

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione (5 punti):

$$f(x) = \arcsin\left(\log \frac{x}{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{|x| + x^3}}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (3 punti ciascuno)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/4x}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\arctan(\sin x)}$$

Esercizio 3. Dimostrare la validità delle seguenti disequazioni:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{per ogni } x > 0$$

(3 punti per la prima, 2 per la seconda)

Esercizio 4. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 + 20|x + 2|$$

nell'intervallo $[-3, 3]$ (4 punti).

Esercizio 5. Trovare le radici complesse dell'equazione

$$\frac{1}{z} + \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

(4 punti)

Esercizio 6. Mostrare che la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = a \quad a_{n+1} = \sin a_n$$

è convergente se $a = 1$, e calcolarne il limite (4 punti). Cosa si può dire della successione al variare di $a \in \mathbb{R}$ (5 punti per la risposta completa)?

Esercizio 7. Sia $f(x)$ convessa e derivabile in $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$. Mostrare che esiste il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (3 punti). Quali sono i possibili valori di tale limite? (5 punti se la risposta è corredata di motivazione).