'Informazione. Continuando ricerche intraprese da alcuni anni si intende analizzare alcune proprietà di alcune famiglie di codici le cui parole sono parole Sturmiane finite. Alcuni risultati preliminari sono stati pubblicati nell'articolo: A. Carpi e A. de Luca, Codes of central Sturmian words, *Theoretical Computer Science*, 340 (2005) 220–239

Esiste sulle precedenti problematiche una intensa e proficua attività di collaborazione scientifica tra il Prof. Aldo de Luca e il Prof. A. Carpi dell'Università di Perugia, il Prof. F. D'Alessandro dell'Università di Roma La Sapienza, il Prof. S. Varricchio dell'Università di Roma Tor Vergata e con le Università di Parigi 7, Marne-la-Vallée e di Turku

Si ha intenzione, infine, di iniziare presso il nostro Dipartimento di Matematica e Applicazioni a partire da quest'anno accademico una attività seminariale con cadenza quindicinale sulle problematiche di ricerca in Informatica teorica.

10.2. Modelli Ipermediali. Un sistema ipermediale può essere immaginato schematicamente come un grafo in cui i nodi rappresentano i contenuti informativi ed i link le relazioni tra essi; l'istanza più significativa di sistema ipermediale è rappresentata dal Web.

L'attività di ricerca che si intende svolgere sarà incentrata su problematiche di authoring ipermediale attraverso la modellizzazione e la realizzazione di applicazioni Web, in particolare lungo le seguenti direzioni:

- (a) Apprendimento a distanza. Proseguito dello studio di modellizzazione e realizzazione di un sistema ipermediale per l'apprendimento via Web di un corso di Calcolo delle Probabilità e Statistica, in supporto ad un testo tradizionale, organizzato in unità didattiche proponenti percorsi formativi differenziati con modalità di apprendimento interattive, simulazioni, applicazioni esercitative e filmati multimediali. Le problematiche ipermediali e Web di "authoring in the large", di ottimizzazione dei dati e di multi-risoluzione saranno oggetto di studio.
- (b) Web semantico. La struttura apparentemente disordinata del Web cela un ordine nascosto: studi in tale direzione hanno mostrato che, come in altre strutture reticolari complesse (reti biologiche cellulari o neuronali) il Web gode di alcune proprietà quali quelle di small world, di clustering o di power-law che consentono di studiarne l'evoluzione temporale e di individuare metriche idonee al miglioramento dei processi di authoring, di ricerca e di navigazione sul Web.

10.3. Architetture avanzate per il Calcolo Scientifico. L'attività di ricerca riguarda essenzialmente i problemi dello sviluppo di software in ambiente parallelo, distribuito e di griglia computazionale (Grid Computing).

Il contesto nazionale in cui si colloca tale ricerca è quello delineato da svariati progetti nazionali nel campo del grid computing e in particolare il Progetto FIRB Grid.it. In tali progetti sono state avanzate prime proposte per l'utilizzo di librerie in ambiente di griglia e la definizione di un ambiente di programmazione orientato anche ad applicazioni su griglie computazionali.

L'obiettivo generale è quello di studiare e realizzare Piattaforme Abilitanti per Griglie Computazionali ad Alte Prestazioni Orientate a Organizzazioni Virtuali Scalabili

Recentemente, poi, ha avuto avvio il progetto GrADS [<http://hipersoft.cs.rice.edu/grads/>], che indaga le problematiche connesse con lo sviluppo di architetture software affidabili ed efficienti in grado di “rendere semplice” la soluzione di problemi scientifici su griglie computazionali.

La “sfida” nel campo dello sviluppo di software nell’immediato futuro comprende una gestione efficiente dei complessi sistemi di griglia mediante la messa a disposizione della migliore scelta possibile di varie alternative algoritmi/software.

In questo ambito, i principali campi di intervento sono brevemente descritti nel seguito:

- Realizzazione e sperimentazione di architetture parallele a basso costo e loro inserimento in ambienti di grid computing (studio e realizzazione di strumenti di gestione, middleware, . . .)
- Realizzazione e sperimentazione di architetture software per applicazioni grid-oriented. A partire da applicazioni grid-flow (funzionanti in ambienti grid, ed in cui le risorse sono allocate staticamente ed i task eseguiti sui vari nodi di griglia secondo uno schema data-flow), si realizzeranno applicazioni grid-aware, in cui cioè le risorse sono allocate in maniera dinamica e l’applicazione controlla lo stato della griglia e si “riconfigura” automaticamente. Questa attività avrà come campo di indagine una applicazione che consente a medici nucleari di usare in maniera trasparente calcolatori e sistemi di storage ad alte prestazioni per elaborazione immagini, management, visualizzazione ed analisi di dati provenienti da apparecchiature PET/SPECT (apparecchi per tomografia); la visualizzazione di immagini, con particolare riferimento a rilevazione di oggetti e ricostruzione di immagini con “rumore”; . . .

Il tutto rientra nello studio e realizzazione di Problem Solving Environment (PSE) in ambiente di grid computing. Questi ambienti mettono a disposizione tutte le facilities computazionali per risolvere una classe di problemi, e rendono più “semplice” la soluzione di problemi applicativi, evitando agli utilizzatori di dover trattare con dettagli riguardanti gli algoritmi e la loro implementazione.

A partire da software esistenti o sviluppati ad hoc, si realizzeranno PSE (per applicazioni di tipo astronomico, medico, . . .) introducendo capacità di message passing aggiuntive (versione parallela . . .) e ancora caratteristiche di grid-awareness che consentano:

- (1) di creare organizzazioni virtuali (VO) per la condivisione di risorse su grid
- (2) di utilizzare in maniera trasparente risorse remote

- (3) di realizzare “semplicemente” e “rapidamente” prototipi e testing di applicazioni distribuite