

# Capitolo 3

## La rappresentazione di dati

### 3.1 Introduzione

Esistono molti problemi della *fisica*<sup>1</sup> in cui la relazione tra due (o più) grandezze  $X, Y$  è nota solo attraverso un certo numero di valutazioni o misure  $x_i$  di  $X$  e  $y_i$  di  $Y$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), ottenute attraverso esperimenti, indagini statistiche, o semplici rilevamenti diretti.

In tali circostanze, può essere necessario:

- rappresentare questi dati in modo più conciso di quanto consenta la semplice descrizione “elemento per elemento”;
- desumere nuove informazioni sulla base dei dati già noti.

La deduzione di informazioni nuove può consistere semplicemente nella stima di valori di  $Y$  corrispondenti a prefissati valori di  $X$  *senza dover eseguire ulteriori esperimenti o misurazioni*, oppure nella valutazione di grandezze nuove, ottenute da  $Y$  mediante operazioni opportune, quali ad esempio un integrale o il calcolo di una derivata. Questi obiettivi possono essere raggiunti mediante la formulazione di un opportuno **modello matematico**.

In questo capitolo ci occupiamo del problema della costruzione di un modello matematico nel caso in cui si abbia solo un numero finito di informazioni. Più precisamente, illustreremo metodi, algoritmi e software per la **rappresentazione di dati**.

♣ **Esempio 3.1.** In Italia, dal 1921 ad oggi sono stati effettuati censimenti ogni dieci anni, fatta eccezione nel 1941. A partire dai dati registrati in questi censimenti, ci si propone di stimare la variazione subita dalla popolazione italiana tra un censimento e l'altro.

anno	1921	1931	1951	1961	1971	1981	1991	2001
n. abit. ( $\times 10^3$ )	39944	41652	47516	50624	54137	56557	56778	56305

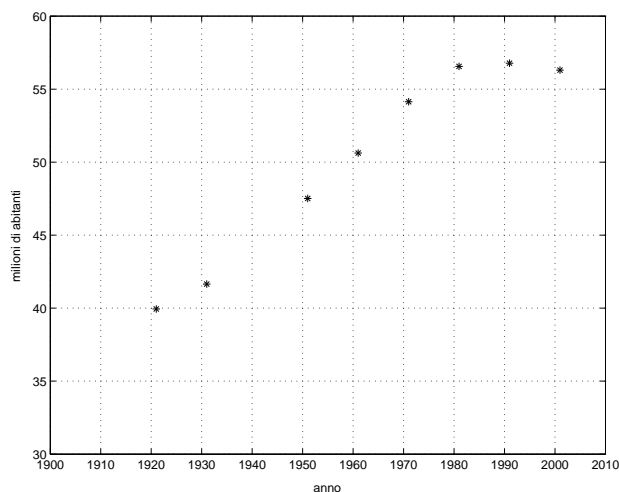


Figura 3.1: Dati registrati nei censimenti effettuati in Italia dal 1921 al 2001 <sup>2</sup>

Rappresentiamo come punti di un piano cartesiano le informazioni relative ad ogni censimento, cioè riportiamo l'anno in cui il censimento è stato effettuato, sull'asse delle ascisse, ed il numero di abitanti rilevati in quell'anno sull'asse delle ordinate (vedi Fig. 3.1).

Osservando la figura, abbiamo una rappresentazione immediata dell'andamento della popolazione italiana dal primo all'ultimo censimento. Tale descrizione però è **parziale**, perché ottenuta da un **numero finito di informazioni** ciascuna relativa **unicamente** al momento in cui è stato effettuato il censimento. Pertanto, basandoci anche su una certa consuetudine, per poter stimare cosa accade tra un censimento e l'altro congiungiamo a due a due tali punti con un segmento di retta, come mostrato nella figura seguente.

Si noti come, in Fig. 3.2, a partire da un numero finito di dati siamo riusciti a dare una descrizione generale del problema che, tra l'altro, consente eventualmente di dedurre nuove informazioni. Ad esempio, se siamo interessati a stimare la velocità di crescita del numero di abitanti in Italia, per ciascun decennio, basta calcolare il coefficiente angolare del relativo segmento di retta.

Il grafico<sup>3</sup> disegnato in Figura 3.2, si può ritenere un **modello matematico attendibile**.<sup>4</sup> ♣

Prima dell'avvento dei calcolatori, una delle applicazioni più vaste del calcolo numerico è stata la costruzione di tavole relative alle funzioni elementari trascendenti,

<sup>1</sup>Qui e nel seguito per problema *fisico* si intende un qualunque problema che riguarda un fenomeno concreto del mondo reale (fisico, chimico, economico, sociale, etc.).

<sup>3</sup>"[...] Se per certi valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  assunti da  $x$ , si conoscono o si sanno calcolare i corrispondenti valori  $y_1, y_2, \dots, y_n$  di  $y$ , fissati due assi cartesiani, si posson costruire nel piano i punti di coordinate  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , i quali son vertici di una linea poligonale, che rappresenta con tanta maggior fedeltà l'andamento della funzione  $y$  di  $x$ , quanto più vicini sono i suoi successivi vertici. Questa linea è il *grafico* della funzione. [...]" [5]

<sup>4</sup>Per ora possiamo solo intuire il significato della parola *attendibile* basandoci su considerazioni empiriche o sull'esperienza che ciascuno ha. Come vedremo in seguito, tale parola avrà un significato più preciso relativamente alla definizione che daremo, in questo contesto, di modello matematico.

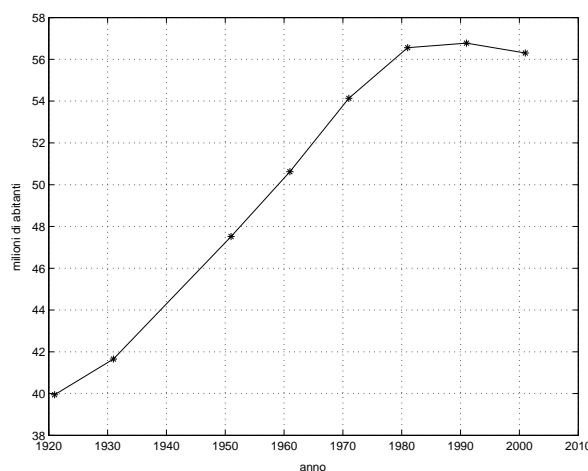


Figura 3.2: Un modello matematico per descrivere l'andamento della popolazione italiana dal 1921 al 2001

che non fossero combinazioni lineari delle quattro operazioni aritmetiche, cioè logaritmi, funzioni trigonometriche, etc. Una volta costruite le tavole, per valori dell'argomento opportunamente fissati<sup>5</sup>, si poneva il problema di come valutare la funzione nei valori non *tabulati* cioè non presenti nella tavola<sup>6</sup>. L'idea più naturale era quella di fissare un intervallo delimitato da due valori consecutivi nella tabulazione, congiungere le ordinate corrispondenti ai punti estremi dell'intervallo con un segmento di retta e calcolare, per ogni ascissa interna all'intervallo fissato, l'ordinata del punto sul segmento di retta con quella determinata ascissa. In particolare, per ciascun intervallo di tabulazione, venivano precalcolati anche i coefficienti dell'equazione di ciascun segmento di retta, in modo che fosse ridotto al minimo il numero di operazioni aritmetiche necessarie alla valutazione in un qualsiasi punto.

La rappresentazione delle funzioni matematiche elementari rientrava nell'ambito della costruzione di un modello matematico a partire da un numero finito di informazioni. Le tavole, infatti, per quanto fossero estese, consentivano di disporre delle valutazioni di una funzione solo in un numero finito e prefissato di punti. Solo con l'avvento dei calcolatori, si è potuto parlare di *generazione* delle funzioni elementari<sup>7</sup> cioè della rappresentazione di tali funzioni in modo da consentire la loro efficiente valutazione per qualunque valore "*rappresentabile*" dell'argomento e con la "*massima accuratezza*

<sup>5</sup>Nei primi anni del XX secolo E. Whittaker, docente all'Università di Edimburgo, introduceva l'interpolazione ai suoi studenti come uno strumento per "... leggere tra le righe di una tabella matematica."

<sup>6</sup>Ad esempio utilizzando strumenti costruiti appositamente, come le macchine analizzatrici, a partire dai valori assunti negli archi notevoli ( $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ) si valutavano meccanicamente le funzioni trigonometriche in altri valori ottenuti da combinazioni degli archi notevoli.

<sup>7</sup>Attualmente le funzioni elementari dei compilatori dei linguaggi di programmazione ad alto livello sono rappresentate da opportune combinazioni lineari di polinomi.

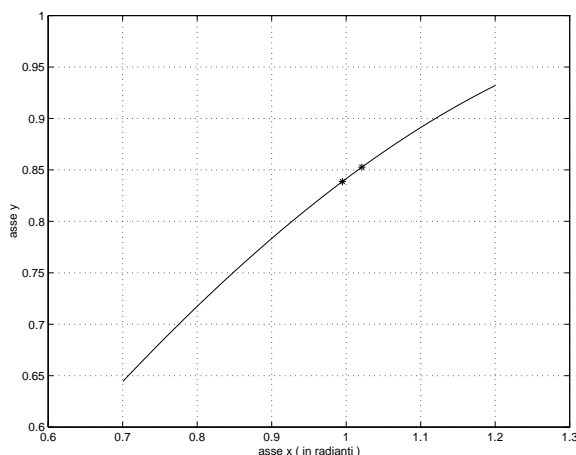


Figura 3.3: Grafico della funzione  $y = \sin(x)$  nell'intervallo  $[57^\circ, 58^\circ 51']$

*possibile*".

♣ **Esempio 3.2.** Calcolare il valore della funzione  $\sin(x)$  per  $x = 1 \text{ rad}$ . avendo a disposizione una tavola che fornisce i valori delle funzioni trigonometriche quando gli argomenti sono espressi in gradi. In questo caso, poichè  $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44.81''$  le informazioni deducibili dalla tavola sono:

$$\sin(57^\circ) = 0.83867$$

$$\sin(58^\circ) = 0.84805$$

avendo supposto di avere per ciascun punto della tavola un'approssimazione corretta a cinque cifre significative. Supponendo per la funzione  $\sin(x)$  un andamento lineare<sup>8</sup> nell'intervallo  $[57^\circ, 58^\circ 51']$ , uniamo con un segmento di retta i punti assegnati (vedi Fig. 3.4).

Come si può anche osservare dai grafici in Fig. 3.3, 3.4, i due punti sono talmente vicini che solo un "ingrandimento" consente di distinguerli. In questo caso, la curva  $y = \sin(x)$  (linea tratteggiata) e la retta secante (linea continua) "praticamente" coincidono, nel senso che non si riesce ad apprezzarne la differenza.

Il valore di  $\sin(x)$  per  $x = 57^\circ 17' 44.81'' = 1 \text{ rad}$  è quello assunto dalla funzione che rappresenta il segmento di retta nell'intervallo tra i due punti di tabulazione  $[57^\circ 17', 57^\circ 18']$ . Il modello matematico costruito in questo esempio si può ritenere *attendibile* a patto che i due punti estremi dell'intervallo siano "sufficientemente" vicini. ♣

<sup>8</sup>Questa ipotesi è coerente, tenuto conto che localmente, cioè su intervalli di ampiezza *sufficientemente piccola* ogni curva può essere *assimilata* alla retta secante passante per i due estremi dell'intervallo. In particolare, considerato l'intervallo  $[x_1, x_2]$  sostituendo alla funzione  $f(x)$  rappresentante la curva, il polinomio di Taylor di primo grado (supponendo che la funzione sia derivabile) si ha:

$$y = f(x) \approx f(x_1) + f'(\xi)(x - x_1) \quad \xi \in [x_1, x], \quad x \in [x_1, x_2]$$

sostituendo la derivata col rapporto incrementale della funzione calcolato tra  $x_1$  e  $x_2$ :

$$y \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad x \in [x_1, x_2]$$

si ottiene l'equazione della retta secante congiungente i punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .

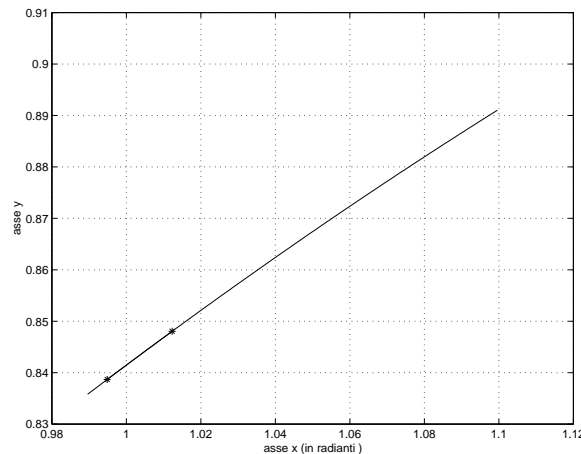


Figura 3.4: Grafico della funzione  $y = \sin(x)$  nell'intervallo  $[57^\circ 17', 58^\circ 18']$

Spesso, nel rappresentare un insieme di dati occorre tener conto di ulteriori informazioni che riguardano la natura del problema fisico da cui provengono. Infatti, in assenza di questa informazione, fissato l'insieme di dati, possono esistere differenti modelli i quali, evidentemente, descrivono in maniera diversa l'uno dall'altro, i dati assegnati. In altre parole, un'informazione fondamentale nella costruzione di un modello matematico che rappresenti i dati è la *forma* (retta, parabola, sinusoidale, etc.) del modello stesso.

♣ **Esempio 3.3.** Siano assegnati i seguenti punti:

x	-2	$-\pi/2$	-1	$\pi/3$	$\pi/2$	3
y	0.41	1.08	-0.13	-0.39	-1.58	0.97

A partire da questi punti, possiamo costruire un polinomio che passi per questi punti, oppure, se ad esempio sappiamo che i dati provengono dalla misura di una marea, che in genere è periodica, possiamo costruire un polinomio trigonometrico che passi per essi.

Come si osserva dalla Figura 3.6 la descrizione del fenomeno cambia in modo evidente a seconda della scelta della funzione. ♣

Tuttavia, se nell'acquisire i dati che descrivono il problema, si introducono perturbazioni dovute, ad esempio, allo strumento di misura utilizzato, può accadere che sebbene la dipendenza tra le grandezze in esame debba soddisfare, ad esempio, ad una legge lineare, i punti che in un sistema di riferimento cartesiano rappresentano tali grandezze non sono allineati. Come fare in questi casi a costruire un modello attendibile, cioè un modello che tenga conto sia delle perturbazioni introdotte sia della natura del fenomeno? In tal caso un modello che, in un *certo senso*, si scosti *poco* dai punti senza che sia costretto a passare per essi (fitting), così da non esaltare l'eventuale errore di misura, può risultare molto più ragionevole di uno che sia invece vincolato a passare per tali punti.

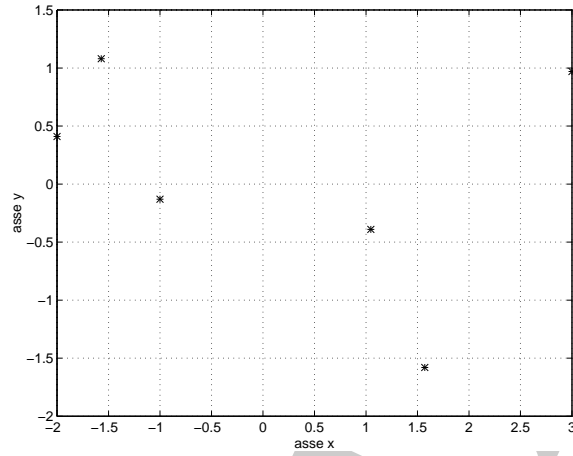


Figura 3.5: Dati ottenuti da misurazioni del livello del mare

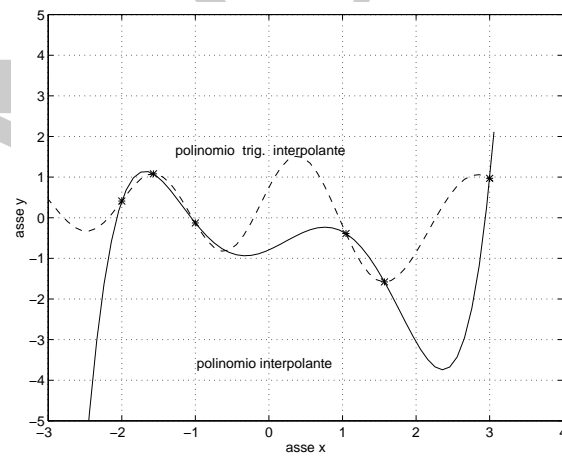


Figura 3.6: Un confronto tra due modelli interpolanti

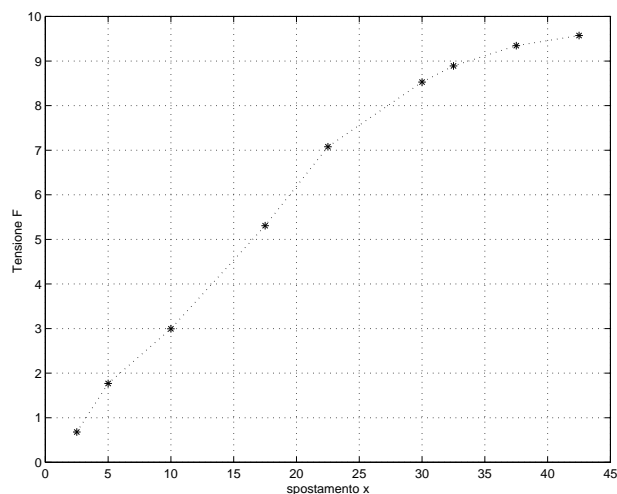


Figura 3.7: Tensione  $F$  esercitata dalla molla in funzione dello spostamento  $x$

♣ **Esempio 3.4.** Una massa di 5 kg è sospesa verticalmente ad una estremità di una molla. Supponendo che la molla sia fissata all'altra estremità si vuole determinare la costante d'elasticità della molla.

Per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, la forza esercitata dalla massa sulla molla è proporzionale allo spostamento subito dalla molla e il fattore di proporzionalità risulta essere proprio la costante di elasticità  $K$ . In altre parole, lo spostamento  $x$  della molla soddisfa alla *Legge di Hooke*:

$$F = -K x$$

dove  $F$  è la forza esercitata dalla molla (tensione della molla)<sup>9</sup>. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano  $(x, F)$ , con l'origine coincidente con la posizione di equilibrio della molla cioè  $0 \equiv (x = 0, F = 0)$  e misuriamo per alcuni valori  $x_i$  dello spostamento  $x$ , la tensione  $F_i$  esercitata dalla molla in corrispondenza degli  $x_i$  (vedi Fig. 3.7), e rappresentiamo i punti di coordinate  $(x_i, F_i)$ .

$x$ (cm)	2.5	5.	10.	17.5	22.5	30.	32.5	37.5	42.5
$F$ (Kg)	0.6804	1.7690	2.9937	5.3070	7.0760	8.5275	8.8904	9.344	9.5707

Dalla Fig. 3.7 si può osservare che i punti di coordinate  $(x_i, F_i)$ , non sono allineati. Pertanto se congiungiamo a due a due tali punti abbiamo un andamento lineare *a tratti*. Poiché la *pendenza* di questi *tratti* di retta, cioè il loro coefficiente angolare dovrebbe rappresentare il valore stimato della costante  $K$ , in questo modo avremmo diversi valori per  $K$ , uno per ogni *tratto* di retta. In altre parole, il modello ottenuto congiungendo a due a due i punti risulterebbe *poco attendibile*.

Ciò è dovuto al fatto che, nel misurare la tensione esercitata dalla molla, i valori  $F_i$  sono, in maniera inevitabile, affetti da errori di misurazione. Invece di considerare i tratti di rette passanti per i punti (linea tratteggiata), se consideriamo la retta rappresentata in Fig. 3.8 con la linea continua appare evidente che essa è quella che meglio tiene conto dell'andamento lineare del fenomeno, dal momento che si avvicina ai punti pur non passando necessariamente per essi. In questo modo si è ottenuto un modello matematico attendibile. Il coefficiente angolare di questa retta è il valore stimato per  $K$ .

♣

<sup>9</sup>Il segno negativo sta ad indicare che in seguito ad un allungamento della molla ( $x > 0$ ) la tensione

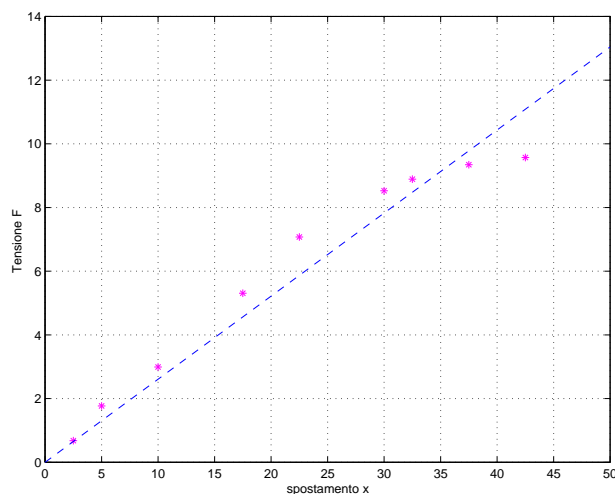


Figura 3.8: Un modello matematico per stimare la costante elastica di una molla

♣ **Esempio 3.5.** Mediante un'apparecchiatura detta spirometro si può valutare il volume d'aria che entra o esce dai polmoni di un individuo, e quindi il volume d'ossigeno inspirato. In un esperimento vengono effettuate varie misure su un soggetto in movimento. Si vuole dare una descrizione generale di quanto ossigeno viene respirato a varie velocità.

v (Km/h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
oss (litri/h)	19	21	20.5	21.5	22	24	24	25.5	24

Considerazioni sulla natura fisica del fenomeno fanno presumere che la quantità di ossigeno respirata dipenda linearmente dalla velocità dell'individuo. Ma anche in questo caso, i punti non sono allineati. Adottiamo come modello per descrivere il fenomeno, la retta disegnata in Fig. 3.10 è quella che, in un *certo senso*, si scosta il meno possibile dai punti senza però passare per essi, così da non esaltare l'errore di misura da cui sono affetti. Ne deduciamo, osservando anche la Fig. 3.8, che un modello il cui grafico non debba necessariamente passare per i punti assegnati, risulta molto più ragionevole di uno invece vincolato a passare per tali punti.

♣

Come abbiamo visto negli esempi precedenti, il primo passo nella risoluzione di un qualsiasi problema concreto consiste nella **individuazione delle relazioni esistenti tra le grandezze, note ed incognite, che intervengono nel problema**, in altre parole, nell'individuazione del **modello matematico** che descrive il problema. La formulazione di un modello matematico, negli esempi citati, si traduce nella determinazione di una funzione  $f$ , definita in un intervallo  $I$ , con  $I \supset \{x_i\}$ , che:

esercitata dalla molla è di tipo attrattivo perché è orientata nel verso opposto all'allungamento. Il contrario avviene in seguito ad una compressione della molla ( $x < 0$ ).



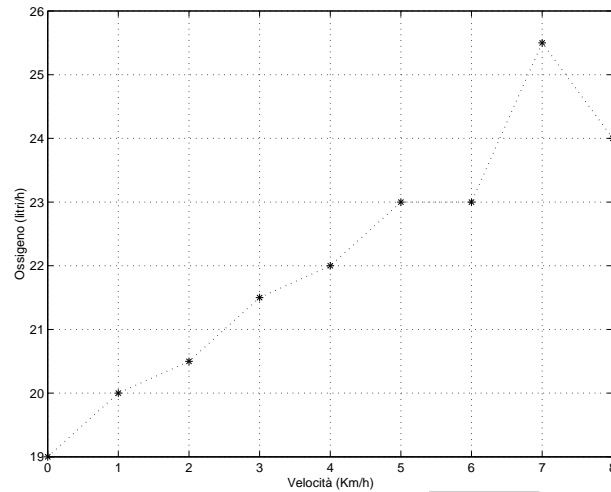


Figura 3.9: Quantità di ossigeno respirata in funzione della velocità dell'individuo.

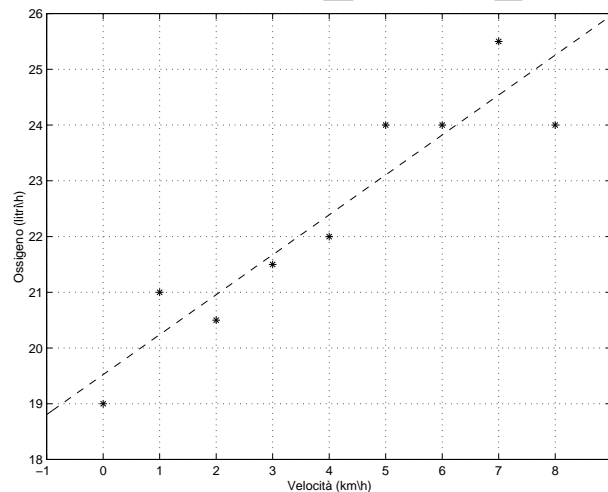


Figura 3.10: Un modello matematico per descrivere i dati registrati dallo spirometro.

- i) rappresenti i dati  $(x_i, y_i)$ ;  
 ii) conservi eventuali altre proprietà della correlazione tra le grandezze;  
 e che  
 iii) consenta di ottenere nuove informazioni eventualmente richieste.

Allora, per costruire un modello matematico che soddisfi ai requisiti (i) ÷ (iii), cioè necessari perché il modello sia *attendibile*, è opportuno tener conto delle leggi che governano il fenomeno. Queste informazioni possono essere di aiuto nel definire la *forma* del modello cioè il tipo di funzione  $f$  (ad es. una retta, un parabola, una funzione trigonometrica, etc. ). Inoltre, è importante osservare che in alcuni casi affinché un modello possa essere considerato attendibile non è necessario che il grafico di  $f$  passi per tutti i punti assegnati. Questo accade nell' esempio 3.4 e nell' esempio 3.5. Possiamo dare allora la seguente:

**Definizione 3.1. (Fitting o modello)**

Dato un insieme finito di dati  $D = \{(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}\}$  appartenenti ad un intervallo  $I$ , tale cioè che  $I \supset \{x_i\}$ , ogni funzione  $f$ , definita su  $I$  che descrive  $D$ , si dice un **fitting o modello** per  $D$ ; tale funzione è poi detta **interpolante**  $D$  se sono verificate delle condizioni sulla funzione e/o sulle sue derivate nei punti assegnati, cioè se sono soddisfatte le condizioni:

$$f(x_i) = y_i \quad (\text{in generale } f^{(j)}(x_i) = y_i^j, \quad j \in J \subseteq \mathbf{N}_0) \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Le condizioni (3.1) sono dette *condizioni di interpolazione* in quanto caratterizzano il modello interpolante.

Se invece, si richiede che la funzione  $f$  sia tale che<sup>10</sup>:

$$f = \arg \min_{i=1, \dots, n} |f(x_i) - y_i|$$

allora la funzione  $f$  fornisce un modello **approssimante**. Per determinare un modello per  $D$  soddisfacente i requisiti (i) ÷ (iii) è dunque necessario in primo luogo stabilire se  $f$  debba:

- solo *approssimare*;
- solo *interpolare*;
- *interpolare ed approssimare*.

---

<sup>10</sup>In questo contesto viene preso in considerazione il problema di approssimazione detto "*di migliore approssimazione*", in cui si richiede che la distanza tra la funzione approssimante e i punti assegnati sia minima; quando si richiede che la distanza sia minore di  $\epsilon$ , si parla, semplicemente, di approssimazione di ordine  $\epsilon$ .

Nel caso in cui si scelga un modello approssimante, è poi necessario anche poter stabilire una **misura** di quanto  $f$  si scosti dai punti in  $D$ .

È naturale, a questo punto, chiedersi perché introdurre i modelli approssimanti che impongono la scelta ulteriore di un criterio con cui misurare lo scostamento quando i modelli interpolanti consentono di rappresentare fedelmente l'insieme di dati di cui si dispone.

Come già accennato, il ricorso ad un modello interpolante vincolato fortemente ai dati ha senso solo quando questi ultimi siano affetti da errori *trascurabili*. In caso contrario, quando si presume che i dati siano affetti da errori *non trascurabili*, non avrebbe senso vincolare una funzione ad assumere tali valori perché ciò potrebbe comportare un'amplificazione dell'errore. Osserviamo che, negli esempi descritti abbiamo supposto che nel problema del censimento l'errore possa essere considerato trascurabile, mentre nell'esperimento dello spirometro, o della molla, l'errore di misura ha fatto sì che i punti non fossero più allineati, cioè l'errore non può essere considerato trascurabile. Pertanto, nel primo caso si è scelto un modello interpolante, negli altri, si è preferito un modello solo approssimante.

Ciò premesso diamo le seguenti definizioni:

### **Definizione 3.2. (Problema di interpolazione)**

Dati  $n$  valori distinti  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  detti **nodi**, ed  $n$  valori corrispondenti  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ , si vuole determinare una funzione  $f$ , detta **funzione interpolante**, che nei nodi  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  soddisfi a certe condizioni, dette **condizioni di interpolazione**. Tali condizioni, in generale, sono vincoli che la funzione interpolante  $f$  (e/o le sue derivate), deve soddisfare nei punti  $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ .

Mentre, un problema di approssimazione di dati può essere enunciato nel modo seguente<sup>11</sup>:

### **Definizione 3.4. (Problema di approssimazione)**

Dati  $n$  valori distinti  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ , detti **nodi** ed  $n$  valori corrispondenti  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ , si vuole determinare una funzione  $f$ , detta **funzione approssimante**, la cui distanza nei nodi  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  dai valori  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$  sia minima; la scelta della misura di tale distanza e il tipo di vincolo imposto a tale distanza qualifica il problema di approssimazione considerato.

<sup>11</sup>In questo contesto verrà discussa una formulazione semplificata del problema dell'approssimazione di dati. Più in generale sussiste la seguente

**Definizione 3.3.** Data una funzione  $f$ , definita su uno spazio di Banach  $\mathcal{B}$ , si vuole determinare una funzione  $\tilde{f}$ , che sia semplice da determinare e da valutare, in termini di complessità computazionale, che si scosti il meno possibile dalla funzione  $f$ . Lo scostamento tra  $f$  e  $\tilde{f}$  è misurato dalla norma sullo spazio  $\mathcal{B}$  della differenza tra  $f$  e  $\tilde{f}$ :  $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{B}}$ . La funzione  $\tilde{f}$  è detta **funzione approssimante**.

Come abbiamo anche visto dagli esempi, l'interpolazione e l'approssimazione forniscono due modelli sostanzialmente differenti, anche se **storicamente** si tendeva a confonderli. Uno dei motivi è che tra le funzioni approssimanti, potremmo scegliere quelle che nei nodi assumono i valori  $y_i$ , in altre parole potremmo scegliere di costruire funzioni approssimanti che siano anche interpolanti. In realtà come vedremo in seguito, questo ha senso in alcuni problemi di analisi numerica.

Il capitolo è organizzato come segue: cominciamo a prendere in esame il problema dell'interpolazione, successivamente quello dell'approssimazione. In particolare, in 3.2, introduciamo l'**interpolazione polinomiale di Lagrange**, in cui si richiede che la funzione interpolante sia un polinomio e che le condizioni di interpolazione siano vincoli imposti **unicamente** sulla funzione interpolante.

In 3.5 viene presentato un particolare problema di approssimazione di dati: quello in cui la funzione approssimante è un polinomio costruito richiedendo che sia minima la somma dei quadrati delle distanze dei punti assegnati. In tal caso si ha l'**approssimazione nel senso dei minimi quadrati**.

## 3.2 Il problema dell'interpolazione

Come abbiamo detto, la costruzione di un modello matematico che descriva in modo attendibile dei dati affetti da errori che possono essere considerati trascurabili, conduce ad una funzione interpolante.

♣ **Esempio 3.6.** Una pallottola è sparata verso l'alto dalla sommità di un edificio alto 100 metri. Viene osservato che dopo 10 secondi dal lancio la pallottola raggiunge la massima altezza di 590 metri. Si vuole disegnare la traiettoria seguita dalla pallottola finché questa raggiunge il suolo.

Il moto della pallottola è un moto uniformemente accelerato con accelerazione uguale all'accelerazione di gravità  $g$ . Se introduciamo un sistema di riferimento  $(x, y)$  in cui sull'asse  $x$  riportiamo il tempo espresso in secondi, e sull'asse  $y$  riportiamo l'altezza della pallottola con l'origine coincidente con la base dell'edificio, la traiettoria seguita dalla pallottola è una parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ , il cui vertice rappresenta il punto in cui la pallottola raggiunge la massima altezza; in questo punto, inoltre, la velocità è nulla.

Per disegnare la traiettoria della pallottola, ovvero per tracciare il grafico della parabola  $y = ax^2 + bx + c$ , è necessario conoscere i tre coefficienti della parabola,  $a, b, c$ . A tal fine imponiamo che la curva passi per il punto di coordinate  $(0, 100)$ , (posizione iniziale al tempo iniziale) e per il punto di coordinate  $(10, 590)$  (massima altezza dopo 10 secondi). Richiediamo, infine, che nel punto di coordinate  $(10, 590)$  ci sia il vertice della parabola (vedi Fig. 3.11).

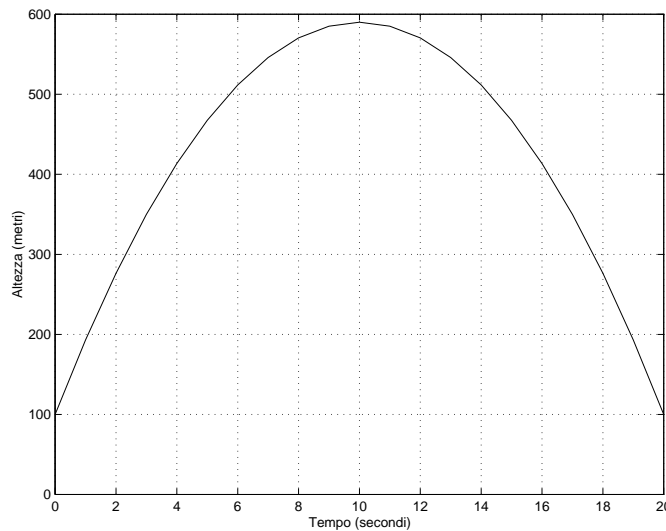


Figura 3.11: Traiettoria seguita dalla pallottola

Osserviamo che tale curva è stata ottenuta conoscendo due punti appartenenti alla curva e la "pendenza" della curva in uno dei due punti <sup>12</sup>. ♣

Le condizioni richieste alla funzione interpolante possono riguardare esclusivamente la funzione stessa oppure coinvolgere anche le sue derivate.

♣ **Esempio 3.7.** Calcolare il valore della funzione  $f(x) = \log(x)$  per  $x = 1.54$  avendo a disposizione una tavola che fornisce i valori della funzione logaritmo per valori di  $x$  distanziati di 0.1.

Considerato l'intervallo di tabulazione  $[x_1 = 1.5, x_2 = 1.6]$  e supponendo che siano tabulati valori corretti a 4 cifre significative, si ha:

$x_i$	1.5	1.6
$\log(x_i)$	0.4055	0.4700

utilizziamo come funzione interpolante la retta passante per  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . Tale retta ha equazione:

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \implies y = y_2 + (y_1 - y_2) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = r(x) \quad ,$$

valutiamo la funzione  $y = r(x)$  in  $\bar{x} = 1.54$ :

$$r(1.54) = 0.47 + (0.4055 - 0.47) \frac{1.54 - 1.6}{1.5 - 1.6} = 0.4313 \quad .$$

---

<sup>12</sup>Imponendo che il vertice della parabola coincida con il punto di massima altezza, in effetti, abbiamo imposto che la "pendenza" della parabola, cioè la tangente alla parabola nel vertice sia la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione  $y = 590$ .

Tale quantità rappresenta il valore di  $\log(1.54) = 0.4317$ , corretto a tre cifre significative <sup>13</sup>. ♣

In generale, se le condizioni richieste alla funzione interpolante coinvolgono unicamente i valori che essa assume in certi punti si ha il **problema di interpolazione di Lagrange**.

**Definizione 3.5. (Problema di interpolazione di Lagrange)**

*Dati  $n$  nodi distinti  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ , ed  $n$  valori  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ , determinare una funzione  $f$  tale che:*

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

*Tali condizioni sono dette* **condizioni di interpolazione di Lagrange**.

Il problema di interpolazione di Lagrange richiede quindi che per ciascun nodo sia assegnata una ed una sola condizione; uno schema grafico dell'interpolazione di Lagrange è il seguente:

nodi	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$\dots$	$x_n$
condizioni	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$\dots$	$y_n$

**Schema riassuntivo dell'Interpolazione di Lagrange**

♣ **Esempio 3.8.** Calcolare  $f(1.54) = \log(1.54)$  supponendo che sia noto il valore che la funzione logaritmo assume per  $x_1 = 1.5$ .

Poiché manca il valore in un altro nodo non possiamo procedere come nell'esempio 3.7, però possiamo tener conto del fatto che, essendo  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , è possibile conoscere il valore di  $f'(x_1)$ .

Si ha:

$$f(1.5) = 0.4055, \quad f'(1.5) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} = 0.6666$$

Per calcolare  $\log(1.54)$ , determiniamo tra tutte le rette che passano per il punto di ascissa  $x_1 = 1.5$  quella di coefficiente angolare  $f'(1.5)$ :

$$y = r_1(x) = y_1 + f'(1.5) \cdot (x - x_1) = 0.4055 + 0.6666 \cdot (x - 1.5)$$

e sostituendo a  $x$  il valore 1.54, calcoliamo  $r_1(1.54)$ :

$$r_1(1.54) = y_1 + f'(1.5) \cdot (1.54 - 1.5) = 0.4055 + 0.6666 \cdot 0.04 = 0.4322$$

Tale valore è un'approssimazione di  $\log(1.54)$  corretta a 2 cifre significative <sup>14</sup>. ♣

<sup>13</sup>Osserviamo che tale valore è stato ottenuto supponendo che nell'intervallo  $[1.5, 1.6]$  il grafico della funzione logaritmo fosse assimilabile al segmento di retta secante passante per i punti della curva di ascissa 1.5 e 1.6

<sup>14</sup>Osserviamo che tale approssimazione è stata ottenuta supponendo che nell'intervallo  $[1.5, 1.54]$  il grafico della funzione logaritmo sia assimilabile alla retta tangente passante per il punto della curva di ascissa 1.5.

Se le condizioni di interpolazione coinvolgono anche le derivate della funzione si ha il **problema di interpolazione di Hermite**:

**Definizione 3.6. (Problema di interpolazione di Hermite)**

Assegnati  $n$  nodi distinti  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ ,  $n$  interi positivi  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , tali che:

$$\sum_{i=1}^n l_i = m$$

ed  $m$  valori  $(y_i^j)$  con  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 0, \dots, l_i - 1$ , determinare la funzione  $f$  tale che<sup>15</sup>:

$$f^{(j)}(x_i) = y_i^j \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, l_i - 1$$

Il problema di interpolazione di Hermite richiede quindi che per ciascun nodo sia assegnata almeno una condizione; inoltre, **se in un nodo è assegnata una condizione sulla derivata di un ordine  $q$  allora devono essere necessariamente assegnate in quel nodo tutte le condizioni sulle derivate di ordine inferiore, cioè le condizioni sulle derivate di ordine  $j$  con  $j = 0, \dots, q - 1$** <sup>16</sup> Una rappresentazione grafica di ciò è la seguente:

nodi	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$\dots$	$x_n$
condizioni	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$\dots$	$y_n$
	$y_1^1$	$y_2^1$	$\dots$	$\dots$	$y_n^1$
	$y_1^2$		$\dots$	$\dots$	$y_n^2$
	$y_1^3$		$\dots$	$\dots$	

**Interpolazione di Hermite**

Osserviamo che nella formulazione generale di un problema di interpolazione, sia esso di Lagrange o di Hermite, non abbiamo precisato la *forma* della funzione interpolante. Dovendo costruire un modello per questi dati, uno dei primi quesiti che si pone è il seguente: quale forma scegliere per la funzione interpolante ?

In generale, la scelta della *forma* dipende esclusivamente dal problema e dagli obiettivi per i quali si costruisce il modello interpolante<sup>17</sup>.

In base a tale scelta si caratterizza il **tipo di interpolazione** cioè ad esempio si parla di:

<sup>15</sup>Nel seguito si userà la notazione  $f^{(j)}(x_i)$  per indicare la derivata di ordine  $j$  della funzione  $f$  valutata nel punto  $x_i$  ed  $f^{(0)} \equiv f$

<sup>16</sup>Se invece in corrispondenza di un nodo ci sono delle *lacune* cioè mancano una o più condizioni sulla derivata della funzione approssimante si ha il **problema di interpolazione di Hermite - Birckoff**.

<sup>17</sup>Osserviamo che specificare la *forma* del modello interpolante equivale a specificare lo spazio  $\mathcal{F}$  nel quale viene formulato il problema di interpolazione e al quale la funzione interpolante  $f$  deve appartenere.

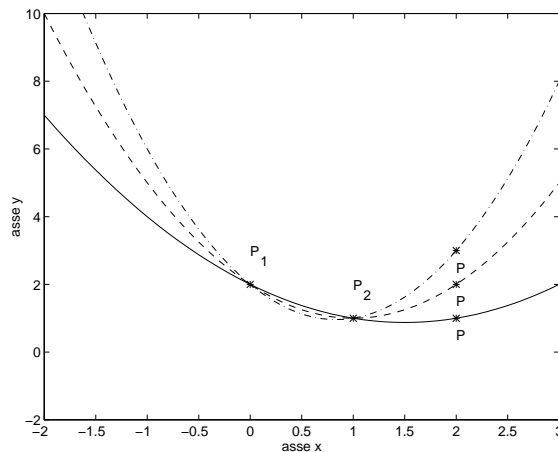


Figura 3.12: Parabole interpolanti i punti  $P_1, P_2$  e  $P$

- **interpolazione polinomiale**, se si richiede che la funzione interpolante sia un polinomio di un certo grado;
- **interpolazione trigonometrica**, se si richiede che la funzione interpolante sia un polinomio trigonometrico di un certo grado;
- **interpolazione mediante spline**, se si richiede che la funzione interpolante sia una spline di un certo grado.

Ad esempio, in Figura 3.11, è disegnato il grafico di una funzione interpolante di tipo polinomiale, in particolare una parabola.

Nel seguito focalizziamo l'attenzione sull'**interpolazione polinomiale**.

### 3.2.1 Esistenza e unicità del polinomio interpolante di Lagrange

Il primo problema da affrontare ai fini della costruzione del polinomio interpolante riguarda la sua esistenza e, soprattutto, la sua unicità.

♣ **Esempio 3.9.** Siano  $P_1$  e  $P_2$  due punti distinti; è noto che per  $P_1$  e  $P_2$  passa un'unica retta, ma quante sono le parabole che passano per tali punti? Come si può anche osservare dalla Figura 3.12, fissati  $P_1$  e  $P_2$ , al variare del punto  $P$  esiste una ed una sola parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse  $y$ , passante per  $P_1, P_2$  e  $P$ . Potendo variare  $P$  in infiniti modi esistono infinite parabole che passano per  $P_1$  e  $P_2$ .

In un sistema di assi cartesiani  $(x, y)$  una parabola si rappresenta con un'equazione di secondo grado del tipo:

$$y = p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathfrak{R}, \quad a_2 \neq 0$$



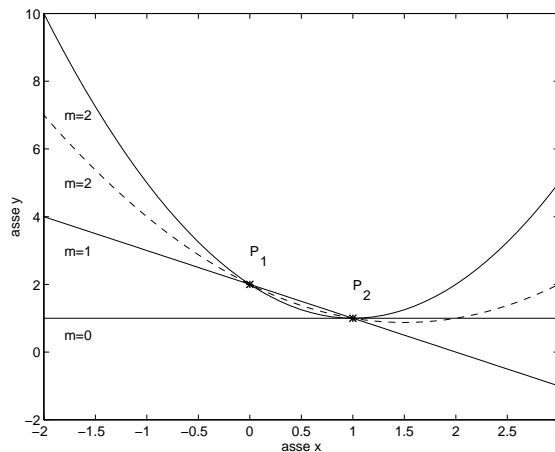


Figura 3.13: Polinomi di grado  $m$  interpolanti i punti  $P_1$  e  $P_2$

con  $a_0, a_1, a_2$  univocamente determinati<sup>18</sup>, al variare del punto  $P$  esiste una ed una sola terna di coefficienti che individuano univocamente la parabola passante per  $P_1, P_2$  e  $P$ . Potendo variare  $P$  in infiniti modi, si ha che esistono infinite terne di coefficienti  $a_0, a_1, a_2$  per cui la corrispondente parabola passa sia per  $P_1$ , sia per  $P_2$ .

In altre parole, dati due punti esiste un'unica retta passante per essi ma i due punti, da soli, non bastano a determinare univocamente la parabola passante per essi. ♣

Il risultato al quale si è pervenuto nell'esempio precedente, è in realtà a carattere generale. Consideriamo il problema seguente:

**Problema di interpolazione polinomiale di Lagrange:**

Assegnati due punti distinti del piano,  $P_1 \equiv (x_1, y_1)$  e  $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ , con  $x_1 \neq x_2$ , determinare per quali valori di  $m$  esiste ed è unico il polinomio<sup>19</sup>:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$$

di grado al più  $m$ , tale che:

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1 \\ p(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

Tale problema, come mostrato in Fig. 3.13:

<sup>18</sup>Con ciò si intende dire che una parabola si può caratterizzare come il luogo dei punti di coordinate  $(x, y)$  che soddisfano ad una equazione di secondo grado del tipo

$$y = p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathfrak{R}, a_2 \neq 0$$

<sup>19</sup>Cioè esiste un'unica  $(m+1)$ -pla di valori  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .

- se  $m = 0$ , non ammette soluzione (a meno che  $y_1 = y_2 = a_0$ , nel qual caso la soluzione è la retta parallela all'asse delle ascisse e tale che tutti suoi punti hanno ordinata  $a_0$ , cioè  $p(x) \equiv a_0$ ).
- se  $m = 1$ , ammette un'unica soluzione (esiste un'unica retta passante per i due punti assegnati  $y = p(x) = a_1x + a_0$ , con  $a_0$  e  $a_1$  univocamente determinati);
- se  $m = 2$ , ammette infinite soluzioni, cioè in infiniti modi è possibile scegliere la terna dei coefficienti  $a_0, a_1, a_2$  del polinomio  $p(x)$  soddisfacente le condizioni (3.2)

Si può dunque concludere che **il polinomio  $p \in \Pi_m$ , interpolante gli  $n = 2$  punti assegnati esiste ed è unico se e solo se  $m = 1 = n - 1$ .**

Che succede se invece di due punti ne consideriamo tre? In altri termini, dati tre punti di che grado deve essere il polinomio interpolante tali punti perchè sia l'unico? E se i punti sono quattro, cinque, etc.?

Ebbene, la relazione tra il numero di punti e il grado del polinomio interpolante, appena ottenuta per due punti, è di carattere generale, sussistendo qualunque siano il numero dei punti assegnati e la scelta dei punti  $(x_i, y_i)$  il seguente:

**Teorema 3.1. [Unicità del polinomio interpolante di Lagrange]**

*Dati  $n$  nodi distinti  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$  ed  $n$  valori corrispondenti  $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ , il polinomio  $p$  di grado al più  $m$  ( $p \in \Pi_m$ ), tale che:*

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

*è unico se:*

$$m \leq n - 1.$$

**Dimostrazione** Supponiamo che esistano due polinomi distinti  $q$  e  $r$ , con  $q \in \Pi_{n-1}$  e  $r \in \Pi_{n-1}$  tali che:

$$q(x_i) = y_i, \quad r(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, n$$

dimostriamo che  $q = r$ .

Il polinomio differenza  $p(x) = q(x) - r(x) \in \Pi_{n-1}$  è soluzione del problema omogeneo.

$$p(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{3.3}$$

Dimostriamo quindi che se  $m = n - 1$  il problema omogeneo (3.3) ammette solo la soluzione identicamente nulla.

Osserviamo che la (3.3) equivale a richiedere che il polinomio  $p$  ammetta  $n$  zeri distinti:  $x_1, \dots, x_n$ . Per il *Teorema fondamentale dell'algebra* un polinomio di grado al più  $n - 1$  può ammettere al più  $n - 1$  zeri distinti, pertanto  $p \in \Pi_{n-1}$  deve essere necessariamente il polinomio identicamente nullo. ■

Esiste una seconda dimostrazione del Teorema 3.1, che tra l'altro fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio interpolante sia unico e, inoltre,

fornisce anche un metodo per costruire tale polinomio <sup>20</sup>:

**Dimostrazione 2** Posto:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \in \Pi_m,$$

dimostriamo che il polinomio  $p(x)$  tale che:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

esiste ed è unico se e solo se  $m = n - 1$ .

Osserviamo che quanto richiesto equivale a dimostrare che il sistema lineare:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{m-1} x_1^{m-1} + a_m x_1^m = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_{m-1} x_2^{m-1} + a_m x_2^m = y_2 \\ \vdots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{m-1} x_n^{m-1} + a_m x_n^m = y_n \end{cases} \quad (3.4)$$

di dimensione  $n \times (m + 1)$ , nelle incognite  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$  ammette un'unica soluzione.

Detta  $A$  la matrice dei coefficienti di questo sistema, indichiamo con  $r$  il rango di  $A$ , e supponiamo che la matrice  $A$  abbia rango massimo, cioè  $r = \min\{n, m + 1\}$ . Indicato con:

$$N(A) = \{x \in \mathfrak{R}^{m+1} : Ax = 0\}$$

il sottospazio nullo di  $A$ , e con

$$R(A) = \{y \in \mathfrak{R}^n : \exists x \in \mathfrak{R}^{m+1} : Ax = y\}$$

il codominio di  $A$  (o range di  $A$ ), ricordiamo che:

$$\dim(N(A)) + \dim(R(A)) = \dim(N(A)) + r = m + 1$$

pertanto la soluzione, se esiste, è unica se e solo se:

$$N(A) = \{0\}$$

e quindi se e solo se:

$$\dim(N(A)) = 0$$

cioè se e solo se  $r = m + 1$ . Da ciò deriva:

$$r = m + 1 \leq n \quad (3.5)$$

D'altra parte, comunque si scelga il vettore dei termini noti  $b \in \mathfrak{R}^n$  perchè sia sempre garantita l'esistenza della soluzione del sistema lineare (3.4), è necessario che  $b \in R(A)$ , con:

$$R(A) = \{y \in \mathfrak{R}^n : \exists x : Ax = y\}$$

Poiché:

$$\dim(R(A)) = r = m + 1 \quad (3.6)$$

---

<sup>20</sup>Come vedremo, però, questo metodo non è computazionalmente praticabile perché generalmente dà luogo ad un problema mal condizionato

si ha:

$$m + 1 \geq n \quad (3.7)$$

Dalla (3.5) e dalla (3.7) deriva:

$$m + 1 = n$$

e cioè la tesi.

Dunque, il sistema (3.4) è un sistema quadrato di dimensione  $n$ , che ha il rango uguale al numero di colonne (e quindi anche al numero di righe). Si può verificare che il determinante di questa matrice ha l'espressione seguente:

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = (x_n - x_{n-1}) \cdots (x_n - x_1)(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_{n-1} - x_1) \cdots (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

il cui valore è sicuramente non nullo se i *nodi*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono a due a due distinti tra loro. Pertanto il sistema (3.4) ammette un'unica soluzione.  $\square$

Si osservi che il Teorema 3.1 garantisce l'esistenza e l'unicità del polinomio interpolante  $p \in \Pi_m$ , con  $m = n - 1$ , cioè nello spazio dei polinomi di grado al più  $n - 1$ , se il numero di coefficienti da calcolare coincide col numero di condizioni di interpolazione. In particolare è possibile che il polinomio abbia grado inferiore al numero di punti meno uno. Ad esempio se si considerano tre punti allineati, il polinomio interpolante non ha grado 2 bensì  $1 < 2 = n - 1$ . In generale questo caso si presenta quando c'è una *ridondanza* tra i dati assegnati.

### 3.2.2 Esistenza ed unicità del polinomio interpolante di Hermite

Come per l'interpolazione di Lagrange, anche nel caso di interpolazione di Hermite, al fine di costruire il polinomio interpolante bisogna innanzitutto verificare sotto quali condizioni questo esiste ed è unico.

♣ **Esempio 3.10.** Dati tre punti del piano  $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ ,  $P_2 \equiv (x_2, y_2)$  e  $P_3 \equiv (x_3, y_3)$ , si vuole costruire la parabola  $y = y(x) = ax^2 + bx + c$ , passante per tali punti, cioè tale che:

$$\begin{cases} y(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ y(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ y(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

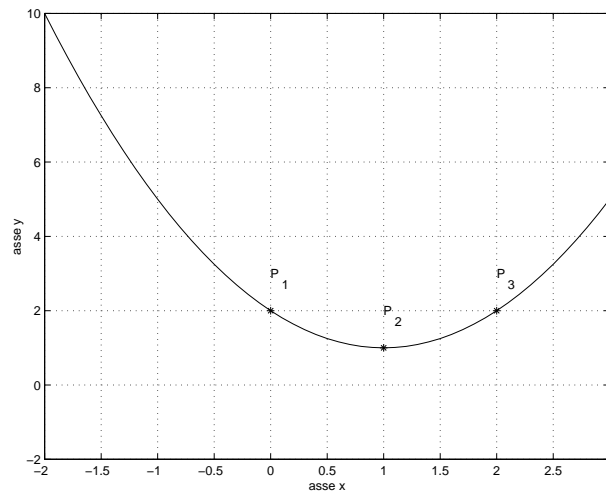


Figura 3.14: Parabola interpolante i punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$

Assegnati tre punti del piano (crf. Teorema 3.1), esiste un'unica parabola (del tipo  $y = y(x)$ , ovvero con asse di simmetria parrallelo all'asse delle ordinate) passante per tali punti. Se, ad esempio, i punti sono:

$$P_1 \equiv (0, 2), \quad P_2 \equiv (1, 1), \quad P_3 \equiv (2, 2),$$

il sistema diventa:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 2 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 1 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 2 \end{cases}$$

ed ammette la soluzione:

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2.$$

Quindi, l'unica parabola interpolante  $P_1, P_2$  e  $P_3$  è (Fig. 3.14):

$$y = y(x) = x^2 - 2x + 2.$$

Le condizioni (3.8) sono vincoli richiesti unicamente alla funzione  $y = y(x)$  e quindi il problema in esame è un problema di interpolazione di Lagrange. Supponendo invece che il punto  $P_3$  non sia assegnato, è possibile individuare comunque la stessa parabola  $y = x^2 - 2x + 2$ ? Da quanto detto è chiaro che l'appartenza dei due punti  $P_1$  e  $P_2$  alla parabola non è sufficiente, ma occorre aggiungere altre condizioni.

Osserviamo che conoscere la "pendenza",  $m$ , della curva in un punto significa conoscere la tangente alla parabola in quel punto avendo quest'ultima coefficiente angolare proprio  $m$ . In altre parole, abbiamo un'ulteriore informazione utile alla individuazione della parabola.

Se poi consideriamo come punto sulla parabola, il vertice, la pendenza nel vertice è zero, cioè la tangente alla parabola nel vertice ha coefficiente angolare nullo, cioè è parallela all'asse delle ascisse.

Come si osserva dalla Fig. 3.15, delle tre parabole per  $P_1$  e  $P_2$  solo quella indicata dalla linea tratteggiata (- - -) ha il vertice in  $P_2$ . Se siamo interessati a costruire la parabola che oltre a passare

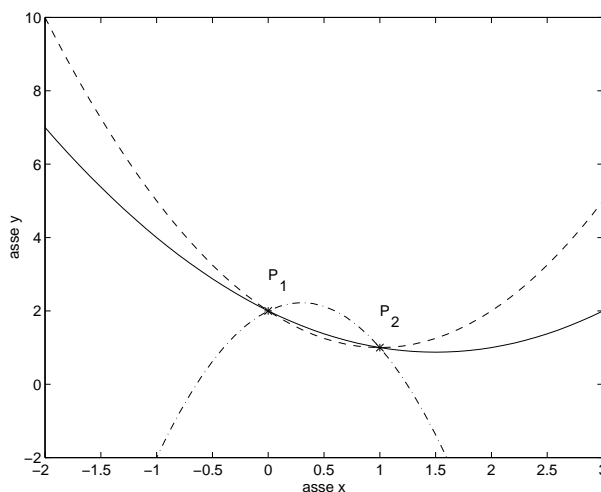


Figura 3.15: Parabole interpolanti i punti  $P_1$  e  $P_2$

per i due punti,  $P_1 = (0, 2)$  e  $P_2 = (1, 1)$ , ha il vertice in  $P_2$ , imponiamo anche questa condizione.

Come abbiamo notato, richiedere che la parabola abbia come vertice il punto  $P_2 \equiv (x_2, y_2)$  equivale a imporre che la pendenza della curva sia zero, cioè che derivata prima della funzione  $y = y(x)$  in  $x_2$  assuma valore nullo; le condizioni da imporre sono quindi:

$$\begin{cases} y(x_i) = y_i, i = 1, 2 \\ y'(x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ 2ax_2 + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

da cui deriva:

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2.$$

Le condizioni richieste coinvolgono non solo la funzione  $y = y(x)$ , ma anche la sua derivata prima. La parabola determinata nel primo e nel secondo caso in questo esempio è la stessa; ciò che è cambiato è il tipo di condizioni richieste per costruirla univocamente, e cioè l'appartenenza alla parabola dei tre punti (nel caso di interpolazione lagrangiana) o l'appartenenza alla parabola dei due punti unita alla condizione che uno dei due sia il vertice (nel caso di interpolazione di Hermite). ♣

In generale, se non imponiamo alcun vincolo sul grado del polinomio, possiamo costruire infiniti polinomi che soddisfano alle condizioni di interpolazione di Hermite. Sia nel problema di interpolazione polinomiale di Lagrange sia in quello di Hermite ciò che assicura l'unicità del polinomio interpolante è la richiesta che il **numero di condizioni di interpolazione coincida con il numero di incognite da calcolare cioè con il numero di coefficienti del polinomio interpolante**. Più precisamente, sussiste il seguente:

**Teorema 3.2.** [Unicità del polinomio interpolante di Hermite]

Assegnati  $n$  nodi distinti  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ ,  $n$  interi positivi  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , tali che:

$$\sum_{i=1}^n l_i = m$$

ed  $m$  valori  $(y_i^j)$  con  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 0, \dots, l_i - 1$ , il polinomio  $p \in \Pi_q$  tale che:

$$p^{(j)}(x_i) = y_i^j \quad i = 1, \dots, n; j = 0, \dots, l_i - 1$$

è unico se

$$q \leq m - 1$$

**Dimostrazione** Supponiamo che esistano due polinomi  $q$  e  $r$ , con  $q \in \Pi_{m-1}$  e  $r \in \Pi_{m-1}$  tali che:

$$q^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad r^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 0, \dots, l_i - 1$$

Dimostriamo che essi sono identicamente uguali. Osserviamo che il polinomio differenza  $p = q - r$ , di grado al più  $m - 1$ , è soluzione del problema omogeneo:

$$p^{(j)}(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, l_i - 1 \tag{3.9}$$

Dimostriamo quindi che il problema omogeneo (3.9) ammette solo la soluzione identicamente nulla. Osserviamo che la (3.9) equivale a richiedere che il polinomio  $p(x)$  ammette  $n$  zeri distinti:  $x_1, \dots, x_n$  ciascuno con molteplicità  $l_i$ . Poiché:

$$\sum_{i=1}^n l_i = m$$

il polinomio  $p$  ammette  $m$  zeri. Per il *Teorema fondamentale dell'algebra* un polinomio non nullo di grado al più  $m - 1$  può ammettere al più  $m - 1$  zeri, pertanto  $p \in \Pi_{m-1}$  deve essere necessariamente il polinomio identicamente nullo. ■

### 3.2.3 Algoritmi per la costruzione e valutazione del polinomio interpolante di Lagrange

Risolto il problema dell'esistenza e dell'unicità del polinomio interpolante di Lagrange, occorre affrontare quello di una sua efficiente costruzione e valutazione.

Come abbiamo visto negli esempi precedenti, in generale l'obiettivo per cui si risolve un problema di interpolazione è essenzialmente quello di:

1. **costruire** il polinomio interpolante, ovvero determinare i suoi coefficienti in una fissata base;

e/o

2. tracciare il grafico del polinomio interpolante, ossia **valutarlo** in piú punti.

Nel seguito prenderemo in esame i seguenti metodi:

1. il metodo dei coefficienti indeterminati,
2. la Formula di Lagrange,
3. la Formula di Newton.

### 3.2.4 Metodo dei coefficienti indeterminati

La dimostrazione del teorema di unicit  del polinomio interpolante di Lagrange fornisce un metodo costruttivo per la sua determinazione; come abbiamo potuto osservare infatti, le condizioni di interpolazione equivalgono alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari.

♣ **Esempio 3.11.** Si vuole costruire il polinomio  $p \in \Pi_3$  interpolante i punti:

$$(x_1, y_1) \equiv (1, 2), \quad (x_2, y_2) \equiv (1.5, 5), \quad (x_3, y_3) \equiv (2, 4), \quad (x_4, y_4) \equiv (2.5, -2),$$

cio  tale che:

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1 \\ p(x_2) = y_2 \\ p(x_3) = y_3 \\ p(x_4) = y_4 \end{cases} \quad (3.10)$$

Il polinomio  $p$    del tipo:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Per costruire  $p$  occorre pertanto determinare i suoi coefficienti  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . Dalle condizioni di interpolazione (3.10) segue che:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1.5 + a_2 \cdot 2.25 + a_3 \cdot 3.375 = 5 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 8 = 4 \\ a_0 + a_1 \cdot 2.5 + a_2 \cdot 6.25 + a_3 \cdot 15.625 = -2 \end{cases} \quad (3.11)$$

e, quindi, per determinare i coefficienti di  $p$  si pu  risolvere il sistema di equazioni lineari (3.11), che in forma matriciale si esprime come:

$$Va = y,$$



dove:

$$V = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1.5 & 2.25 & 3.375 \\ 1. & 2. & 4. & 8. \\ 1. & 2.5 & 6.25 & 15.625 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

♣

Più precisamente, un modo per costruire il polinomio  $p \in \Pi_{n-1}$  :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

che interpoli gli  $n$  punti assegnati  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ , cioè tale che:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, n \tag{3.12}$$

è risolvere il sistema di equazioni lineari che si ottiene dalle condizioni (3.12), e cioè il sistema:

$$\begin{cases} a_0x_1^0 + a_1x_1^1 + \dots + a_{n-2}x_1^{n-2} + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0x_2^0 + a_1x_2^1 + \dots + a_{n-2}x_2^{n-2} + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_1 \\ \vdots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \vdots \\ a_0x_n^0 + a_1x_n^1 + \dots + a_{n-2}x_n^{n-2} + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases} \tag{3.13}$$

in cui le incognite sono i coefficienti del polinomio interpolante. Una volta calcolati i coefficienti, il polinomio può essere valutato per qualsiasi valore di  $x$  utilizzando l'**algoritmo di Horner**.

Questo metodo è noto come **metodo dei coefficienti indeterminati** <sup>21</sup>.

---

<sup>21</sup>Questo metodo non è praticabile da un punto di vista computazionale perché conduce ad un problema mal condizionato

```

procedure Horner(in:  $n, a, \tilde{x}$  ; out:  $p$ )

  /# SCOPO: valutazione di un polinomio.

  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  /# PARAMETRI DI INPUT:
  var:  $n$       : intero      { numero dei punti }
  var:  $\tilde{x}$      : reale       { punto in cui si richiede }
  var:  $a(n)$   : array di reali { la valutazione del polinomio }
  var:  $a(n)$   : array di reali { coefficienti del polinomio }
  var:  $a(n)$   : array di reali { interpolante }

  /# PARAMETRI DI OUTPUT:
  var:  $p$       : reale       { valore del polinomio in  $\tilde{x}$  }

  /# VARIABILI LOCALI:
  var:  $i$       : intero

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
   $p := a(n)$ ;
  for  $i = n - 1, 1$  step -1 do
     $p := p \cdot \tilde{x} + a(i)$ ;
  endfor
end Horner

```

Procedura 3.1: algoritmo di Horner per la valutazione di un polinomio

### 3.2.5 Formula di Lagrange

♣ **Esempio 3.12.** Consideriamo il seguente problema di interpolazione. Siano  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  le coordinate di due punti del piano.

Costruire la retta  $y = p(x)$  interpolante i due punti  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  cioè tale che:

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1 \\ p(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Poniamo:

$$p(x) = y_1 \cdot l_1(x) + y_2 \cdot l_2(x)$$

con  $l_1$  e  $l_2$  polinomi di primo grado da determinare.

Per calcolare  $l_1$  e  $l_2$ , osserviamo che:

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1 & \longrightarrow & y_1 l_1(x_1) + y_2 l_2(x_1) = y_1 \\ p(x_2) = y_2 & \longrightarrow & y_1 l_1(x_2) + y_2 l_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Queste condizioni sono sicuramente verificate se richiediamo che i due polinomi  $l_1$  e  $l_2$  sono tali che:

$$\begin{cases} l_1(x_1) = 1, & l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_1) = 0, & l_2(x_2) = 1 \end{cases}$$

Dovendo essere  $l_1$  e  $l_2$  polinomi di primo grado, si ha:

$$\begin{cases} l_1(x_2) = 0 & \longrightarrow & l_1(x) = a(x - x_2) \\ l_2(x_1) = 0 & \longrightarrow & l_2(x) = b(x - x_1) \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} l_1(x_1) = 1 = a(x_1 - x_2) & \longrightarrow & a = \frac{1}{(x_1 - x_2)} \\ l_2(x_2) = 1 = b(x_2 - x_1) & \longrightarrow & b = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \end{cases}$$

Cioè, l'equazione della retta per i due punti assegnati è del tipo:

$$y = p(x) = y_1 \cdot l_1(x) + y_2 \cdot l_2(x) = y_1 \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \quad (3.14)$$

La (3.14) è detta **Formula di Lagrange** per il polinomio  $p(x)$  interpolante i punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . I polinomi:

$$l_1(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

sono detti **polinomi fondamentali di Lagrange**. ♣

L'idea di base della Formula di Lagrange è esprimere il polinomio interpolante di Lagrange  $p \in \Pi_{n-1}$  nella forma:

$$p(x) = y_1 \cdot l_1(x) + \cdots + y_n \cdot l_n(x) \quad (3.15)$$

con ciascun  $l_i$  polinomio di grado  $n-1$ <sup>22</sup>. Il problema consiste nel determinare i polinomi  $l_i$ .

Osserviamo che, dovendo essere:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 1, n$$

segue che i polinomi  $l_i$  devono essere tali che:

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (3.16)$$

Dalla seconda delle (3.16) segue che ciascun polinomio  $l_i$  ammette  $n-1$  zeri, e cioè i punti  $x_k$ , con  $k = 1, n$  e  $k \neq i$ . Pertanto ciascun polinomio  $l_i$  è:

$$l_i(x) = a_i \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

Il coefficiente  $a_i$  viene determinato utilizzando la prima delle (3.16) e cioè:

$$l_i(x_i) = 1$$

da cui:

$$a_i = \frac{1}{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

In conclusione, i **polinomi fondamentali di Lagrange**  $l_i$  di grado  $n-1$  sono:

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

e dunque la **Formula di Lagrange** per  $p \in \Pi_{n-1}$  diventa:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

<sup>22</sup>Piú in generale, si può richiedere che la funzione interpolante,  $f \in \mathcal{X}$ , sia esprimibile nella forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i b_i(x)$$

con  $\{b_i\}$  funzioni opportunamente fissate nello spazio  $\mathcal{X}$ . Il problema consiste quindi nel calcolare i coefficienti  $a_i$  di tale rappresentazione. Ricordiamo che una formulazione di questo tipo per la funzione interpolante è anche detta **modello lineare**.

La complessità di tempo della formula di Lagrange si calcola contando, dapprima, il numero di operazioni richieste dalla costruzione di ciascuno degli  $n$  polinomi fondamentali di Lagrange, ovvero

$$l_i(x) = \underbrace{\prod_{\substack{j=1, j \neq i \\ (n-1) \text{ fattori}}}^n \underbrace{\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}_{2A+1M}}_{(n-2)M} \Rightarrow (n-1)(2A+1M) + (n-2)M = 4n - 5 \text{ flop}$$

per  $i = 1, \dots, n$ . Si aggiunge, poi, per ciascun polinomio, l'operazione floating point relativa al prodotto di  $l_i(x)$  con  $y_i$  e si somma il tutto  $n$  volte,

$$p(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n}_{n \text{ addendi}} \underbrace{y_i \cdot l_i(x)}_{2(n-1)A+(2n-3)M+M} \Rightarrow n[2(n-1)A + (2n-2)M] = n(4n-4) \text{ flop}$$

Concludendo, la complessità asintotica di tempo richiesta dall'algoritmo per la costruzione del polinomio interpolante espresso nella formula di Lagrange, è

$$T(n) = O(n^2) \text{ flop}$$

Per la valutazione del polinomio interpolante, costruito con l'algoritmo descritto, occorre valutare, per un fissato valore di  $x$ , ciascun polinomio fondamentale di Lagrange e quindi al variare di  $x$  occorre effettuare di nuovo tutte le valutazioni<sup>23</sup>, con una complessità di tempo asintotica di

$$T(n) = O(n^2) \text{ flop.}$$

### 3.2.6 Formula di Newton

♣ **Esempio 3.13.** Sia  $p$  il polinomio di grado zero interpolante il punto  $P_1 = (x_1, y_1) \equiv (1, 2)$ ; dunque:

$$y = p(x) \equiv a_0 = y_1 = 2 \tag{3.18}$$

è l'equazione della retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto  $P_1$ . A partire dall'equazione di questa retta, si vuole determinare quella della retta passante oltre che per  $P_1$  anche per un altro punto  $P_2 \equiv (1.5, 5)$ .

---

<sup>23</sup>Come vedremo, esistono algoritmi più efficienti per la valutazione in un punto della formula di Lagrange. Tali algoritmi si basano su un opportuno cambio di base nella rappresentazione del polinomio interpolante.

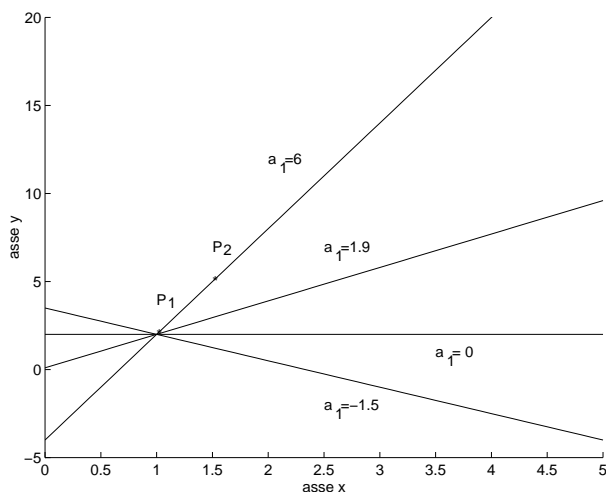


Figura 3.16: Fascio di rette per il punto  $P_1$  ottenuto al variare del coefficiente  $a_1 = -1.5, 0, 1.9, 6$

Considerata la generica retta per il punto  $P_1$ , di equazione<sup>24</sup>:

$$y(x) = 2 + a_1(x - 1), \quad (3.20)$$

calcoliamo il coefficiente  $a_1$  imponendo l'appartenenza del punto  $P_2$ . Come si osserva dal grafico in Fig. 3.16, al variare del coefficiente  $a_1$  si ottiene una (ed una sola) delle infinite rette passanti per il punto  $P_1$ , di equazione (3.20). Imponendo l'appartenenza al *fascio di rette* anche del punto  $P_2$ , si determina univocamente quella passante per entrambi i punti  $P_1$  e  $P_2$ , e, quindi, il valore del corrispondente coefficiente  $a_1$ .

Dunque:

$$5 = y(1.5) = 2 + a_1(1.5 - 1) \implies a_1 = \frac{5 - 2}{1.5 - 1} = \frac{3}{0.5} = 6. \quad (3.21)$$

La retta interpolante i punti  $P_1$  e  $P_2$  ha, quindi, equazione:

$$y = q(x) = p(x) + a_1(x - 1) = 2 + 6(x - 1). \quad (3.22)$$

<sup>24</sup>Considerata l'equazione della generica retta del piano:

$$y = ax + b, \quad (3.19)$$

imponendo che questa passi per il punto  $(x_1, y_1)$  si ha:

$$y_1 = y(x_1) = ax_1 + b \implies b = y_1 - ax_1,$$

e, quindi, sostituendo nella (3.19):

$$y(x) = ax + y_1 - ax_1 = y_1 + a(x - x_1)$$

e cioè si ha l'equazione del **fascio di rette** di centro il punto  $(x_1, y_1)$ .

Analogamente, considerando un ulteriore punto  $P_3 \equiv (2, 4)$ , per determinare l'equazione della parabola passante per i tre punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$  basta considerare l'equazione della generica parabola<sup>25</sup> per i punti  $P_1$  e  $P_2$ :

$$y = q(x) + a_2(x - 1)(x - 1.5)$$

e calcolare il coefficiente  $a_2$  imponendo l'appartenenza a tale parabola del punto  $P_3$ . Quindi:

$$4 = y(2) = q(2) + a_2(2 - 1)(2 - 1.5) = 2 + 6 \cdot 1 + a_2 \cdot (2 - 1)(2 - 1.5)$$

da cui:

$$a_2 = \frac{4 - 2 - 6}{0.5} = -8. \quad (3.25)$$

La parabola interpolante i punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , allora, ha equazione:

$$y = r(x) = q(x) + a_2(x - 1)(x - 1.5) = 2 + 6(x - 1) - 8(x - 1)(x - 1.5). \quad (3.26)$$

Aggiungendo il punto  $P_4 \equiv (2.5, -2)$ , per costruire il polinomio di terzo grado interpolante i punti  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  si consideri l'equazione della curva di terzo grado (cubica) per i punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , che, analogamente a quanto dimostrato per la retta e la parabola, è del tipo:

$$y = s(x) = r(x) + a_3(x - 1)(x - 1.5)(x - 2). \quad (3.27)$$

Imponendo che  $s$  interpoli anche il punto  $P_4$ , si ha:

$$\begin{aligned} -2 = s(2.5) &= 2 + 6(2.5 - 1) - 8(2.5 - 1)(2.5 - 1.5) + a_3(2.5 - 1)(2.5 - 1.5)(2.5 - 2) = \\ &= 2 + 6 \cdot 1.5 - 8 \cdot 1.5 \cdot 1 + a_3 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 0.5 = -1 + 0.75 \cdot a_3 \end{aligned}$$

---

<sup>25</sup>Considerata l'equazione della parabola nel piano, del tipo:

$$y = y(x) = ax^2 + bx + c, \quad (3.23)$$

imponendo che a questa appartengano i punti di coordinate  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , si ha:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases} \quad (3.24)$$

Ricavando dalle (3.24) i coefficienti  $b$  e  $c$  in funzione del coefficiente  $a$ , si ha:

$$\begin{cases} b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - a(x_2 + x_1) \\ c = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + ax_1x_2 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni ottenute di  $b$  e  $c$  nella (3.23), segue che:

$$y(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

cioè:

$$y(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + q(x),$$

con  $q(x)$  retta interpolante  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .

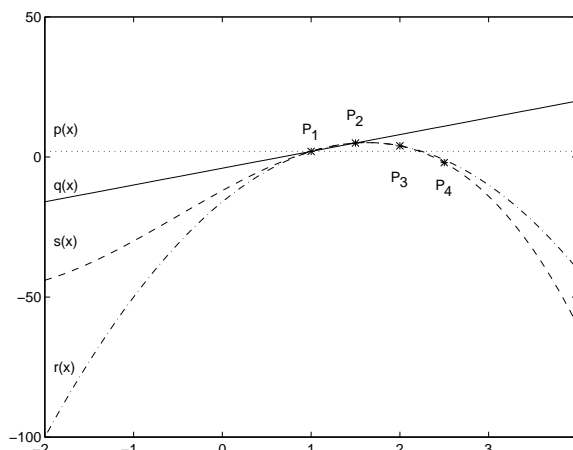


Figura 3.17: Polinomi interpolanti di grado zero, uno, due e tre relativi rispettivamente ai punti  $P_1$ ,  $P_1$  e  $P_2$ ,  $P_1, P_2$  e  $P_3$ ,  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$

da cui si ricava il valore del coefficiente  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{-1}{0.75} = -1.33\hat{3}.$$

Il polinomio di terzo grado interpolante i punti  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  ha, dunque, equazione:

$$\begin{aligned} y = s(x) &= r(x) + a_3(x-1)(x-1.5)(x-2) = \\ &= 2 + 6(x-1) - 8(x-1)(x-1.5) + 1.33\hat{3} \cdot (x-1)(x-1.5)(x-2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

La (3.28) prende il nome di **Formula di Newton** per il polinomio interpolante. Tenendo conto delle (3.18) (3.22), (3.26), (3.27) notiamo che il polinomio di terzo grado  $s$  interpolante i quattro punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , è stato ottenuto a partire dal polinomio di secondo grado  $r$  interpolante i tre punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$  che a sua volta è stato ottenuto a partire dal polinomio di primo grado  $q$  interpolante i due punti  $P_1$  e  $P_2$  costruito a partire dal polinomio di grado zero  $p$  interpolante il punto  $P_1$ . Una rappresentazione grafica dei polinomi così costruiti è mostrata in Figura 3.17. ♣

In generale, dati i punti di coordinate  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , l'idea della formula di Newton è quella di **costruire il polinomio interpolante gli  $n$  punti a partire dal polinomio interpolante i primi  $n-1$  punti**. Naturalmente, tale procedimento va applicato in modo ricorrente, perchè il polinomio interpolante i primi  $n-1$  punti viene a sua volta costruito a partire dal polinomio interpolante i primi  $n-2$  punti, e così proseguendo.

Il procedimento costruttivo della formula di Newton si può schematizzare come segue:

- si costruisce il polinomio  $p$  di grado zero interpolante il punto  $(x_1, y_1)$ :  
 $y = p(x) \equiv y_1 = a_0.$



- si costruisce il polinomio  $q \in \Pi_1$  interpolante i punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ :  $q(x)$  è del tipo:

$$y = q(x) = p(x) + a_1(x - x_1) = y_1 + a_1(x - x_1)$$

Il coefficiente  $a_1$  viene determinato imponendo la condizione di interpolazione nel punto  $(x_2, y_2)$ :

$$y_2 = q(x_2) = y_1 + a_1(x_2 - x_1) \rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- si costruisce il polinomio  $r \in \Pi_2$  interpolante i punti  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ : tale polinomio è del tipo:

$$y = r(x) = p(x) + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Il coefficiente  $a_2$  viene determinato imponendo la condizione di interpolazione nel punto  $(x_3, y_3)$  :

$$y_3 = r(x_3) = y_1 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_2 &= \frac{y_3 - y_1 - a_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{y_3 - y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_2 + x_2 - x_1)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} = \\ &= \frac{y_3 - y_1 - [(y_2 - y_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_2)]}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_2} - a_1}{x_3 - x_1} = \\ &= \frac{\frac{y_3 - y_1 - y_2 + y_1}{x_3 - x_2} - a_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - a_1}{x_3 - x_1} \end{aligned}$$

- dati  $k + 1$  nodi:  $x_1, \dots, x_{k+1}$ , si costruisce il polinomio interpolante  $p \in \Pi_k$  a partire da  $q \in \Pi_{k-1}$ , polinomio interpolante i primi  $k$  nodi  $x_1, \dots, x_k$  secondo una formula del tipo:

$$p(x) = q(x) + r(x)$$

con  $r \in \Pi_k$ . Il polinomio  $r$  si determina imponendo le condizioni di interpolazione:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, k + 1$$

In particolare:

- Da  $p(x_i) = q(x_i) + r(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , segue che  $r(x_i) = 0$ , per  $i = 1, \dots, k$  cioè:

$$r(x) = a_k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$$

con  $a_k$  incognita.

- Il coefficiente  $a_k$  viene calcolato imponendo la condizione di interpolazione sul nodo  $k + 1$ -mo:

$$p(x_{k+1}) = q(x_{k+1}) + a_k(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_k) = y_{k+1}$$

da cui si ricava  $a_k$ .

- Quindi:

$$p(x) = q(x) + a_k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$$

- in generale, dati  $n$  nodi, il polinomio interpolante  $p \in \Pi_{n-1}$  è del tipo:

$$p(x) = q(x) + a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

dove  $q \in \Pi_{n-2}$  è il polinomio interpolante i primi  $n - 1$  nodi.

Si ottiene, quindi, l'espressione seguente:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + \dots + a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}), \quad (3.29)$$

nota come **Formula di Newton** per il polinomio interpolante di Lagrange.

### 3.2.7 Formula di Newton e differenze divise

Per costruire i coefficienti del polinomio interpolante espresso nella formula di Newton si utilizza il concetto di **differenza divisa**.

♣ **Esempio 3.14.** Considerati i punti:

$$P_1(x_1 = 1, y_1 = 2), P_2(x_2 = 1.5, y_2 = 5), P_3(x_3 = 2, y_3 = 4)$$

dalla costruzione del polinomio interpolante espresso nella formula di Newton, osserviamo che il coefficiente  $a_0$  di tale polinomio coincide con l'ordinata del primo punto di interpolazione:

$$a_0 = 2 = y_1$$

Per il coefficiente  $a_1$  si ha che:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{1.5 - 1} = 6$$

e,

$$a_2 = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - a_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{4 - 5}{2 - 1.5} - 6}{2 - 1} = \frac{-2 - 6}{1} = -8$$

Posto:

$$y[x_1] = y_1, \quad y[x_2] = y_2, \quad y[x_3] = y_3,$$

(differenze divise di ordine zero), si ha quindi

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1 = y[x_1] \\ a_1 &= \frac{y[x_2] - y[x_1]}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Posto:

$$y_{12} = y[x_1, x_2] = \frac{y[x_2] - y[x_1]}{x_2 - x_1}$$

e

$$y_{23} = y[x_2, x_3] = \frac{y[x_3] - y[x_2]}{x_3 - x_2}$$

(differenze divise di ordine uno), si ha<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1 = y[x_1] \\ a_1 &= y_{12} = y[x_1, x_2] \\ a_2 &= \frac{y[x_2, x_3] - y[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

In presenza di 4 nodi  $x_1, x_2, x_3, x_4$  si considerano anche:

$$\begin{aligned} y[x_4] &= y_4 \\ y_{34} &= y[x_3, x_4] = \frac{y[x_4] - y[x_3]}{x_4 - x_3} \end{aligned}$$

Se si pone:

$$y_{123} = y[x_1, x_2, x_3] = \frac{y[x_2, x_3] - y[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

e

$$y_{234} = y[x_2, x_3, x_4] = \frac{y[x_3, x_4] - y[x_2, x_3]}{x_4 - x_2},$$

(differenza divise di ordine due), si ha:

<sup>26</sup>Nel seguito applicheremo due proprietà delle differenze divise che riguardano l'invarianza del risultato rispetto a qualsiasi permutazione dei nodi. Più precisamente, useremo il fatto che

$$y[x_i, x_j] = y[x_j, x_i]$$

e che, più in generale con tre nodi  $y[x_i, x_j, x_k]$  non cambia al variare della disposizione dei nodi. Questa proprietà si può dimostrare vera per le differenze divise di qualsiasi ordine.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= y_1 = y[x_1] \\
 a_1 &= y_{12} = y[x_1, x_2] \\
 a_2 &= y_{123} = y[x_1, x_2, x_3] \\
 a_3 &= \frac{y[x_2, x_3, x_4] - y[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Piú in generale, con  $n$  nodi si ha:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= y[x_1], \\
 a_1 &= y[x_1, x_2], \\
 a_2 &= y[x_1, x_2, x_3] \\
 a_3 &= y[x_1, x_2, x_3, x_4] \\
 &\vdots \\
 a_{n-1} &= y[x_1, x_2, \dots, x_n]
 \end{aligned}$$

♣

Considerato il polinomio interpolante di Lagrange, espresso nella formula di Newton (3.29), e indicato con

$$a_k = y[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}]$$

il  $k$ -mo coefficiente  $a_k$ , sottolineando la dipendenza esclusiva dai punti di interpolazione, vediamo come tali quantità possono essere determinate. A tal fine, riscriviamo il polinomio interpolante nella forma:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= y[x_1] + y[x_1, x_2](x - x_1) + \dots + \\
 &\quad + y[x_1, \dots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

e, utilizzando le condizioni di interpolazione introduciamo le **differenze divise**. Poiché:

$$p(x_1) = y_1 \longrightarrow y[x_1] = y_1$$

si definiscono le **differenze divise di ordine zero** nel modo seguente:

$$y[x_i] = y_i, \quad \forall i = 1, n$$

Da:

$$p(x_2) = y_2 \longrightarrow y[x_1] + y[x_1, x_2](x_2 - x_1) = y_2$$

si ricava:

$$y[x_1, x_2] = \frac{y[x_2] - y[x_1]}{x_2 - x_1}$$

da cui si definiscono le **differenze divise di ordine uno**:

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y[x_{i+1}] - y[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

In generale, la **differenza divisa di ordine  $n$** , si definisce per ricorrenza:

**Definizione 3.7. (Differenza divisa di ordine  $n$ )**

$$\begin{aligned} y[x_i] &= y_i \\ y[x_1, \dots, x_{n+1}] &= \frac{y[x_2, \dots, x_{n+1}] - y[x_1, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x_1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dimostriamo ora che tutti i coefficienti del polinomio interpolante di Lagrange nella (3.29) sono esprimibili in termini di differenze divise relative ai nodi di interpolazione <sup>27</sup>

<sup>27</sup>In generale sussiste la seguente:

**Definizione 3.8. (Operatore alle differenze in avanti)**

Data la successione  $\{y_i\}_{i=1,2,\dots}$ , l'operatore:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

è detto **operatore alle differenze in avanti  $e$** , più in generale l'operatore:

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) \quad n \geq 1 \quad (\Delta^0 \equiv 1)$$

è detto **operatore alle differenze in avanti di ordine  $n$** .

Si dimostra che:

**Teorema 3.3.** *Nell'ipotesi che i nodi  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  siano equidistanziati, posto*

$$h = x_i - x_{i-1}, \quad \forall x_i,$$

la differenza divisa  $y[x_1, \dots, x_n]$  relativa agli  $n$  valori  $x_1, \dots, x_n$ , si esprime come:

$$y[x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{(n-1)!h^{n-1}} \Delta^{n-1} y_1$$

**Dimostrazione** La dimostrazione procede per induzione sul numero di nodi  $n$ . Per  $n = 1$ , discende dalla definizione di differenza divisa di ordine zero. Assumiamo che sia vera per  $k$ , dimostriamo che è vera per  $k + 1$ .

Dalla definizione di differenza divisa di ordine  $k + 1$ , segue:

$$y[x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{y[x_2, \dots, x_{k+1}] - y[x_1, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_1}$$

**Teorema 3.4.** Sia  $p \in \Pi_{n-1}$  il polinomio interpolante di Lagrange relativo ai punti  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ . Se  $a_k$  è il  $k$ -mo coefficiente di  $p$  espresso nella formula di Newton, allora  $a_k$  è la differenza divisa di ordine  $k$  relativa ai nodi  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ , cioè:

$$a_k = y[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}]$$

cioè:

$$p(x) = y[x_1] + y[x_1, x_2](x - x_1) + \dots + \\ + y[x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

**Dimostrazione** Si procede per induzione su  $k$ .  
Per  $k = 0$ , la tesi è banalmente vera in quanto

$$a_0 = p(x) = y_1 = y[x_1]$$

Supponiamo la tesi vera per  $k = j - 1$  e dimostriamo che è vera per  $k = j$ .  
Siano

- $p \in \Pi_{j-1}$  il polinomio interpolante i nodi  $x_1, x_2, \dots, x_j$ ;
- $q \in \Pi_{j-1}$  il polinomio interpolante i nodi  $x_2, \dots, x_{j+1}$ ;

Per ipotesi di induzione:

- $p(x) = r(x) + y[x_1, x_2, \dots, x_j](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{j-1})$
- $q(x) = s(x) + y[x_2, \dots, x_{j+1}](x - x_2) \dots (x - x_j)$ ;

Applicando l'ipotesi di induzione alle quantità al secondo membro si ha:

$$y[x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{1}{k \cdot h} \left[ \frac{1}{(k-1)! h^{k-1}} \Delta^{k-1} y_2 - \frac{1}{(k-1)! h^{k-1}} \Delta^{k-1} y_1 \right] = \\ = \frac{1}{k! h^k} \cdot \Delta^{k-1} (y_2 - y_1) = \frac{1}{k! h^k} \cdot \Delta^{k-1} (\Delta y_1) = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k y_1 \quad (3.34)$$

Analogamente, si definisce l'**operatore alle differenze all'indietro** nel modo seguente:

**Definizione 3.9. (Operatore alle differenze all'indietro)**

Data la successione  $\{y_i\}_{i=1,2,\dots}$ , l'operatore:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

è detto **operatore alle differenze all'indietro** e, più in generale l'operatore:

$$\nabla^n y_i = \nabla(\nabla^{n-1} y_i) \quad n \geq 1 \quad (\nabla^0 \equiv 1)$$

è detto **operatore alle differenze all'indietro di ordine  $n$**

Consideriamo il polinomio

$$P(x) = \frac{(x - x_1)q(x) - (x - x_{j+1})p(x)}{(x_{j+1} - x_1)} \tag{3.35}$$

Poiché  $P(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, j + 1$ ,  $P(x)$  è il polinomio interpolante i nodi  $x_1, x_2, \dots, x_{j+1}$ , e quindi utilizzando la formula di Newton:

$$P(x) = p(x) + a_j(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_j), \quad \forall x \tag{3.36}$$

Per l'unicità del polinomio interpolante le espressioni (3.35) e (3.36) devono necessariamente individuare lo stesso polinomio e quindi, per il principio di identità dei polinomi, coincidono tutti i coefficienti omologhi. In particolare, coincidono i coefficienti di grado massimo:

$$a_k = \frac{y[x_2, x_3, \dots, x_{j+1}] - y[x_1, x_2, \dots, x_j]}{x_{j+1} - x_1}$$

da cui:

$$a_k = y[x_1, x_2, \dots, x_{j+1}]$$

■

### 3.2.8 Un algoritmo per la formula di Newton: aspetti implementativi

Per costruire la formula di Newton (3.29) occorre calcolare innanzitutto le differenze divise  $y[x_1], y[x_1, x_2], \dots, y[x_1, \dots, x_n]$ .

Consideriamo la tabella seguente, dove con  $k$  abbiamo indicato l'ordine della generica differenza divisa:

$x_i$	$y_i$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$\dots$	$k = n - 1$
$x_1$	$y_1$					
$x_2$	$y_2$	$y[x_1, x_2]$				
$x_3$	$y_3$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3]$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$y[x_1, x_2, \dots, x_n]$
$x_{n-2}$	$y_{n-2}$					
$x_{n-1}$	$y_{n-1}$	$y[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$y[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
$x_n$	$y_n$	$y[x_{n-1}, x_n]$				

Tavola 1: Le differenze divise

Osservando la tavola, si nota che le differenze divise sono disposte per colonna in modo che ogni elemento di ciascuna colonna può essere calcolato, utilizzando la definizione (3.33), a partire dai due elementi ad esso adiacenti nella colonna precedente; ad esempio:

- la differenza divisa del primo ordine  $y[x_1, x_2] = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$  può essere calcolata utilizzando  $y_1$  e  $y_2$  cioè a partire dalle differenze divise di ordine zero relative rispettivamente ai nodi  $x_1$  e  $x_2$ ;
- la differenza divisa del secondo ordine  $y[x_1, x_2, x_3]$ , viene calcolata a partire da  $y[x_1, x_2]$  e  $y[x_2, x_3]$  cioè a partire dalle differenze divise di ordine uno relative ai nodi  $x_1, x_2, x_3$ ;
- così proseguendo fino a  $y[x_1, \dots, x_n]$ .

I coefficienti del polinomio interpolante espresso nella formula di Newton si trovano lungo la diagonale superiore.

L'algoritmo per il calcolo delle differenze divise è dunque costituito da un ciclo di  $n - 1$  passi in ciascuno dei quali si costruiscono le differenze divise di un prefissato ordine e cioè dell'ordine uguale al passo corrente.

In altre parole, calcoliamo le differenze divise, *procedendo per colonne*, da sinistra verso destra, nel modo seguente:

- passo 1: calcolo della I colonna delle differenze divise di ordine 1,
- passo 2: calcolo della II colonna delle differenze divise di ordine 2,
- passo  $n - 1$ : calcolo dell'unico elemento della  $(n - 1)$ -ma colonna delle differenze divise di ordine  $n - 1$ .

Una prima versione dell'algoritmo è quella illustrata nel riquadro seguente.



```

procedure diffdivise(in:  $n, x, y$  ; out:  $y$ )

  /* SCOPO: calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante
    di Lagrange, espresso nella formula di Newton. */

  /* SPECIFICHE PARAMETRI: */
  /* PARAMETRI DI INPUT: */
  var:  $n$       : intero      { numero dei punti }
  var:  $x(n)$    : array di reali { nodi di interpolazione }
  var:  $y(n)$    : array di reali { ordinate corrispondenti }
                                     { ai nodi di interpolazione }

  /* PARAMETRI DI OUTPUT: */
  var:  $y(n)$    : array di reali { coefficienti del polinomio }
                                     { interpolante }

  /* VARIABILI LOCALI: */
  var:  $k$       : intero

  /* INIZIO ISTRUZIONI: */
  { ciclo sul numero di passi }
  for  $k = 1, n - 1$  do
    { calcolo della colonna  $k$ -ma }
  endfor
end diffdivise

```

Procedura 3.2: Algoritmo per il calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante espresso nella formula di Newton

Ad ogni passo viene anche calcolato uno dei coefficienti del polinomio interpolante, che quindi dobbiamo opportunamente memorizzare.

Volendo utilizzare il vettore  $(y_1, \dots, y_n)$ , che inizialmente contiene le ordinate corrispondenti ai nodi di interpolazione, si pone il problema di stabilire in quale ordine le differenze divise di ciascuna colonna debbano essere calcolate.

Infatti, osserviamo che al primo passo, ad esempio, cioè nel calcolo della prima colonna:

$$y[x_1, x_2], \dots, y[x_{n-1}, x_n]$$

dopo aver calcolato  $y[x_1, x_2]$ , che rappresenta il coefficiente  $a_1$  del polinomio, questo non può essere memorizzato al posto di  $y_1$  perchè  $y_1$  è il coefficiente  $a_0$ , e quindi non può

essere perso, né tantomeno al posto di  $y_2$  perché questo valore serve anche per il calcolo dell'elemento successivo  $y[x_2, x_3]$ .

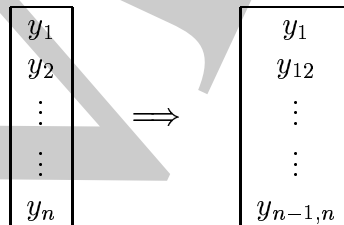
Una strategia migliore può essere quella di calcolare gli elementi di una prefissata colonna procedendo, in ciascuna colonna, dal basso verso l'alto e cioè:

- primo passo: calcolare nell'ordine  $y[x_{n-1}, x_n] \dots y[x_1, x_2]$ ;
- secondo passo: calcolare nell'ordine  $y[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \dots y[x_1, x_2, x_3]$ ;
- così proseguendo fino a  $y[x_1, \dots, x_n]$ .

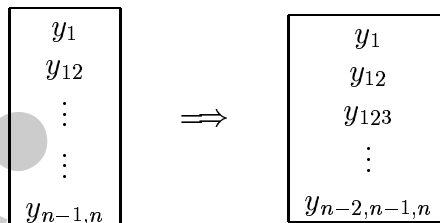
In questo modo si può memorizzare l'elemento di volta in volta calcolato al posto dell'elemento che tra i due che hanno contribuito al calcolo, si trova più in basso nella colonna precedente, in quanto quest'ultimo non interverrà più nel calcolo delle successive differenze divise. Ad esempio al primo passo il valore di  $y[x_{n-1}, x_n]$  ottenuto utilizzando i valori di  $y_{n-1}$  e di  $y_n$ , si memorizza al posto di  $y_n$ , quello di  $y[x_{n-2}, x_{n-1}]$  calcolato a partire da  $y_{n-2}$  e di  $y_{n-1}$ , si memorizza al posto di  $y_{n-1}$ , ed infine il valore di  $y[x_1, x_2]$  al posto di  $y_2$ ; analogo procedimento viene ripetuto per ciascun passo.

Riassumendo, abbiamo:

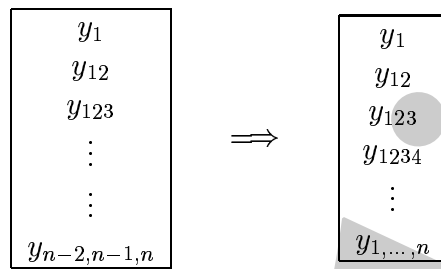
- **passo 1:** si calcolano le  $n - 1$  differenze divise  $y_{12}, y_{23}, \dots, y_{n-1,n}$  e si memorizzano al posto degli ultimi  $n - 1$  elementi dell'array  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .



- **passo 2:** si calcolano  $n - 2$  differenze divise  $y_{123}, y_{234}, \dots, y_{n-2,n-1,n}$  e si memorizzano negli ultimi  $n - 2$  elementi di  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .



- **passo n-1:** si calcola un solo elemento, e cioè  $y_{1,2,\dots,n}$  l'unica differenza divisa di ordine  $n - 1$ , e si memorizza al posto dell'ultima componente del vettore  $(y_1, \dots, y_n)$ .



Una versione in Pascal - like dell'algorithmo illustrato precedentemente è la seguente:

A.MURRI

```

procedure diffdivise(in:  $n, x, y$  ; out:  $y$ )

  /* SCOPO: calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante
    di Lagrange, espresso nella formula di Newton. */

  /* SPECIFICHE PARAMETRI: */
  /* PARAMETRI DI INPUT: */
  var:  $n$       : intero          { numero dei punti }
  var:  $x(n)$    : array di reali  { nodi di interpolazione }
  var:  $y(n)$    : array di reali  { ordinate corrispondenti }
                                     { ai nodi di interpolazione }

  /* PARAMETRI DI OUTPUT: */
  var:  $y(n)$    : array di reali  { coefficienti del polinomio }
                                     { interpolante }

  /* VARIABILI LOCALI: */
  var:  $i, k$     : interi

  /* INIZIO ISTRUZIONI: */
  { ciclo sull'ordine delle differenze divisa }
  for  $k = 1, n - 1$  do
    { calcolo delle differenze divise di ordine  $k$  }
    for  $i = n, k + 1$ , step  $-1$  do
      { calcolo elemento  $i$ -mo }
    endfor
  endfor
end diffdivise

```

Procedura 3.3: Algoritmo per il calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante espresso nella formula di Newton

La versione finale è, dunque, la seguente:

```

procedure diffdivise(in:n, x, y ; out: y)

  /* SCOPO: calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante
    di Lagrange, espresso nella formula di Newton. */

  /* SPECIFICHE PARAMETRI: */
  /* PARAMETRI DI INPUT: */
  var: n      : intero      { numero dei punti }
  var: x(n)  : array di reali { nodi di interpolazione }
  var: y(n)  : array di reali { ordinate corrispondenti }
                                { ai nodi di interpolazione }

  /* PARAMETRI DI OUTPUT: */
  var: y(n)  : array di reali { coefficienti del polinomio }
                                { interpolante }

  /* VARIABILI LOCALI: */
  var: k, i   : interi

  /* INIZIO ISTRUZIONI: */
  { ciclo sull'ordine delle differenze divise }
  for k = 1, n - 1 do
    { calcolo delle differenze divise di ordine k }
    for i = n, k + 1, step -1 do
      { calcolo elemento i-mo }
      yi = (yi - yi-1)/(xi - xi-k)
    endfor
  endfor
end diffdivise

```

Procedura 3.4: Algoritmo per il calcolo delle differenze divise

L'algoritmo calcola in ciascuno degli  $n - 1$  passi, un numero di differenze divise pari a  $n - i$  se  $i$  indica il generico passo. Quindi calcola complessivamente:

$$(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = n(n - 1)/2$$

differenze divise, e, poichè ciascuna richiede due addizioni e una divisione, la complessità asintotica di tempo dell'algoritmo per il calcolo dei coefficienti del polinomio è:

$$T(n) = O(n^2) \text{ flop}$$

Analogamente si può sviluppare l'algoritmo che procede "per diagonali" in cui, ad ogni passo, si calcola una diagonale della tabella delle differenze divise. In particolare, riferendoci ancora alla Tavola 1, delle differenze divise, l'algoritmo "per diagonali" calcola, al primo passo, la differenza divisa  $y[x_1, x_2]$ , al secondo passo calcola le due differenze divise  $y[x_2, x_3]$  e  $y[x_1, x_2, x_3]$ , al terzo passo calcola le tre differenze divise  $y[x_3, x_4]$ ,  $y[x_2, x_3, x_4]$  e  $y[x_1, x_2, x_3, x_4]$  e così procedendo fino al passo  $(n - 1)$ -esimo, in cui sono calcolate  $n - 1$  differenze divise e, precisamente,  $y[x_{n-1}, x_n], \dots, y[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . La complessità di tempo di questo algoritmo è, ancora,

$$T(n) = O(n^2) \text{ flop}$$

perché le operazioni sono le stesse dell'algoritmo "per colonna", ciò che è cambiato è semplicemente l'ordine con cui vengono calcolate le differenze divise.

### 3.2.9 Valutazione del polinomio interpolante

Calcolati i coefficienti  $a_i$ , il polinomio interpolante di Lagrange può essere valutato in un fissato valore  $\tilde{x}$  mediante una particolare versione dell'algoritmo di Horner:

```

procedure Horner_Newton(in:  $n, x, a, \tilde{x}$  ; out:  $p$ )

  /* SCOPO: valutazione del polinomio interpolante di Lagrange
     espresso nella formula di Newton. */

  /* SPECIFICHE PARAMETRI: */
  /* PARAMETRI DI INPUT: */
  var:  $n$       : intero      { numero dei punti }
  var:  $x(n)$    : array di reali { nodi di interpolazione }
  var:  $\tilde{x}$      : reale       { punto in cui si richiede }
                                     { la valutazione del polinomio }
  var:  $a(n)$    : array di reali { coefficienti del polinomio }
                                     { interpolante }

  /* PARAMETRI DI OUTPUT: */
  var:  $p$       : reale       { valore del polinomio in  $\tilde{x}$  }

  /* VARIABILI LOCALI: */
  var:  $i$       : intero

  /* INIZIO ISTRUZIONI: */
   $p := a(n)$ ;
  for  $i = n - 1, 1$  step -1 do
     $p := p \cdot (\tilde{x} - x(i)) + a(i)$ ;
  endfor
end Horner_Newton

```

Procedura 3.5: Algoritmo di Horner per la valutazione di un polinomio espresso nella formula di Newton

Ad ogni passo l'algoritmo effettua una moltiplicazione ed una addizione, pertanto la complessità di tempo di questo algoritmo è  $T(n) = O(n)$  flop.

♣ **Esempio 3.15.** Calcolare i coefficienti del polinomio interpolante  $n + 1$  punti noti i coefficienti del polinomio interpolante i primi  $n$  punti.

Per la formula di Newton il polinomio  $p \in \Pi_n$  interpolante i punti  $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$  differisce da  $q \in \Pi_{n-1}$  interpolante i punti  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  solo nell'ultimo termine, cioè :

$$p(x) = q(x) + a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

con:

$$a_n = y[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}],$$

pertanto è necessario calcolare solo l'ultimo coefficiente di  $p$ , cioè  $a_{n+1}$ . Per tale motivo aggiungiamo innanzitutto un elemento in più nelle prime due colonne della tavola delle differenze divise, cioè rispettivamente  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$ . Successivamente si devono calcolare le differenze divise che si ottengono con l'aggiunta di questo punto:

$$y[x_1, x_{n+1}], \dots, y[x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Dunque, supponendo di aver calcolato e memorizzato nel vettore  $y$  le prime  $n$  differenze divise:

$$y[x_1], y[x_1, x_2], \dots, y[x_1, \dots, x_n]$$

come precedentemente descritto, un modo per calcolare le nuove differenze divise è quello di combinare al primo passo ( $k=1$ )  $y[x_{n+1}]$  con  $y[x_1]$  per calcolare  $y[x_1, x_{n+1}]$  e memorizzare quest'ultima differenza divisa in  $y_{n+1}$ ; successivamente, al secondo passo ( $k=2$ ), combinando  $y[x_1, x_{n+1}]$  con  $y[x_1, x_2]$ , si calcola  $y[x_1, x_2, x_{n+1}]$  e si memorizza il risultato su  $y[x_1, x_{n+1}]$ ; al terzo passo ( $k = 3$ ) si calcola  $y[x_1, x_2, x_3, x_{n+1}]$  a partire da  $y[x_1, x_2, x_{n+1}]$  e  $y[x_1, x_2, x_3]$  e si memorizza il risultato su  $y[x_1, x_2, x_{n+1}]$ . Così procedendo, dopo  $n$  passi, su  $y_{n+1}$  si ottiene la differenza divisa di ordine  $n$   $y[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$  corrispondente al coefficiente  $a_{n+1}$ :

$x_i$	$y_i$	$k = 1$	$k = 2$	$\dots$	$k = n$
$x_1$	$y[x_1]$				
$x_2$	$y[x_1, x_2]$				
$x_3$	$y[x_1, x_2, x_3]$				
$\vdots$	$\vdots$				
$x_n$	$y[x_1, \dots, x_n]$				
$x_{n+1}$	$y[x_{n+1}]$	$y[x_1, x_{n+1}]$	$y[x_1, x_2, x_{n+1}]$	$\dots$	$y[x_1, \dots, x_{n+1}]$

**Tavola 2: Aggiunta di un punto nella tavola delle differenze divise**



### 3.2.10 Un elemento di software per l'interpolazione polinomiale

Una routine di software matematico per la costruzione del polinomio interpolante di Lagrange espresso nella formula di Newton deve prevedere come dati di input il vettore dei nodi di interpolazione e quello contenente i corrispondenti valori. La routine, dopo aver calcolato i coefficienti del polinomio interpolante mediante le differenze divise, valuta il polinomio utilizzando l'algoritmo di Horner. Si può prevedere la valutazione in uno o più punti. Pertanto un altro dato di input è il vettore contenente i valori di valutazione, eventualmente costituito da un solo elemento. Per quanto riguarda i controlli sui dati di input è opportuno che la routine verifichi che i nodi siano a due a due distinti e che siano ordinati in senso crescente ed eventualmente li ordini. Pertanto, le specifiche di una tale routine potrebbero essere del tipo:

SOUBROUTINE NEWTON(X,Y,N,M,Z,PZ,IFAIL)

dove:

- X è il vettore di lunghezza N contenente i nodi di interpolazione;
- Y è il vettore di lunghezza N contenente le ordinate dei punti di interpolazione;
- N è il numero dei punti di interpolazione;
- M è il numero dei punti di valutazione del polinomio interpolante;
- Z è il vettore contenente i punti in cui si vuole valutare il polinomio interpolante;
- PZ è il vettore contenente i valori assunti dal polinomio interpolante nei punti assegnati;
- IFAIL è l'indicatore di errore.

Un esempio di programma chiamante per tale subroutine, scritto nel linguaggio di programmazione ad alto livello FORTRAN, è il seguente:

```

PROGRAM MAINNEWTON

C
C Dichiarazione delle variabili
C
      INTEGER N,M, IFAIL,I
      REAL X(100), Y(100), Z(100), PZ(100)
C
C Lettura dei dati di input
C
      WRITE(*,*)'INSERIRE NUMERO DEI PUNTI'
              'DI INTERPOLAZIONE'
      READ(*,*) 'N= ',N
      WRITE(*,*)'INSERIRE',N,'NODI DI INTERPOLAZIONE:'
      READ(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)'INSERIRE GLI',N,'VALORI CORRISPONDENTI:'
      READ(*,*) (Y(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)'INSERIRE NUMERO DI PUNTI'
              'IN CUI VALTARE IL POLINOMIO'
      READ(*,*) M
      WRITE(*,*)'INSERIRE',M,'VALORI'
      READ(*,*) (Z(I),I=1,N)
C
C Chiamata alla subroutine NEWTON
C
      CALL NEWTON(X,Y,N,Z,PZ,IFAIL)
C
C Stampa dei risultati
C
      IF (IFAIL .EQ. 0) THEN
      WRITE(*,*) (PZ(I), I=1,N)
      STOP
      END

```

Procedura 3.6: Programma chiamante per la routine Newton

```
SOUBROUTINE NEWTON(X,Y,N,M,Z,PZ,IFAIL)
C
C Dichiarazione delle variabili
C
      REAL X(N), Y(N), Z(M), PZ(M)
      INTEGER N,M,IFAIL
C
C Chiamata alla routine DIST che verifica se
C i nodi assegnati sono distinti.
C
      CALL DIST(X,N,IFAIL)
C
      IF (IFAIL .EQ. 0) THEN
C
C Se i nodi sono distinti si chiama la routine DIFFDIV
C per il calcolo delle differenze divise
C
      CALL DIFFDIV(X,Y,N)
C
C Chiamata alla routine HORNER per la valutazione
C del polinomio interpolante.
C
      CALL HORNER (X,Y,N,Z,M,PZ)
C
      ENDIF
      RETURN
      END
```

Procedura 3.7: Subroutine Newton

### 3.3 Metodi costruttivi per il polinomio interpolante di Hermite

#### 3.3.1 Formula di Lagrange

♣ **Esempio 3.16.** Nell'esempio 3.10 abbiamo costruito la parabola passante per i punti  $P_1 \equiv (0, 2)$ ,  $P_2 \equiv (1, 1)$  e avente vertice in  $P_2$ . La parabola è:

$$p(x) = x^2 - 2x + 2$$

Il polinomio  $p \in \Pi_2$  è quindi il polinomio interpolante di Hermite relativo ai punti  $P_1$  e  $P_2$ :

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1^0 = 2 \\ y(x_2) = y_2^0 = 1 \\ y^{(1)}(x_2) = y_2^1 = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente:

nodi	$x_1$	$x_2$
condizioni	$y_1^0$	$y_2^0$ $y_2^1$

Scriviamo  $p$  nella forma:

$$p(x) = y_1^0 \cdot h_{10}(x) + y_2^0 \cdot h_{20}(x) + y_2^1 \cdot h_{21}(x)$$

con  $h_{ij}$  polinomi di secondo grado. Determiniamo tali polinomi utilizzando le condizioni di interpolazione. Da

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1^0 & \rightarrow y_1^0 \cdot h_{10}(x_1) + y_2^0 \cdot h_{20}(x_1) + y_2^1 \cdot h_{21}(x_1) = y_1^0 \\ p(x_2) = y_2^0 & \rightarrow y_1^0 \cdot h_{10}(x_2) + y_2^0 \cdot h_{20}(x_2) + y_2^1 \cdot h_{21}(x_2) = y_2^0 \\ p'(x_2) = y_2^1 & \rightarrow y_1^0 \cdot h'_{10}(x_2) + y_2^0 \cdot h'_{20}(x_2) + y_2^1 \cdot h'_{21}(x_2) = y_2^1 \end{cases}$$

Queste condizioni sono sicuramente verificate se richiediamo che i polinomi  $h_{10}, h_{20}, h_{21}, h'_{10}, h'_{20}, h'_{21}$  siano tali che:

$$\begin{cases} h_{10}(x_1) = 1 & h_{20}(x_1) = 0 & h_{21}(x_1) = 0 \\ h_{10}(x_2) = 0 & h_{20}(x_2) = 1 & h_{21}(x_2) = 0 \\ h'_{10}(x_2) = 0 & h'_{20}(x_2) = 0 & h'_{21}(x_2) = 1 \end{cases}$$

Dovendo essere polinomi di secondo grado,

- per il polinomio  $h_{20}$ , essendo la derivata prima un polinomio di primo grado e dovendo avere, dalla terza condizione, lo zero in  $x_2$  risulta

$$h'_{20}(x) = a(x - x_2)$$

da cui integrando:

$$h_{20}(x) = a/2 \cdot (x - x_2)^2 + c$$

dalla seconda condizione si ha  $c = 1$ , e imponendo la prima segue che  $a = \frac{-2}{(x_1 - x_2)^2}$ ;

- per il polinomio  $h_{10}$ , analogamente, essendo la derivata prima un polinomio di primo grado, e dovendo avere, dalla terza condizione, lo zero in  $x_2$  risulta:

$$h'_{10}(x) = b(x - x_2)$$

da cui integrando:

$$h_{10}(x) = b/2 \cdot (x - x_2)^2 + d$$

dalla seconda condizione si ricava  $d = 0$ , e imponendo la prima segue che  $b = \frac{2}{(x_1 - x_2)^2}$ ;

- per il polinomio  $h_{21}$ , dalle prime due condizioni risulta che esso ha i due zeri  $x_1$  e  $x_2$ , inoltre essi sono zeri semplici perché il polinomio è di secondo grado quindi può avere al più due zeri distinti, per cui:

$$h_{21}(x) = f(x - x_1)(x - x_2)$$

imponendo la terza condizione si ricava:

$$f = 1/(x_2 - x_1)$$

La rappresentazione di  $p$  nella forma

$$p(x) = y_1^0 \cdot h_{10}(x) + y_2^0 \cdot h_{20}(x) + y_2^1 \cdot h_{21}(x)$$

con  $h_{ij}$  polinomi di secondo grado, univocamente determinati dalle condizioni di interpolazione, è detta **Formula di Lagrange** per il polinomio di Hermite. ♣

Analogamente al problema di interpolazione di Lagrange, è possibile esprimere il polinomio interpolante di Hermite relativo ai dati:

- $x_i, i = 1, \dots, n;$
- $y_i^j, i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, l_i - 1 \forall i,$
- $\sum_{i=1}^n l_i = m + 1$

nella forma:

$$q(x) = \sum_{j=0}^{l_1-1} y_1^j h_{1j}(x) + \sum_{j=0}^{l_2-1} y_2^j h_{2j}(x) + \dots + \sum_{j=0}^{l_n-1} y_n^j h_{nj}(x)$$

dove

$$h_{ij} \in \Pi_m, \quad i = 1, \dots, n$$

e

$$h_{ij}^{(r)}(x_s) = \begin{cases} 1 & (i, j) = (s, r) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Anche per la formula di Newton è possibile ricavare un'espressione analoga valida per costruire il polinomio interpolante di Hermite.

♣ **Esempio 3.17.** Consideriamo il seguente problema di interpolazione di Lagrange:

nodi	$x_1$	$\tilde{x}_1$	$x_2$	$\tilde{x}_2$
condizioni	$y_1$	$\tilde{y}_1$	$y_2$	$\tilde{y}_2$

e costruiamo il polinomio interpolante nella formula di Newton:

$$q(x) = y[x_1] + y[x_1, \tilde{x}_1](x - x_1) + \\ + y[x_1, \tilde{x}_1, x_2](x - x_1)(x - \tilde{x}_1) + \\ + y[x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2](x - x_1)(x - \tilde{x}_1)(x - x_2)$$

Immaginiamo ora di far coincidere i nodi a due a due cioè:

$$\tilde{x}_1 \rightarrow x_1$$

e

$$\tilde{x}_2 \rightarrow x_2$$

in maniera tale che la condizione in  $\tilde{x}_1$  diventi ora una "seconda" condizione su  $x_1$ , e analogamente la condizione su  $\tilde{x}_2$  diventi una "seconda" condizione su  $x_2$ . Il problema di interpolazione diventa un problema con due nodi e quattro condizioni, due su ciascun nodo:

nodi	$x_1$	$x_2$
condizioni	$y_1$	$y_2$
	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$

Se poniamo  $y_1^1 = \tilde{y}_1$  e  $y_2^1 = \tilde{y}_2$  ci siamo ricondotti ad un problema di interpolazione di Hermite. In tal caso, la formula di Newton diventa:

$$q(x) = y[x_1] + y[x_1, x_1](x - x_1) + \\ + y[x_1, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_1) + \\ + y[x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_1)^2(x - x_2)$$

In questo caso la formula di Newton è stata ricondotta ad una analoga in cui i coefficienti sono espressi in termini delle differenze divise. Come si nota, i nodi sono ripetuti pertanto è naturale aspettarsi che queste quantità non possano essere definite (e quindi calcolate) in maniera analoga alle usuali differenze divise. Nasce dunque il problema di dare una definizione alle **differenze divise su nodi multipli** ♣

Per derivare la formula di Newton per il polinomio interpolante di Hermite è necessario dimostrare alcuni risultati relativi alle differenze divise su nodi multipli.

**Proposizione 3.1.** *Siano*

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$$

*Sia, inoltre*

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

*una funzione derivabile in  $[a, b]$ . Se :*

$$\begin{aligned} f(x_i) &= y_i \\ f^{(1)}(x_i) &= y_i^1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

*allora:*

$$\lim_{x_j \rightarrow x_i} y[x_i, x_j] = y_i^1, \quad i = 1, \dots, k$$

**Dimostrazione** Si ha:

$$\lim_{x_j \rightarrow x_i} y[x_i, x_j] = \lim_{x_j \rightarrow x_i} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \lim_{x_j \rightarrow x_i} \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = f'(x_i) = y_i^1$$

■

A fronte di questo risultato, è naturale dare la seguente

**Definizione 3.10. (Differenza divisa di ordine uno su nodi coincidenti)**

*La differenza divisa di ordine uno, su due nodi coincidenti:*

$$y[x_i, x_i]$$

*è definita nel modo seguente:*

$$y[x_i, x_i] = y_i^1$$

*dove  $y_i^1$  rappresenta la seconda condizione di interpolazione nel nodo  $x_i$ .*

Analogamente, dimostriamo la seguente:

**Proposizione 3.2.** *Siano:*

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$$

Sia, inoltre,:

$$y = f(x) \in C^2[a, b], \quad x \in [a, b]$$

Se

$$\begin{aligned} f(x_i) &= y_i \\ f^{(1)}(x_i) &= y_i^1 \\ f^{(2)}(x_i) &= y_i^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

allora:

$$\lim_{x_j \rightarrow x_i} y[x_i, x_i, x_j] = \frac{y_i^2}{2}, \quad i = 1, \dots, k$$

**Dimostrazione** Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x_j \rightarrow x_i} y[x_i, x_i, x_j] &= \\ &= \lim_{x_j \rightarrow x_i} \frac{-y[x_i, x_i] + y[x_i, x_j]}{x_j - x_i} = \lim_{x_j \rightarrow x_i} \frac{-f'(x_i) + \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}}{x_j - x_i} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sviluppiamo  $f(x)$  in serie di Taylor di punto iniziale  $x_i$ , troncata al secondo ordine e valutiamo lo sviluppo in  $x_j$ . Si ha:

$$f(x_j) = f(x_i) + f'(x_i)(x_j - x_i) + \frac{1}{2}f''(x_i)(x_j - x_i)^2 + o((x_i - x_j)^2)$$

Sostituendo nella (3.39), si ottiene:

$$\frac{-f'(x_i) + \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}}{x_j - x_i} = \frac{-f'(x_i) + f'(x_i) + 1/2 \cdot f''(x_i)(x_j - x_i)}{x_j - x_i} = \frac{f''(x_i)}{2}$$

**Definizione 3.11. (Differenza divisa di ordine due su nodi coincidenti)**

La differenza divisa di ordine due, su tre nodi coincidenti:

$$y[x_i, x_i, x_i]$$

è definita nel modo seguente:

$$y[x_i, x_i, x_i] = \frac{y_i^2}{2}$$

dove  $y_i^2$  rappresenta la terza condizione di interpolazione nel nodo  $x_i$ .



In generale, se  $y_i^k$  rappresenta la condizione  $(k+1)$ -ma nel nodo  $x_i$  allora, la differenza divisa di ordine  $k$  sul nodo  $x_i$  si definisce nel modo seguente:

$$y[\underbrace{x_i, x_i, \dots, x_i}_{k+1}] = \frac{y_i^k}{k!}$$

mentre per il calcolo della differenza su nodi multipli, sussiste la seguente formula ricorrente:

$$y[\underbrace{x_i, \dots, x_i}_k, \underbrace{x_j, \dots, x_j}_s, \underbrace{x_p, \dots, x_p}_r] = \frac{y[\underbrace{x_i, \dots, x_i, x_j, \dots, x_j, x_p, \dots, x_p}_{k+s+r}] - y[\underbrace{x_i, \dots, x_i, x_j, \dots, x_j, x_p, \dots, x_p}_{k+s+r-1}]}{x_p - x_i} \tag{3.40}$$

Le differenze divise su nodi multipli si possono calcolare secondo uno schema analogo a quello costruito per le differenze divise su nodi distinti. Precisamente, si costruisce una tabella a doppia entrata: lungo le righe si dispongono le differenze divise di ordine  $k$ , lungo le colonne si dispongono i nodi avendo cura di ripetere i nodi  $x_i$  tante volte quante sono le condizioni imposte sul nodo. Ad esempio, considerato il seguente problema di interpolazione di Hermite:

nodi	$x_1$	$x_2$	$x_3$
condizioni	$y_1^0$	$y_2^0$	$y_3^0$
		$y_2^1$	$y_3^1$
		$y_2^2$	

**Schema grafico di un problema di interpolazione di Hermite**

Si ottiene la tavola seguente:

$x_i$	$y_i$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$x_1$	$y_1$	$y[x_1, x_2]$				
$x_2$	$y_2$	$y[x_2, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_2, x_2]$		
$x_2$	$y_2$	$y[x_2, x_2]$	$y[x_2, x_2, x_2]$	$y[x_2, x_2, x_2, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_2, x_2, x_3]$	
$x_2$	$y_2$	$y[x_2, x_2]$	$y[x_2, x_2, x_3]$	$y[x_2, x_2, x_2, x_3]$	$y[x_2, x_2, x_2, x_3, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_2, x_2, x_3, x_3]$
$x_3$	$y_3$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_2, x_3, x_3]$	$y[x_2, x_2, x_3, x_3]$		
$x_3$	$y_3$	$y[x_3, x_3]$				

**Tavola 3: Differenze divise su nodi multipli**

♣ **Esempio 3.18.** Sia  $f \in C^k[a, b]$ . Costruiamo il polinomio interpolante di Hermite relativo ai seguenti dati:

nodì	$x_1$
condizioni	$y_1^0 = f(x_1)$
	$y_1^1 = f'(x_1)$
	$\vdots$
	$y_1^k = f^{(k)}(x_1)$

Il polinomio di Taylor relativo alla funzione  $f$ , di grado  $k$  e di punto iniziale  $x_1$ :

$$P(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(x - x_1)^k$$

è un polinomio di grado  $k$ , tale che:

$$P^{(j)}(x_1) = f^{(j)}(x_1) = y_1^j \quad j = 0, \dots, k$$

cioè soddisfa le condizioni di interpolazione di Hermite. Per l'unicità del polinomio interpolante esso è quindi il polinomio interpolante di Hermite.

In altre parole, il polinomio di Taylor risolve un particolare problema di interpolazione di Hermite, in cui sono note le  $k + 1$  condizioni su un unico punto. Tali condizioni sono espresse in termini delle derivate nel punto  $x_1$  della funzione  $f$ . ♣

### 3.4 Interpolazione polinomiale a tratti

Uno dei requisiti principali di un modello matematico è, come già abbiamo visto nei paragrafi precedenti, che esso sia in grado di descrivere il problema in modo attendibile,

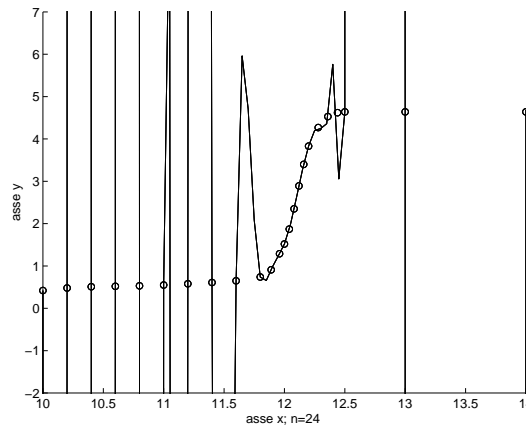


Figura 3.18: Andamento del polinomio interpolante di Lagrange di grado 23 relativo ai 24 punti assegnati

cioè, ad esempio, che soddisfi i requisiti (i) ÷ (iii) illustrati nel primo paragrafo. Purtroppo, il polinomio interpolante, se il numero dei punti di interpolazione è elevato, non fornisce in generale un modello accettabile. Infatti, al crescere del numero di punti aumenta il grado del polinomio interpolante e aumentano anche le oscillazioni del polinomio corrispondente ottenendo un modello non sempre coerente con l'andamento dei dati.

♣ **Esempio 3.19.** Assegnati i seguenti  $n = 24$  punti di interpolazione:

$n$	$x$	$y$	$n$	$x$	$y$
1	10.00	0.42	13	12.00	1.52
2	10.20	0.48	14	12.04	1.87
3	10.40	0.51	15	12.08	2.35
4	10.60	0.52	16	12.12	2.89
5	10.80	0.53	17	12.16	3.40
6	11.00	0.55	18	12.20	3.83
7	11.20	0.58	19	12.28	4.27
8	11.40	0.61	20	12.36	4.53
9	11.60	0.65	21	12.44	4.62
10	11.80	0.74	22	12.50	4.64
11	11.89	0.91	23	13.00	4.64
12	11.96	1.29	24	14.00	4.64

il polinomio interpolante di Lagrange  $p(x) \in \Pi_{23}$  ha il grafico riportato in Figura 3.18.

Dalla figura appare evidente che  $p$  oscilla in modo critico fra i dati e, quindi, piuttosto che ottenere nuove informazioni significative a partire dai dati assegnati, si perde gran parte delle informazioni in essi contenute.

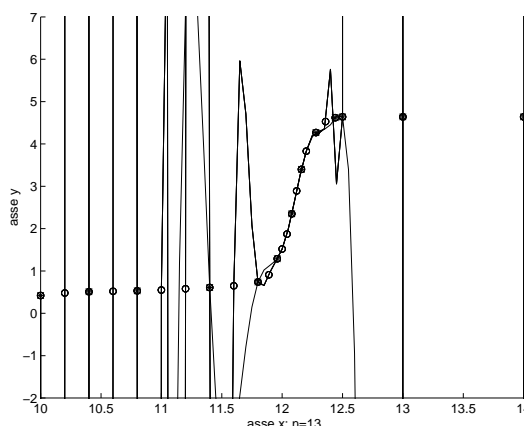


Figura 3.19: Andamento del polinomio interpolante di Lagrange di grado 12 relativo a 13 punti scelti tra i 24 assegnati.

Poichè tale comportamento dipende dal grado del polinomio interpolante, e questo, a sua volta, dipende dal numero di punti da interpolare, si può pensare di considerare solo una parte degli  $n$  punti (ad esempio eliminare un punto ogni due) e di costruire il corrispondente polinomio interpolante di Lagrange; in realtà questa strategia non sempre è consigliabile, perchè si potrebbero eliminare dati significativi, e in ogni caso non sempre garantisce una soluzione accettabile. Ad esempio, riducendo successivamente il numero di punti di interpolazione, con  $n = 13, 9, 6$  punti si ottengono i polinomi interpolanti di Fig. 3.19, Fig. 3.20, Fig. 3.21.

Al diminuire del grado, il polinomio interpolante oscilla molto meno tra i dati, ma il modello può risultare ancora una volta poco attendibile perchè ottenuto usando solo parte delle informazioni sul problema in esame, le quali evidentemente non riescono a riflettere in maniera adeguata l'andamento del fenomeno.

Probabilmente, se invece del polinomio interpolante congiungiamo a due a due i punti con un segmento di retta, può accadere che riusciamo ad avere una descrizione più soddisfacente. Ciò è quello che viene mostrato in Fig. 3.22.

♣ **Esempio 3.20.** Consideriamo i seguenti punti: e supponiamo che descrivano il profilo di un catamarano. Volendo disegnare la sezione del catamarano abbiamo bisogno di un modello che tra i punti interni non possieda delle oscillazioni.

Vediamo cosa succede se costruiamo il polinomio interpolante:

Chiaramente questo modello non è soddisfacente! Congiungendo a due a due i punti con segmenti di rette, si ottiene il modello riportato in Fig. 3.25, che sebbene segua i punti meglio del polinomio interpolante di grado 14, non è un modello soddisfacente a causa delle irregolarità nei punti di raccordo tra un tratto ed un altro che, in questo caso, non possono essere tollerate!

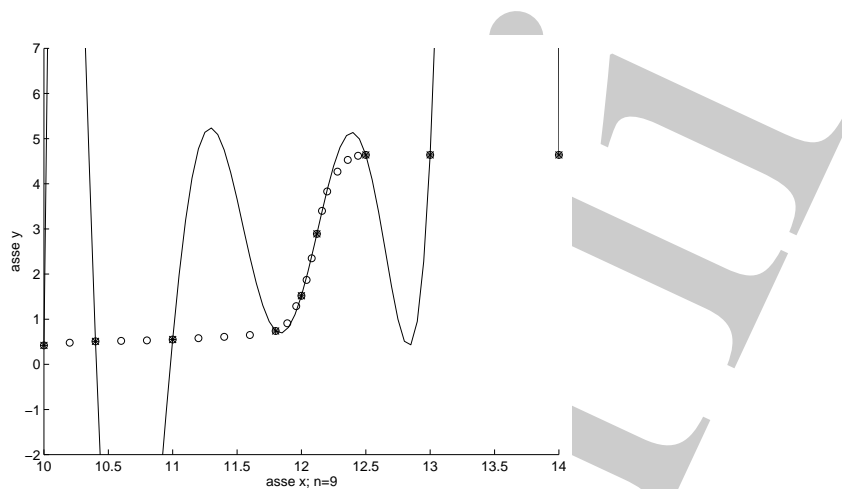


Figura 3.20: Andamento del polinomio interpolante di Lagrange di grado 8 relativo a 9 dei 24 punti assegnati.

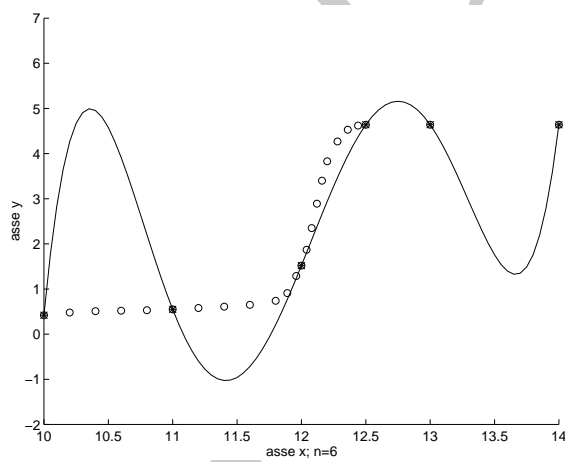


Figura 3.21: Polinomio interpolante di Lagrange di grado 5.

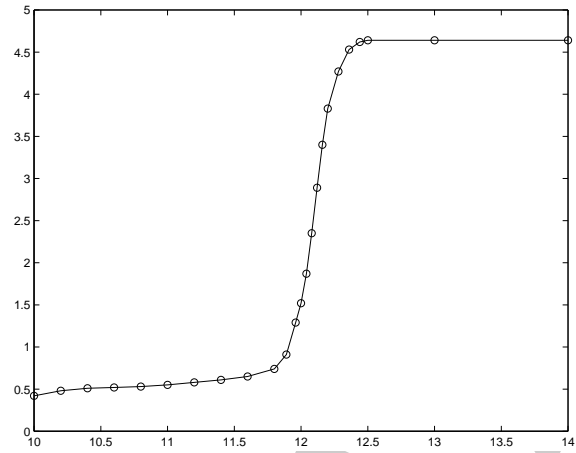


Figura 3.22: Un modello interpolante costruito congiungendo a due a due i punti con segmenti di rette.

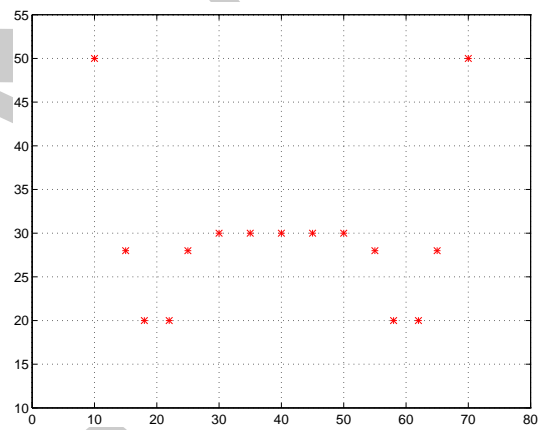


Figura 3.23: Dati rilevati per descrivere il profilo di un catamarano.

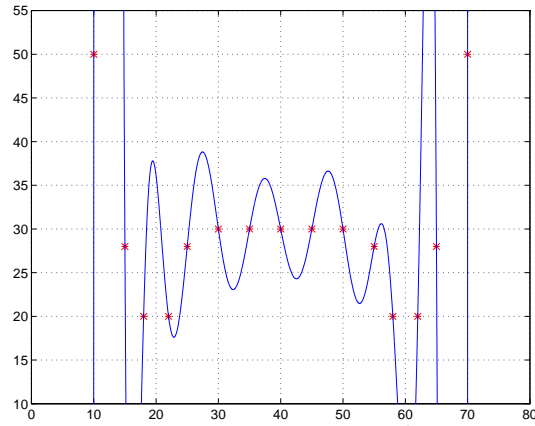


Figura 3.24: Polinomio interpolante di grado 14.

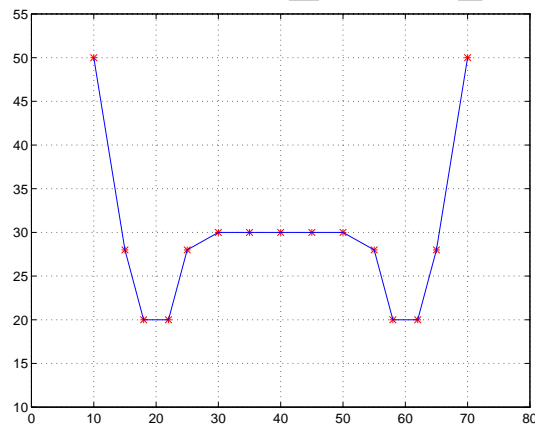


Figura 3.25: Un modello interpolante ottenuto congiungendo a due a due i punti con segmenti di rette.

In molti casi per ridurre il grado del polinomio interpolante e le sue oscillazioni, una buona strategia è quella di suddividere l'intervallo dei nodi in sottointervalli contigui e costruire il modello interpolante localmente, cioè su ciascun sottointervallo. Ciò consente di determinare relativamente a ciascun sottointervallo un polinomio interpolante di grado più basso indipendentemente da quanti siano i nodi complessivi.

In particolare, raggruppando i nodi a due a due, il polinomio interpolante relativo a ciascun sottointervallo è un polinomio interpolante lineare a tratti cioè una funzione che in ogni intervallo dei nodi coincide con un polinomio di grado al più uno interpolante i punti estremi del sottointervallo. Diamo dunque la seguente:

**Definizione 3.12. (Funzione polinomiale interpolante lineare a tratti)**

Assegnato un insieme di nodi strettamente crescente  $K = \{x_1, \dots, x_n\}$ , e un insieme di  $n$  valori corrispondenti  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , una **funzione polinomiale interpolante (di Lagrange) lineare a tratti** definita sull'insieme  $K$  è una funzione  $f$  tale che, in ogni sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]_{i=1, \dots, n-1}$  coincida con un polinomio di grado al più 1:

$$f(x) \equiv p_i(x) \in \Pi_1 \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

ed inoltre  $f$  soddisfi alle condizioni di interpolazione di Lagrange sui nodi assegnati, ovvero:

$$f(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, n$$

Osserviamo che una funzione  $f$  polinomiale lineare a tratti è per definizione anche una funzione interpolante i punti di coordinate  $(x_i, f(x_i))$ .

Questa definizione si generalizza in modo naturale, richiedendo che ciascun polinomio  $p_i$  anziché essere lineare abbia un grado maggiore di 1. Ad esempio, supponendo che ciascun "tratto" sia costituito da un polinomio di grado  $p$  occorre raggruppare i nodi in gruppi da  $p+1$ . Supponiamo, per semplicità di avere  $n$  punti, con  $n-1$  divisibile per  $p$ , diamo la seguente:

**Definizione 3.13. (Funzione polinomiale interpolante a tratti di grado  $p$ )**

Assegnato un insieme di  $n$  nodi strettamente crescente  $K = \{x_1, \dots, x_n\}$ , e un insieme di  $n$  valori corrispondenti  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , una **funzione polinomiale interpolante a tratti di grado  $p$**  definita sull'insieme dei nodi  $K$  è una funzione  $f$  tale che, in ogni sotto intervallo  $I_i = [x_{(i-1)p+1}, x_{ip+1}]$ , con  $i = 1, \dots, (n-1)/p$ , coincida con un polinomio di grado al più  $p$ :

$$f(x) \equiv p_i(x) \in \Pi_p \quad x \in I_i \quad i = 1, \dots, (n-1)/p$$

ed inoltre  $f$  soddisfi alle condizioni di interpolazione di Lagrange sui nodi assegnati, ovvero:

$$f(x_j) = p_i(x_j) = y_j \quad \text{se } x_j \in I_i$$



♣ **Esempio 3.21.** Costruire una funzione  $f$  polinomiale lineare a tratti che interpoli i punti:

$$(x_1, y_1) \equiv (0, 1), \quad (x_2, y_2) \equiv (1, 3), \quad (x_3, y_3) \equiv (3, 2), \quad (x_4, y_4) \equiv (5, 3).$$

Se  $K = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0, 1, 3, 5\}$ ,  $f(x)$  può essere costruita *localmente* in ciascun intervallo dei nodi  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $[x_3, x_4]$ .

Nel primo intervallo  $[x_1, x_2] = [0, 1]$ ,  $f$  deve essere un polinomio di grado al più uno e deve interpolare i punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ ; pertanto in tale intervallo  $f$  deve coincidere con l'unico polinomio di grado al più uno interpolante i suddetti punti, cioè con il segmento appartenente alla retta passante per  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ :

$$f(x) \equiv p_1(x) = y_1 + y[x_1, x_2](x - x_1) = 1 + \frac{3-1}{1-0}(x-0) = 1 + 2x.$$

Analogamente, per  $x \in [x_2, x_3]$ :

$$f(x) \equiv p_2(x) = y_2 + y[x_2, x_3](x - x_2) = 3 + \frac{2-3}{3-1}(x-1) = 3 - \frac{1}{2}(x-1)$$

e per  $x \in [x_3, x_4]$ :

$$f(x) \equiv p_3(x) = y_3 + y[x_3, x_4](x - x_3) = 2 + \frac{3-2}{5-3}(x-3) = 2 + \frac{1}{2}(x-3).$$

Riassumendo, quindi, la funzione polinomiale lineare a tratti interpolante i punti assegnati è definita nel modo seguente:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1 + 2x & x \in [0, 1] \\ 3 - 0.5(x-1) & x \in [1, 3] \\ 2 + 0.5(x-3) & x \in [3, 5] \end{cases}$$

♣

Assegnati i punti di coordinate:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \quad \text{con} \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

la funzione polinomiale lineare a tratti  $f$  interpolante tali punti può essere espressa in ciascun intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , come:

$$f(x) \equiv p_i(x) = y_i + y[x_i, x_{i+1}](x - x_i) = a_i + b_i(x - x_i) \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Per costruire  $f$  occorre, dunque, calcolare i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Si osservi che in ciascun intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  coincidono rispettivamente con le differenze divise di ordine zero e del primo ordine relative ai nodi  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , e quindi

$$a_i = y_i \quad \text{e} \quad b_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}.$$

Per valutare la funzione  $f$  così costruita in un fissato  $z$  occorre, poi:

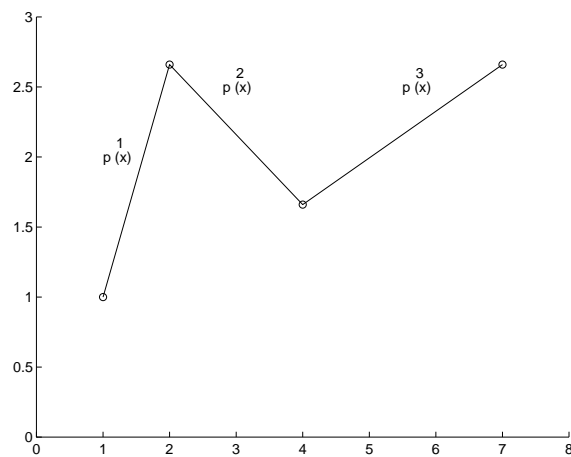


Figura 3.26: Funzione polinomiale lineare a tratti interpolante i punti (0,1), (1,3), (3,2), (5,3)

1. **localizzare** l'intervallo dei nodi  $[x_i, x_{i+1}]$  tale che:

$$z \in [x_i, x_{i+1}]$$

2. **valutare**  $f(z) \equiv p_i(z) = y_i + b_i(z - x_i)$ .

Uno schema dell'algoritmo è mostrato nella procedura seguente.

```

procedure Pol_lin_tratti(in:  $x, y, z, n$  ; out:  $pz$ )
  /# SCOPO: costruzione della funzione polinomiale lineare a tratti
    interpolante un insieme assegnato di punti.

  /# Localizzazione dell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  (e quindi dell'indice  $i$ )
  /# al quale  $z$  appartiene, attraverso l'algoritmo di ricerca binaria.

  call ric_bin( $x, y, z, i, n$ )

  /# Calcolo dei coefficienti del segmento di retta che
  /# rappresenta la funzione polinomiale nell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ 

  call diffdiv( $i, y, b(i), x, n$ )

  /# Valutazione del polinomio lineare interpolante a tratti in  $z$ 

  call Horner( $i, b(i), z, pz, n$ )

end Pol_lin_tratti

```

Procedura 3.8: Algoritmo per la costruzione e la valutazione della polinomiale lineare a tratti interpolante

### 3.4.1 Interpolazione mediante funzioni spline

#### Le funzioni spline

Si è visto che il polinomio interpolante non sempre fornisce una rappresentazione attendibile di una funzione descritta da un insieme di punti, a causa del fatto che, al crescere del numero di punti, cresce necessariamente il grado del polinomio e quindi le sue oscillazioni aumentano. Un modo per ovviare a questo inconveniente è quello di costruire localmente il polinomio interpolante, cioè suddividere l'intervallo dei nodi di interpolazione in sottointervalli raggruppando i nodi (a due a due oppure a tre a tre, etc.) ed in ciascuno di questi costruire il polinomio interpolante corrispondente al numero di nodi raggruppati. In ogni caso, però, non si riescono ad evitare eventuali discontinuità delle derivate nei punti di raccordo tra un polinomio e l'altro. Per determinare un modello più soddisfacente dei precedenti, è auspicabile poter costruire:

- un polinomio di grado basso;
- una funzione sufficientemente *dolce* (*smooth*) su tutto l'intervallo.

La soluzione a questo problema è fornita da particolari funzioni polinomiali a tratti dette *funzioni spline*. Una particolare funzione spline ha il grafico riportato in Fig. 3.27.

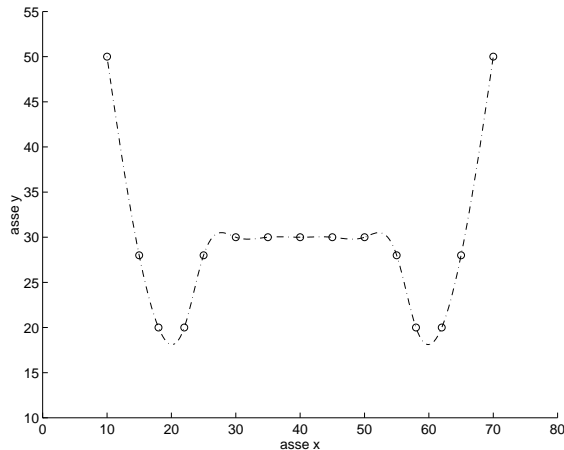


Figura 3.27: Una funzione spline

♣ **Esempio 3.22.** Un problema che si può presentare al disegnatore è il seguente: assegnati sul piano alcuni punti, unirli mediante una curva che non presenti spigoli, che cioè sia *abbastanza dolce*. Per risolvere questo problema si fa ricorso ad un leggero listello di legno (o di altro materiale flessibile) che, mediante gancetti sistemati opportunamente, unisca i punti assegnati nel modo desiderato. I ganci possono essere sistemati direttamente sui punti. In lingua inglese tale listello è noto col nome di *spline*<sup>28</sup> (Fig. 3.28).

<sup>28</sup> Per comprendere il passaggio dallo strumento spline alla definizione di *spline* come funzione matematica, introdotto un sistema di riferimento cartesiano, siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  le ascisse dei punti in cui sono disposti i pesi. Si indichi con  $y = y(x)$  l'equazione della curva descritta dal listello tra due pesi consecutivi, cioè per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , in un fissato riferimento cartesiano. Si può dimostrare (teoria della elasticità) che, se  $M(x)$  indica il momento flettente del listello,  $E$  il modulo di Young del materiale ed  $I$  il momento di inerzia del segmento di spline considerato rispetto ad un opportuno punto, sussiste la relazione:

$$\frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} = \frac{1}{EI} M(x) ; \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Tale espressione, nell'ipotesi che il listello sia soggetto a piccole deformazioni ( $y' \approx 0$ ) e che i pesi siano tra loro abbastanza vicini, può essere semplificata nella:

$$y''(x) = \frac{M}{EI} x \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

dove  $M$  è una costante. Integrando l'espressione così ottenuta rispetto ad  $x$  due volte, si ricava che la  $y = y(x)$  è un polinomio di terzo grado tra due pesi consecutivi.

Poichè, a causa dei pesi, vi possono essere dei salti nella velocità di variazione della curvatura del listello, si può attribuire alla  $y(x)$  la continuità delle derivate prima e seconda, e al più una discontinuità della derivata terza nei punti in cui sono posizionati i pesi. Una formalizzazione matematica di quanto detto viene data successivamente (cfr. Teorema 3.5)

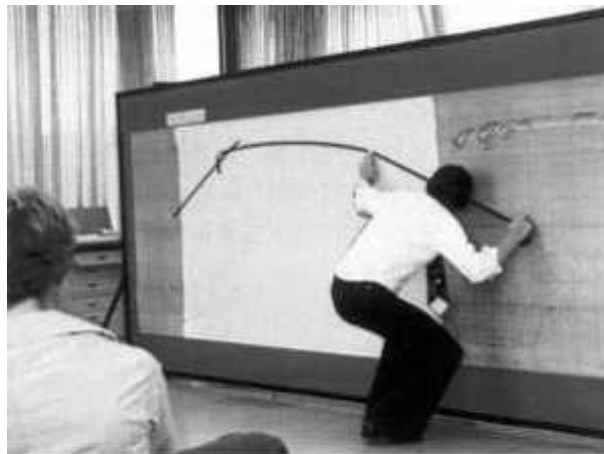


Figura 3.28: Lo strumento spline utilizzato da un disegnatore



Figura 3.29: Utilizzo dello strumento spline in un cantiere navale

Analizziamo ora quali sono le condizioni che definiscono una spline. Innanzitutto bisogna fissare l'insieme dei nodi :

$$K = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

La prima caratteristica di una spline è che tra due *nod*i consecutivi essa sia rappresentata da un polinomio di un grado fissato. Nel caso di spline di primo grado, il polinomio

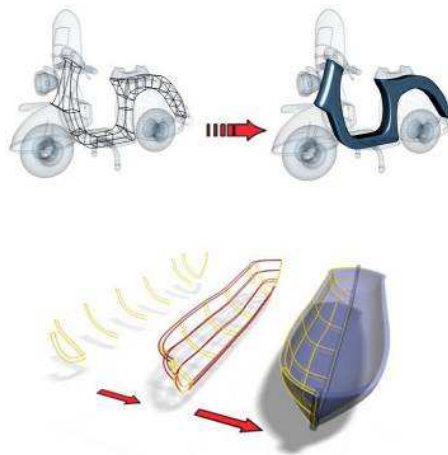


Figura 3.30: Dal *listello* alla realizzazione di un progetto

deve essere al piú di primo grado.

♣ **Esempio 3.23.** Assegnati i nodi:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 7,$$

si vuole definire una funzione **spline di primo grado (del secondo ordine)**, relativa a tali nodi. Un modo è quello di procedere intervallo per intervallo. Nel caso di funzioni spline di primo grado, in ogni intervallo la funzione spline deve essere rappresentata da un polinomio di primo grado:

$$s(x) \equiv \begin{cases} p_1(x) & x \in [1, 2] \\ p_2(x) & x \in [2, 4] \\ p_3(x) & x \in [4, 7] \end{cases}$$

con  $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$  polinomi di primo grado.

Un esempio di spline di primo grado è illustrato nella Figura 3.31.

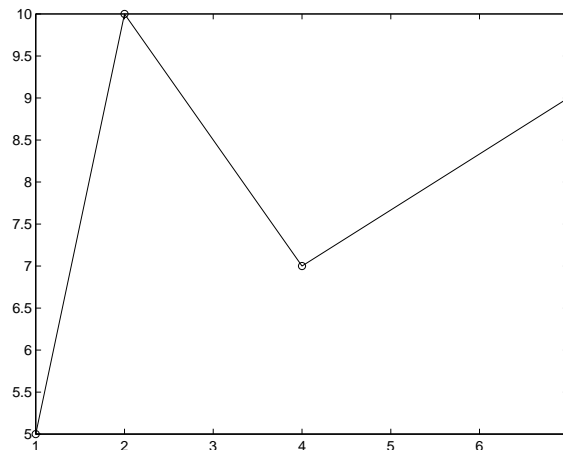


Figura 3.31: Funzione spline lineare relativa ai nodi  $\{1, 2, 4, 7\}$

Quindi, una **spline lineare** è un **polinomio lineare a tratti** che congiunge i punti assegnati. ♣

**Definizione 3.14. (Spline lineare)**

*Fissato l'insieme*

$$K = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

con gli  $x_i, i = 1, \dots, n$  appartenenti all'asse reale e  $x_0 = -\infty$  e  $x_{n+1} = +\infty$ , una funzione  $s(x)$ , definita su tutto l'asse reale, è una **spline lineare** se:

- $s(x) \equiv p_i(x) \in \Pi_1$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n$ ;
- $s(x)$  è una funzione continua in  $(x_0, x_{n+1})$  ( $s(x) \in C^0((-\infty, +\infty))$ ).

Indicato con  $S_1(K)$  l'insieme delle spline lineari costruite sull'insieme  $K$ , si ha:

$$S_1(K) \supset \Pi_1$$

ovvero un polinomio di primo grado è una spline lineare, viceversa non è vero che una spline lineare sia un polinomio di primo grado. Cosa si può dire sulla regolarità di questa funzione?

Come si osserva anche dal grafico in Figura 3.31, la regolarità di una spline lineare riguarda solo la continuità della funzione. Questa è la massima regolarità che possiamo ottenere perché dal momento che in ciascun tratto essa è rappresentata da un polinomio di primo grado la cui derivata prima fornisce il coefficiente angolare di ciascun segmento di retta e quindi la sua pendenza, volendo imporre la continuità della derivata prima nei nodi di raccordo, dovremmo imporre che la pendenza di ciascun segmento di retta nei

nodi di raccordo sia uguale, e cioè dovremmo imporre che i tratti di rette che definiscono la spline su ciascun sottointervallo appartengano alla medesima retta. Chiaramente, ciò non è possibile (a meno che i punti non siano tutti allineati).

Osserviamo, infine, che una spline lineare, nell'intervallo  $[x_1, x_n]$ , coincide con il polinomio interpolante a tratti, costruito sui nodi  $x_1, \dots, x_n$ .

♣ **Esempio 3.24.** Si vuole disegnare una **spline cubica** sullo stesso insieme di nodi dell'esempio 3.23. In questo caso, in ciascun sottointervallo  $[x_1, x_2] \equiv [1, 2]$ ,  $[x_2, x_3] \equiv [2, 4]$ ,  $[x_3, x_4] \equiv [4, 7]$  dobbiamo definire un polinomio di terzo grado, che indichiamo con  $p_i, i = 1, 2, 3$ , e la spline cubica è del tipo:

$$s(x) \equiv \begin{cases} p_1(x) & x \in [1, 2] \\ p_2(x) & x \in [2, 4] \\ p_3(x) & x \in [4, 7] \end{cases}$$

con  $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$  polinomi di grado al più tre. Quanto detto garantisce che:

$$p_1(x_2) = p_2(x_2); \quad p_2(x_3) = p_3(x_3)$$

per definizione di funzione, cioè i polinomi che definiscono la spline in ciascun sottointervallo devono *raccordarsi* nei nodi comuni a due sottointervalli consecutivi. Questa condizione garantisce di conseguenza la continuità della funzione  $s(x)$  su tutto l'intervallo  $[x_1, x_4]$ . Vediamo se possiamo ottenere una regolarità maggiore dalla spline cubica. ♣

Definiamo, ora, una funzione spline cubica. Come vedremo una funzione spline cubica è una funzione polinomiale cubica a tratti che soddisfa ad opportune condizioni di regolarità nei nodi.

### Definizione 3.15. (Spline cubica)

Sia

$$K = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

con gli  $x_i, i = 1, \dots, n$  appartenenti all'asse reale e  $x_0 = -\infty$  e  $x_{n+1} = +\infty$ , una funzione  $s(x)$ , definita su tutto l'asse reale, è una **spline cubica** se:

- $s(x) \equiv p_i(x) \in \Pi_3$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n$
- $s(x), s'(x), s''(x)$  sono funzioni continue in  $(-\infty, +\infty)$  ( $s(x) \in C^2((-\infty, +\infty))$ )<sup>29</sup>.

<sup>29</sup>In effetti la spline cubica è un caso particolare di *spline di grado m* (di ordine  $m + 1$ ).

### Definizione 3.16. (Spline di grado m (di ordine $m + 1$ ))



Queste funzioni sono quelle piú utilizzate nelle applicazioni che comportano problemi di interpolazione.

Indicato con  $S_3(K)$  l'insieme delle spline cubiche relative all'insieme  $K$ , si ha che:

$$S_3(K) \supset \Pi_3$$

Osserviamo innanzitutto che dal momento che ogni tratto di curva è un polinomio di terzo grado, la derivata terza di  $s(x)$  in ciascun sottointervallo è una costante, in generale diversa tra un tratto e l'altro<sup>30</sup>.

Richiedere che la derivata terza sia una funzione continua su tutto l'intervallo dei nodi significa richiedere che il coefficiente del monomio di grado massimo, relativo a ciascun polinomio  $p_i$ , sia lo stesso per ogni polinomio  $p_i$ . D'altra parte, per la continuità della derivata prima e seconda, anche gli altri coefficienti di  $p_i$  risultano uguali tra loro e quindi dovrebbe esistere un unico polinomio di terzo grado passante per i nodi assegnati, qualunque sia il loro numero (ovvero  $p_i(x) \equiv p(x) \quad \forall i = 1, \dots, n$ ). Chiaramente, ciò in generale non è possibile, pertanto possiamo richiedere al piú la continuità della derivata prima e della derivata seconda.

Nella Figura 3.32 è rappresentata una spline cubica relativa all'insieme dei nodi  $K = \{1, 2, 4, 7\}$ .

---

Sia

$$K = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

con gli  $x_i, i = 1, \dots, n$  appartenenti all'asse reale e  $x_0 = -\infty$  e  $x_{n+1} = +\infty$ , una funzione  $s(x)$ , definita su tutto l'asse reale, è una **spline di grado  $m$**  se:

- $s(x) \equiv p_i(x) \in \Pi_m$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n$ ;
- $s(x) \in C^{m-1}((-\infty, +\infty))$ : su tutto l'asse reale la funzione  $s(x)$  è continua con le sue derivate fino all'ordine  $m - 1$ .

Indicato con  $S_m(K)$  l'insieme delle spline di grado  $m$  costruite sull'insieme  $K$ , si ha che:

$$S_m(K) \supset \Pi_m$$

<sup>30</sup>Se  $a_i$  indica il coefficiente del monomio di grado massimo nella rappresentazione del polinomio  $p_i$  di terzo grado che descrive la spline nel sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ , la derivata terza è  $6a_i$ .

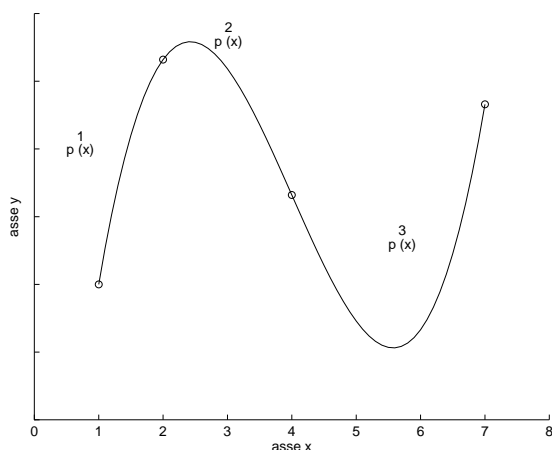


Figura 3.32: Funzione spline cubica sui nodi  $\{1, 2, 4, 7\}$

Affrontiamo ora il problema della costruzione di una spline, in particolare quello della spline cubica.

### 3.4.2 Un metodo costruttivo per la spline cubica naturale interpolante

In questo paragrafo vogliamo descrivere un metodo costruttivo per la spline cubica interpolante secondo Lagrange. Come vedremo, il problema di interpolazione ammette infinite soluzioni. Per garantire l'unicità della soluzione verrà introdotta la spline cubica *naturale*.

L'idea di base è costruire la spline intervallo per intervallo<sup>31</sup>. Si consideri, dunque, il problema di interpolazione seguente:

#### Problema di interpolazione mediante spline cubica

Fissati  $n$  nodi  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e fissati  $n$  valori corrispondenti  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si vuole costruire una funzione spline cubica,  $s \in S_3(K)$ , con

<sup>31</sup>Esiste una motivazione strettamente computazionale nella scelta di costruire la spline intervallo per intervallo. Infatti, si può dimostrare che una funzione spline, su tutto il suo dominio di definizione, ammette una rappresentazione univoca in una opportuna base di funzioni. In tal caso, determinare la spline equivale a determinarne i coefficienti nella base. Purtroppo il sistema lineare a cui tale rappresentazione conduce è di tipo Vandermonde, quindi fortemente mal condizionato. È necessario, pertanto, derivare un metodo costruttivo alternativo, come quello che utilizza l'informazione che la spline in ogni sottointervallo è rappresentata da un polinomio.

$$K = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

dove

$$x_0 = -\infty \quad \text{e} \quad x_{n+1} = +\infty,$$

tale che  $s(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ .

Si consideri l'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  e sia  $p_{i-1}$  il polinomio che rappresenta la spline in tale intervallo. Se si conoscessero i valori della derivata prima di tale polinomio negli estremi del sottointervallo si potrebbe porre un problema di interpolazione di Hermite, del tipo:

nodi	$x_{i-1}$	$x_i$
condizioni	$y_{i-1}^0 = p_{i-1}(x_{i-1})$	$y_i^0 = p_{i-1}(x_i)$
	$y_{i-1}^1 = p'_{i-1}(x_{i-1})$	$y_i^1 = p'_{i-1}(x_i)$

e costruire il polinomio interpolante di Hermite, espresso dalla seguente formula di Newton:

$$p_{i-1}(x) = y[x_{i-1}] + \lambda_{i-1}(x - x_{i-1}) + y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 +$$

$$+ y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i)$$

dove abbiamo posto:

$$\lambda_i = p'_{i-1}(x_i)$$

Si osservi che i coefficienti di  $p_{i-1}$  sono:

- $y_{i-1} = y[x_{i-1}]$ , quantità nota perché  $x_{i-1}$  è un nodo di interpolazione;
- $\lambda_{i-1} = y[x_{i-1}, x_{i-1}]$ , incognita da determinare;
- $y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] = \frac{y[x_{i-1}, x_{i-1}] - y[x_{i-1}, x_i]}{x_{i-1} - x_i} = \frac{\lambda_{i-1} - y[x_{i-1}, x_i]}{x_{i-1} - x_i}$ , quantità calcolabile se noti i  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ ;

- $y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i] = \frac{y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] - y[x_{i-1}, x_i, x_i]}{x_{i-1} - x_i} = \frac{-y[x_{i-1}, x_i] + \lambda_{i-1}}{(x_{i-1} - x_i)^2} - \frac{y[x_{i-1}, x_i] - \lambda_i}{(x_{i-1} - x_i)^2}$ , quantità calcolabile se noti i  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

In definitiva, i coefficienti di  $p_{i-1}$  sono tutti riconducibili alle quantità  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Il problema è dunque calcolare queste quantità. Dimostriamo la seguente:

**Proposizione 3.3.** *Siano  $\xi$  ed  $\eta$  due numeri reali, distinti. Sia  $p \in \Pi_3$ . Allora:*

$$p''(\xi) = \frac{2}{\xi - \eta} \{2p'(\xi) + p'(\eta) - 3y[\xi, \eta]\}$$

**Dimostrazione** Scriviamo il polinomio di Taylor di  $p$  di punto iniziale  $\eta$ , valutato in  $\xi$ :

$$p(\xi) = p(\eta) + p'(\eta)(\xi - \eta) + p''(\eta) \frac{(\xi - \eta)^2}{2} + c \cdot \frac{(\xi - \eta)^3}{6} \quad (c = \text{costante})$$

Allo stesso modo, scriviamo il polinomio di Taylor di  $p''$  di punto iniziale  $\xi$ , valutato in  $\eta$ :

$$p''(\eta) = p''(\xi) + (\eta - \xi) \cdot c$$

Sostituendo  $p''(\eta)$  nell'espressione del polinomio di Taylor di  $p$  segue:

$$y[\xi, \eta] = \frac{p(\xi) - p(\eta)}{\xi - \eta} = p'(\eta) + p''(\xi) \frac{(\xi - \eta)}{2} - c \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{2} + c \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{6}$$

Da cui, ricavando  $p''(\xi)$ , si ottiene:

$$p''(\xi) = \frac{2}{(\xi - \eta)} \{y[\xi, \eta] - p'(\eta) + \frac{1}{3}c \cdot (\xi - \eta)^2\}$$

Invertendo i ruoli di  $\xi$  e  $\eta$  si ha anche:

$$p(\eta) = p(\xi) + p'(\xi)(\eta - \xi) + p''(\xi) \frac{(\eta - \xi)^2}{2} + c \cdot \frac{(\eta - \xi)^3}{6}$$

da cui

$$y[\xi, \eta] = \frac{p(\eta) - p(\xi)}{\eta - \xi} = p'(\xi) + p''(\xi) \frac{(\eta - \xi)}{2} + c \cdot \frac{(\eta - \xi)^2}{6}$$

da cui:

$$2y[\xi, \eta] - 2p'(\xi) - p''(\xi)(\eta - \xi) = c \cdot \frac{(\eta - \xi)^2}{3}$$

Quindi sostituendo tale espressione in  $p''(\xi)$ , si ha la tesi, ovvero:

$$p''(\xi) = \frac{2}{\xi - \eta} \{2p'(\xi) + p'(\eta) - 3y[\xi, \eta]\} \quad \blacksquare$$

Applichiamo la proposizione precedente al polinomio  $p_{i-1}$ , avendo scelto

$$\xi = x_i \quad \text{e} \quad \eta = x_{i-1}.$$

Si ha:

$$s''(x_i) = p''_{i-1}(x_i) = \frac{2}{h_i} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} \quad i = 2, \dots, n$$

Applicando, di nuovo, la proposizione precedente con  $\xi = x_i$  e  $\eta = x_{i+1}$ , si ha:

$$s''(x_i) = p''_i(x_i) = \frac{-2}{h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} \quad i = 1, \dots, n-1$$

Ricordando che la spline cubica è una funzione di classe  $C^2$ , nell'intervallo dei nodi, segue che le derivate seconde devono essere continue nei nodi di raccordo cioè:

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1$$

ovvero:

$$\frac{2}{h_i} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} + \frac{2}{h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} = 0$$

da cui, ponendo:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

$$\frac{h_{i+1}}{h_i \cdot h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} + \frac{h_i}{h_i \cdot h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} = 0 \quad (3.41)$$

Posto:

$$\delta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$$

e moltiplicando la (3.41) per

$$\frac{h_i \cdot h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

si ha:

$$(1 - \delta_i)\lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \delta_i\lambda_{i+1} = 3\{(1 - \delta_i)y[x_i, x_{i-1}] + \delta_i y[x_i, x_{i+1}]\}$$

$$i = 2, \dots, n - 1$$

Si è ottenuto un sistema di  $n - 2$  equazioni in  $n$  incognite,  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Essendo il numero di incognite strettamente maggiore del numero di equazioni, possono esistere infinite soluzioni. In altri termini per costruire la spline interpolante relativa ad un insieme di nodi, le condizioni di regolarità non bastano ad individuarla univocamente. È necessario imporre condizioni aggiuntive che specializzino il tipo di spline da costruire (ossia a restringano l'insieme delle soluzioni ammissibili). Una delle spline più utilizzate nelle applicazioni è la **spline naturale**<sup>32</sup>.

La denominazione *naturale*, assegnata a questo tipo particolare di funzione, è dovuta al fatto che lo strumento spline al di fuori dei pesi che lo vincolano, e cioè all'esterno dell'intervallo  $[x_1, x_n]$ , tende naturalmente ad assumere la forma di linea retta e, quindi, la sua derivata seconda deve essere ivi nulla.

Allora, per le condizioni aggiuntive che definiscono la spline cubica naturale interpolante sono:

$$\frac{d^2}{dx^2}s(x_1) = \frac{d^2}{dx^2}s(x_n) = 0,$$

da cui si ha:

$$s''(x_1) = 0 \rightarrow \frac{-2}{h_2}\{2\lambda_1 + \lambda_2 - 3y[x_1, x_2]\} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3y[x_1, x_2]$$

e:

$$s''(x_n) = 0 \rightarrow \frac{2}{h_{n+1}}\{2\lambda_n + \lambda_{n-1} - 3y[x_n, x_{n-1}]\} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_n + \lambda_{n-1} = 3y[x_n, x_{n-1}]$$

---

32

**Definizione 3.17. (Spline naturale di grado  $m$ )**

Una spline  $s$  di grado dispari  $m = 2j - 1$ , relativa all'insieme dei nodi  $K$ , è una **spline naturale** se, in ciascuno dei due intervalli

$$(-\infty, x_1), (x_n, +\infty)$$

coincide con un polinomio di grado minore o uguale a  $j - 1$ . Ciò significa che

$$s^{(h)}(x_1) = s^{(h)}(x_n) = 0, \quad h = j, j + 1, \dots, 2j - 2.$$

La spline cubica naturale soddisfa tali condizioni con  $j = 2$ .

Si è ottenuto il sistema:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3y[x_1, x_2] \\ (1 - \delta_i)\lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \delta_i\lambda_{i+1} = 3\{(1 - \delta_i)y[x_i, x_{i-1}] + \delta_i y[x_i, x_{i+1}]\} \\ 2\lambda_n + \lambda_{n-1} = 3y[x_n, x_{n-1}] \end{cases} \quad i = 2, n-1 \quad (3.42)$$

che, risolto, fornisce il vettore  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ .

Introdotta la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1 - \delta_2) & 2 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - \delta_3) & 2 & \delta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (1 - \delta_{n-1}) & 2 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

nonché la

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1 - \delta_2) & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - \delta_3) & \delta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (1 - \delta_{n-1}) & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

ed il vettore

$$\Delta f = \begin{bmatrix} y[x_1, x_2] \\ y[x_2, x_3] \\ \vdots \\ y[x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

il sistema (3.42) si traduce, in termini matriciali, in:

$$A\lambda = 3B\Delta f \quad (3.46)$$

Poiché la matrice  $A$  è tridiagonale, tale sistema può essere risolto utilizzando l'algoritmo di eliminazione di Gauss specializzato per matrici tridiagonali. Analizziamo, ora, le caratteristiche della matrice  $A$ .

Il determinante della matrice  $A$  risulta essere uguale al prodotto degli autovalori e, per il teorema di Gerschgorin (Teorema A.6, paragrafo A.5.1), gli autovalori di  $A$  cadono tutti nel cerchio di centro 2 e raggio unitario; essi risultano, dunque, tutti diversi da zero, per cui è

$$\det(A) \neq 0$$

cioè esiste una ed una sola soluzione del sistema (3.46).

Per quanto riguarda il *condizionamento*, osservando che:

$$\mu_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 \leq n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \cdot \|A^{-1}\|_1$$

e che

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \left( \min_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^{-1}$$

si ha

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &\leq n \cdot \underbrace{\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|}_2 \cdot \left( \min_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^{-1} = \\ &= 2 \cdot n \cdot \min_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \frac{h_i}{h_{i+1} + h_i}, \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Se

$$h_i = h \quad \forall i = 1, \dots, n$$

si ha

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &\leq 2 \cdot n \cdot \left( \min \left\{ \frac{h}{2h}, \frac{h}{2h} \right\} \right)^{-1} = \\ &= 2 \cdot n \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mu_1(A) \leq 4n$$

Si può dedurre, allora, che la matrice  $A$  è ben condizionata, a meno che i nodi non siano "troppo" vicini o "troppo" lontani.

Inoltre, nell'applicazione dell'algoritmo di eliminazione di Gauss, *non è necessario il pivoting*. Infatti, essendo

$$\forall i = 1, \dots, n \quad 0 < \delta_i < 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 - \delta_i < 1$$

osserviamo, innanzitutto, che la matrice  $A$  risulta essere a diagonale dominante<sup>33</sup> Esaminiamo, poi, i passi del suddetto algoritmo, con riferimento alla matrice  $A$ . Indichiamo con

$$\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$$

<sup>33</sup>Per la definizione di *matrice a diagonale dominante* si rimanda al Cap. 2



il vettore in cui memorizziamo la diagonale superiore di  $A$ , cioè

$$d_1 = 1, \quad d_2 = \delta_2, \dots, d_{n-1} = \delta_{n-1}$$

e con

$$\underline{e} = (e_2, e_3, \dots, e_n)$$

il vettore in cui memorizziamo la diagonale inferiore di  $A$ , cioè

$$e_2 = 1 - \delta_2, \quad e_3 = 1 - \delta_3, \dots, e_n = 1 - \delta_n$$

• **Passo 1**

data la struttura tridiagonale della matrice  $A$ , l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla seconda riga:

$$m_{21} = \frac{e_2}{a_{11}} = \frac{1 - \delta_2}{2}$$

e, quindi,

$$0 < 1 - \delta_2 < 1 \Rightarrow 0 < m_{21} < \frac{1}{2}$$

inoltre

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - m_{21}d_1 = 2 - \underbrace{\frac{1 - \delta_2}{2} \cdot 1}_{< \frac{1}{2}} > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$d_2^{(1)} = d_2 - m_{21} \underbrace{a_{13}}_{=0} = \delta_2 < 1$$

• **Passo 2**

l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla terza riga:

$$m_{32} = \frac{e_3^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1 - \delta_3}{2 - \frac{1 - \delta_2}{2}}$$

ma

$$\left. \begin{array}{l} 0 < 1 - \delta_3 < 1 \\ 2 - \frac{1 - \delta_2}{2} > \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2 - \frac{1 - \delta_2}{2}} < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < m_{32} < \frac{2}{3}$$

ed, inoltre,

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32}d_2^{(1)} > 2 - \delta_2 \frac{2}{3} > 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 1$$

$$d_3^{(2)} = d_3^{(1)} - m_{32} \underbrace{a_{24}^{(1)}}_{=0} = \delta_3 < 1$$

⋮  
⋮

- **Passo  $n - 2$**

l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla  $(n - 1)$ -esima riga:

$$m_{n-1,n-2} = \frac{e_{n-1}^{(n-3)}}{a_{n-2,n-2}^{(n-3)}} = \frac{1 - \delta_{n-1}}{a_{n-2,n-2}^{(n-3)}}$$

ma

$$\left. \begin{array}{l} 0 < 1 - \delta_{n-1} < 1 \\ a_{n-2,n-2}^{(n-3)} > \frac{n-1}{n-2} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_{n-2,n-2}^{(n-3)}} < \frac{n-2}{n-1} \Rightarrow 0 < m_{n-1,n-2} < \frac{n-2}{n-1}$$

ed, inoltre,

$$\begin{aligned} a_{n-1,n-1}^{(n-2)} &= a_{n-1,n-1}^{(n-3)} - m_{n-1,n-2} d_{n-2}^{(n-3)} = 2 - \underbrace{\left( \frac{1 - \delta_{n-1}}{a_{n-2,n-2}^{(n-3)}} \right)}_{< \frac{n-2}{n-1}} \delta_{n-2} > \\ &2 - \frac{n-2}{n-1} > \frac{n}{n-1} \\ d_{n-1}^{(n-2)} &= d_{n-1}^{(n-3)} - m_{n-1,n-2} \underbrace{a_{n-2,n-2}^{(n-3)}}_{=0} = \delta_{n-1} < 1 \end{aligned}$$

- **Passo  $n - 1$**

l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla  $n$ -esima riga:

$$m_{n,n-1} = \frac{e_n^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}$$

ma

$$a_{n-1,n-1}^{(n-2)} > \frac{n}{n-1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} < \frac{n-1}{n}$$

e si ha

$$\begin{aligned} a_{n,n}^{(n-1)} &= 2 - m_{n,n-1} d_{n-1}^{(n-2)} = 2 - \underbrace{\left( \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \right)}_{< \frac{n-1}{n}} \delta_{n-1} > 2 - \frac{n-1}{n} \cdot 1 \\ &= \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Sostanzialmente, all' $i$ -esimo passo dell'algorithmo ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) viene effettuata una sola divisione, nel calcolo del moltiplicatore, in cui il divisore  $D_i$  risulta

$$2 \geq D_i > \frac{i+1}{i} > 1$$

Concludendo si può osservare che l'elemento diagonale, ad ogni passo, è sempre il massimo, in modulo, degli elementi appartenenti alla sua stessa colonna. Pertanto si può utilizzare l'algoritmo di eliminazione di Gauss senza strategia del pivoting.

Riepilogando quanto detto, il procedimento per la costruzione e valutazione, in un valore fissato  $\tilde{x}$ , della funzione spline cubica naturale interpolante un insieme di punti assegnati  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  consiste in:

- Passo 1):** costruzione della matrice  $A$  e del vettore dei termini noti  $3B\Delta f$ ;
- Passo 2):** risoluzione del sistema  $A\lambda = 3B\Delta f$ ;
- Passo 3):** determinazione dell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  a cui  $\tilde{x}$  appartiene;
- Passo 4):** calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante di Hermite, nell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ;
- Passo 5):** valutazione in  $\tilde{x}$ .

Uno schema della procedura per la costruzione della spline cubica naturale interpolante è il seguente:

```

procedure Spline_Nat_Int(in:  $n, x, y, \tilde{x}$ , out:  $s$ )

  /* SCOPO: valutazione, in un fissato punto, della spline naturale cubica
    interpolante, costruita su un insieme di punti assegnati */

  /* SPECIFICHE DEI PARAMETRI: */
  /* PARAMETRI DI INPUT: */
  var:  $n$       : intero          { numero dei punti di }
                                       { interpolazione }
  var:  $x(n)$   : array di reali { nodi di interpolazione }
  var:  $y(n)$   : array di reali { ordinate corrispondenti }
                                       { ai nodi di interpolazione }
  var:  $\tilde{x}$    : reale          { punto di valutazione }
                                       { della spline }

  /* PARAMETRI DI OUTPUT: */
  var:  $s$       : reale          { valore della spline in  $\tilde{x}$  }

```

Procedura 3.9: Algoritmo per la costruzione e valutazione della spline naturale cubica interpolante - continua

*/# INIZIO ISTRUZIONI:*

```

call ordinamento(n, x, y)           { ordinamento dei nodi  $x_i$  e }
                                       { dei valori corrispondenti  $y_i$ ; }
call costruzione(n, x, y, dp, di, ds, df) { costruzione del vettore dei termini noti }
                                       { ( $3B\Delta f$ ) e della matrice dei }
                                       { coefficienti del sistema  $A\lambda = 3B\Delta f$ ; }
call risoluzione(n, dp, di, ds, df, lambda) { risoluzione del sistema costruito }
                                       { mediante l'algoritmo di Gauss, }
                                       { specializzato per matrici tridiagonali; }
call valutazione(n, x, y, lambda, x̃, s) { ricerca binaria dell'intervallo di }
                                       { appartenenza del punto di valutazione }
                                       {  $\tilde{x}$  e valutazione del }
                                       { polinomio che rappresenta la }
                                       { spline nell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ , }
                                       { utilizzando la formula di Newton per il }
                                       { polinomio interpolante di Hermite }

end Spline_Nat_Int

```

Procedura 3.9: Algoritmo per la costruzione e valutazione della spline naturale cubica interpolante - fine

Nella procedura precedente i parametri  $dp$ ,  $di$ ,  $ds$  rappresentano, rispettivamente, la diagonale principale, la diagonale inferiore e la superiore di  $A$ ,  $df$  contiene il vettore delle differenze divise,  $\Delta f$  ed il vettore  $lambda$ , la soluzione del sistema  $A\lambda = 3B\Delta f$ . La formula di Newton per il polinomio interpolante di Hermite, di grado al più tre, tra due nodi consecutivi,  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , da valutare in  $\tilde{x}$ , risulta la seguente:

$$\begin{aligned}
 s &= a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^2(x - x_{i+1}) \\
 a_0 &= y[x_i] \\
 a_1 &= \lambda_i = y[x_i, x_i] \\
 a_2 &= y[x_i, x_i, x_{i+1}] \\
 a_3 &= y[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]
 \end{aligned}$$

Detto  $\tilde{x}$  il punto di valutazione assegnato in input, se:

$$\begin{aligned} \tilde{x} < x_1 &\Rightarrow \text{si valuta l'equazione della retta di coefficiente angolare } \lambda_1 \\ s &= y(1) + (\tilde{x} - x(1)) * \lambda_1 \\ \tilde{x} > x_n &\Rightarrow \text{si valuta l'equazione della retta di coefficiente angolare } \lambda_n \\ s &= y(n) + (\tilde{x} - x(n)) * \lambda_n \end{aligned}$$

dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_n$  rappresentano i valori che la derivata prima assume, rispettivamente, nel primo e nell'ultimo nodo.

Infine, per quanto riguarda la complessità di tempo e, quindi l'efficienza, il numero di operazioni richieste dal metodo di eliminazione di Gauss per matrici tridiagonali è:

$$T(n) = O(n) \text{ flop}$$

Concludendo, l'algoritmo per la costruzione e valutazione della spline cubica naturale interpolante un insieme di nodi assegnati, richiede una complessità di tempo che si ottiene, essenzialmente, stimando il numero di operazioni floating point coinvolte da ciascuna procedura, nonché il numero di confronti necessari per la ricerca binaria dell'intervallo di appartenenza del punto di valutazione:

- risoluzione di un sistema tridiagonale  $\Rightarrow T(n) = O(n) \text{ flop}$
- ricerca binaria dell'intervallo di appartenenza del punto di valutazione  $\Rightarrow T(n) = O(\log_2 n) \text{ confronti}$
- costruzione del polinomio interpolante  $\Rightarrow T(n) = O(n^2) \text{ flop}$
- valutazione (algoritmo di Horner)  $\Rightarrow T(n) = O(n) \text{ flop}$

♣ **Esempio 3.25.** Si vuole costruire una spline cubica interpolante 3 punti  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Costruiamo la spline intervallo per intervallo.

In ciascun intervallo fra due nodi consecutivi  $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$  la spline  $s(x)$  deve essere un polinomio interpolante di Hermite, espresso dalla seguente formula di Newton:

$$\begin{aligned} s(x) \equiv p_i(x) &= \underbrace{y[x_i]}_{a_i} + \underbrace{\lambda_i}_{b_i} (x - x_i) + \underbrace{y[x_i, x_i, x_{i+1}]}_{c_i} (x - x_i)^2 + \\ &+ \underbrace{y[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]}_{d_i} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) \in \Pi_3, \\ &x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

dove si pone:

$$\lambda_i = p'_i(x_i), \quad i = 1, 2, 3$$

In ciascuno dei due sottointervalli, dunque, occorre determinare i quattro coefficienti  $a_i, b_i, c_i, d_i$ , e quindi complessivamente, occorre determinare 8 coefficienti.

Applichiamo la proposizione 3.3 al polinomio  $p_{i-1}$ , avendo scelto  $\xi = x_i$  e  $\eta = x_{i-1}$ . Si ha:

$$s''(x_i) = p''_{i-1}(x_i) = \frac{2}{h_i} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} \quad i = 2, 3$$

Applicando, di nuovo, la proposizione 3.3, con  $\xi = x_i$  e  $\eta = x_{i+1}$ , si ha:

$$s''(x_i) = p''_i(x_i) = \frac{-2}{h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} \quad i = 1, 2$$

Ricordando che la spline cubica è una funzione di classe  $C^2$ , nell'intervallo dei nodi, segue che le derivate seconde devono essere continue nei nodi di raccordo cioè:

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = 2$$

ovvero:

$$\frac{2}{h_i} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} + \frac{2}{h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} = 0$$

da cui, ponendo:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 2, 3$$

$$\frac{h_{i+1}}{h_i \cdot h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} + \frac{h_i}{h_i \cdot h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} = 0 \quad (3.47)$$

Posto:

$$\delta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 2$$

e moltiplicando la (3.47) per

$$\frac{h_i \cdot h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

si ha:

$$(1 - \delta_2)\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta_2\lambda_3 = 3\{(1 - \delta_2)y[x_2, x_1] + \delta_2y[x_2, x_3]\}, \quad i = 2$$

Si è ottenuto un sistema di *una* equazione in *tre* incognite,  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ . Le due equazioni aggiuntive si ottengono imponendo che la spline sia una spline naturale, cioè:

$$\frac{d^2}{dx^2}s(x_1) = \frac{d^2}{dx^2}s(x_3) = 0,$$

da cui si ha:

$$s''(x_1) = 0 \rightarrow \frac{-2}{h_2}\{2\lambda_1 + \lambda_2 - 3y[x_1, x_2]\} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3y[x_1, x_2]$$

e:

$$s''(x_3) = 0 \rightarrow \frac{2}{h_3}\{2\lambda_3 + \lambda_2 - 3y[x_3, x_2]\} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_3 + \lambda_2 = 3y[x_3, x_2]$$

Si è ottenuto il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3y[x_1, x_2] \\ (1 - \delta_2)\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta_2\lambda_3 = 3\{(1 - \delta_2)y[x_2, x_1] + \delta_2y[x_2, x_3]\} \\ 2\lambda_3 + \lambda_2 = 3y[x_3, x_2] \end{cases} \quad (3.48)$$

che, risolto, fornisce il vettore  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Introdotta la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ (1 - \delta_2) & 2 & \delta_2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

nonché la

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 - \delta_2) & \delta_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

ed il vettore

$$\Delta f = \begin{bmatrix} y[x_1, x_2] \\ y[x_2, x_3] \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

il sistema (3.48) si traduce, in termini matriciali, in:

$$A\lambda = 3B\Delta f \quad (3.52)$$

A partire dal vettore  $\lambda$ , soluzione del sistema (3.52), si determinano i coefficienti del polinomio interpolante di Hermite, nella formula di Newton, di grado al più tre, tra due nodi consecutivi,  $x_i$  e  $x_{i+1}$ ,

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

con

$$\begin{aligned} a_i &= y[x_i] \\ b_i &= \lambda_i = y[x_i, x_i] \\ c_i &= y[x_i, x_i, x_{i+1}] \\ d_i &= y[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] \end{aligned}$$

per  $i = 1, 2$ .





### 3.4.3 Un altro metodo costruttivo per la spline cubica naturale interpolante

Assegnati i punti di coordinate  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ , per costruire<sup>34</sup> una spline cubica interpolante costruiamo il polinomio che rappresenta la spline intervallo per intervallo. In ciascun intervallo fra due nodi consecutivi

$$[x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

la spline  $s$  deve essere un polinomio di grado al più tre:

$$\begin{aligned} s(x) &\equiv p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \in \Pi_3 \\ x &\in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

In ciascun sottointervallo, dunque, occorre determinare i quattro coefficienti  $a_i, b_i, c_i, d_i$ , e quindi complessivamente occorre determinare  $4 \cdot (n - 1)$  coefficienti.

Per come abbiamo definito la spline cubica, dobbiamo richiedere che  $s$  sia una funzione continua insieme con la sua derivata prima e seconda. Quindi dobbiamo imporre:

A)  $n-2$  condizioni di *regolarità* per  $s$  in  $x_i, i = 2, \dots, n - 1$ :

$$p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (3.53)$$

B)  $n-2$  condizioni di *regolarità* per  $s'$  in  $x_i, i = 2, \dots, n - 1$ :

$$\frac{d}{dx}p_{i-1}(x_i) = \frac{d}{dx}p_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (3.54)$$

C)  $n-2$  condizioni di *regolarità* per  $s''$  in  $x_i, i = 2, \dots, n - 1$ :

$$\frac{d^2}{dx^2}p_{i-1}(x_i) = \frac{d^2}{dx^2}p_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (3.55)$$

Infine, affinché  $s$  interpoli i punti assegnati, occorre imporre:

D)  $n$  condizioni di interpolazione:

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n \rightarrow \begin{cases} p_1(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} \\ p_{n-1}(x_n) = y_n \end{cases} \quad (3.56)$$

<sup>34</sup>[7]

In definitiva per determinare la spline cubica  $s$  interpolante gli  $n$  punti assegnati occorre determinare i  $4(n-1) = 4n - 4$  coefficienti  $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, \dots, n-1$  a partire dalle  $3 \cdot (n-2) + n = 4n - 6$  condizioni (3.53, 3.54, 3.55, 3.56).

Tenendo conto che:

$$\frac{d}{dx}p_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}p_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

e che dalle condizioni di interpolazione (D) si ha:

$$\begin{cases} a_i = p_i(x_i) = y_i & i = 1, n-1 \\ a_n = a_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 \end{cases} \quad (3.57)$$

imponendo

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

e rispettivamente le (A), (B) e (C) si ottiene:

$$\begin{cases} p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i) \\ \frac{d}{dx}p_{i-1}(x_i) = \frac{d}{dx}p_i(x_i) \\ \frac{d^2}{dx^2}p_{i-1}(x_i) = \frac{d^2}{dx^2}p_i(x_i) \end{cases} \implies \begin{cases} a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3 = y_i \\ b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 = b_i \\ 2c_{i-1} + 6d_{i-1}h_{i-1} = 2c_i \end{cases}$$

per  $i = 2, \dots, n-1$ ; da cui:

$$\begin{cases} b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3 = y_i - y_{i-1} \\ b_{i-1} - b_i + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 = 0 \\ 2c_{i-1} + 6d_{i-1}h_{i-1} - 2c_i = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - c_{i-1}h_{i-1} - d_{i-1}h_{i-1}^2 \\ b_{i-1} - b_i + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 = 0 \\ d_{i-1} = \frac{1}{6h_{i-1}}(2c_i - 2c_{i-1}) \end{cases}$$

Per semplificare le notazioni poniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}p_i(x_i) &= \bar{y}_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{d^2}{dx^2}p_{n-1}(x_n) &= \bar{y}_n, \end{aligned} \quad (3.58)$$

con  $\bar{y}_i$  incognite da determinare. Poiché, si ha:

$$2c_i = \frac{d^2}{dx^2}p_i(x_i) = \bar{y}_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

il sistema si riscrive nel modo seguente:

$$\begin{cases} b_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{1}{2}h_{i-1}\bar{y}_{i-1} - \frac{1}{6}h_{i-1}(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}), \\ b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 = b_i \\ d_{i-1} = \frac{1}{6h_{i-1}}(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}), \end{cases}$$

In tale sistema, sostituendo le espressioni ottenute dei coefficienti  $b_i$ ,  $b_{i-1}$ ,  $c_{i-1}$  e  $d_{i-1}$  nella seconda equazione si ha:

$$h_{i-1}\bar{y}_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\bar{y}_i + h_i\bar{y}_{i+1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (3.59)$$

Si è ottenuto il sistema lineare di  $n - 2$  equazioni nelle  $n$  incognite  $\bar{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Essendo il numero di incognite strettamente maggiore del numero di equazioni, possono esistere infinite soluzioni. In altri termini per costruire la spline interpolante relativa ad un insieme di nodi, le condizioni di regolarità non bastano ad individuarla univocamente. È necessario imporre condizioni aggiuntive che specializzino il tipo di spline da costruire (ossia restringano l'insieme delle soluzioni ammissibili). Allora, per le condizioni aggiuntive che definiscono la spline cubica naturale interpolante:

$$\frac{d^2}{dx^2}s(x_1) = \frac{d^2}{dx^2}s(x_n) = 0,$$

si ha:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_n = 0,$$

per cui il sistema (3.59) si riduce ad un sistema lineare di  $n - 2$  equazioni in  $n - 2$  incognite del tipo:

$$F\bar{y} = g, \quad (3.60)$$

con:

$$F = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

matrice dei coefficienti tridiagonale, simmetrica e a diagonale dominante,

$$\bar{y} = (\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1})^T,$$

e

$$g = 6(y[x_2, x_3] - y[x_1, x_2], \dots, y[x_{n-1}, x_n] - y[x_{n-2}, x_{n-1}])^T.$$

Il sistema (3.60) può essere risolto utilizzando l'algoritmo di eliminazione di Gauss specializzato per matrici tridiagonali. Analizziamo, ora, le caratteristiche della matrice  $F$ . Per quanto riguarda il *condizionamento*, osservando che:

$$\mu_1(F) = \|F\|_1 \|F^{-1}\|_1 \leq (n-2) \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n-2} |f_{ij}| \cdot \|F^{-1}\|_1$$

e che

$$\|F^{-1}\|_1 \leq \left( \min_{1 \leq i, j \leq n-2} |f_{ij}| \right)^{-1}$$

si ha

$$\mu_1(F) \leq (n-2) \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n-2} |f_{ij}| \cdot \left( \min_{1 \leq i, j \leq n-2} |f_{ij}| \right)^{-1}.$$

Ma

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i, j \leq n-2} |f_{ij}| &= \max_{1 \leq i, j \leq n-2} \{2(h_i + h_{i+1})\} \\ \min_{1 \leq i, j \leq n-2} |f_{ij}| &= \min_{1 \leq i, j \leq n-2} h_i; \end{aligned}$$

se, allora

$$h_i = h \quad \forall i = 1, \dots, n-2$$

si ha

$$\begin{aligned} \mu_1(F) &\leq (n-2) \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n-2} \{2(h_i + h_{i+1})\} \cdot \left( \min_{1 \leq i, j \leq n-2} h_i \right)^{-1} \\ &= (n-2) \cdot \left( \frac{4h}{h} \right) \end{aligned}$$

ovvero

$$\mu_1(F) \leq 4(n-2)$$

Si può dedurre, dunque, che la matrice  $F$  è ben condizionata, a meno che i nodi non siano "troppo" vicini o "troppo" lontani.

Inoltre, nell'applicazione dell'algoritmo di eliminazione di Gauss, *non è necessario il pivoting*. Infatti, poiché

$$\forall i = 1, \dots, n-2 \quad 2(h_i + h_{i+1}) > h_i \quad \text{e} \quad 2(h_i + h_{i+1}) > h_{i+1},$$

essendo

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

e, dunque,  $h_i > 0, \forall i = 1, \dots, n - 2$ , osserviamo, innanzitutto, che la matrice  $F$  risulta essere a diagonale dominante. Esaminiamo, poi, i passi del suddetto algoritmo, con riferimento alla matrice  $F$ . Indichiamo con

$$\underline{g} = (g_2, \dots, g_{n-2})$$

il vettore in cui memorizziamo la diagonale superiore di  $F$ , cioè

$$g_2 = h_2, \quad g_3 = h_3, \dots, g_{n-2} = h_{n-2}$$

e con

$$\underline{l} = (l_2, \dots, l_{n-2})$$

il vettore in cui memorizziamo la diagonale inferiore di  $F$ , cioè

$$l_2 = h_2, \quad l_3 = h_3, \dots, l_{n-2} = h_{n-2}$$

• **Passo 1**

data la struttura tridiagonale della matrice  $F$ , l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla seconda riga:

$$m_{21} = \frac{l_2}{f_{11}} = \frac{h_2}{2(h_1 + h_2)}$$

e, quindi,

$$m_{21} < 1 \tag{3.61}$$

inoltre

$$\begin{aligned} f_{22}^{(1)} &= f_{22} - m_{21}g_2 = 2(h_2 + h_3) - \underbrace{\frac{h_2}{2(h_1 + h_2)}}_{<1} \cdot h_2 \\ &> 2h_2 + 2h_3 - h_2 = h_2 + 2h_3 \end{aligned}$$

$$g_3^{(1)} = \underbrace{g_3}_{=h_3} - m_{21} \underbrace{f_{13}}_{=0} = h_3$$

Ovviamente risulta

$$\begin{aligned} f_{22}^{(1)} &> h_2 \\ f_{22}^{(1)} &> h_3 \end{aligned}$$

- **Passo 2**

l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla terza riga:

$$m_{32} = \frac{l_3^{(1)}}{f_{22}^{(1)}} = \frac{h_3}{2(h_2 + h_3) - \frac{h_2}{2(h_1 + h_2)} \cdot h_2}$$

ma

$$f_{22}^{(1)} > h_3 \Rightarrow m_{32} < 1$$

ed, inoltre,

$$\begin{aligned} f_{33}^{(2)} &= f_{33}^{(1)} - m_{32}g_3^{(1)} = 2(h_3 + h_4) - m_{32} \cdot h_3 \\ &> 2h_3 + 2h_4 - h_3 = h_3 + 2h_4 \end{aligned}$$

$$g_4^{(2)} = \underbrace{g_4^{(1)}}_{=h_4} - m_{32} \underbrace{f_{24}^{(1)}}_{=0} = h_4$$

Ovviamente risulta

$$f_{33}^{(2)} > h_3$$

$$f_{33}^{(2)} > h_4$$

⋮  
⋮

- **Passo  $n - 4$**

l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla  $(n - 3)$ -esima riga:

$$m_{n-3,n-4} = \frac{l_{n-3}^{(n-5)}}{f_{n-4,n-4}^{(n-5)}} = \frac{h_{n-3}}{2(h_{n-4} + h_{n-3}) - m_{n-4,n-5} \cdot h_{n-4}}$$

ma

$$f_{n-4,n-4}^{(n-5)} > h_{n-3} \Rightarrow m_{n-3,n-4} < 1$$

ed, inoltre,

$$\begin{aligned} f_{n-3,n-3}^{(n-4)} &= f_{n-3,n-3}^{(n-5)} - m_{n-3,n-4}g_{n-3}^{(n-5)} \\ &= 2(h_{n-3} + h_{n-2}) - m_{n-3,n-4} \cdot h_{n-3} > h_{n-3} + 2h_{n-2} \end{aligned}$$

$$g_{n-2}^{(n-4)} = \underbrace{g_{n-2}^{(n-5)}}_{=h_{n-2}} - m_{n-3,n-4} \underbrace{f_{n-4,n-2}^{(n-5)}}_{=0} = h_{n-2}$$

Ovviamente risulta

$$\begin{aligned} f_{n-3,n-3}^{(n-4)} &> h_{n-3} \\ f_{n-3,n-3}^{(n-4)} &> h_{n-2} \end{aligned}$$

• **Passo  $n - 3$**

l'unico moltiplicatore non nullo è quello relativo alla  $(n - 2)$ esima riga:

$$m_{n-2,n-3} = \frac{l_{n-2}^{(n-4)}}{f_{n-3,n-3}^{(n-4)}} = \frac{h_{n-2}}{2(h_{n-3} + h_{n-2}) - m_{n-3,n-4} \cdot h_{n-3}}$$

ma

$$f_{n-3,n-3}^{(n-4)} > h_{n-2} \Rightarrow m_{n-2,n-3} < 1$$

e si ha

$$\begin{aligned} f_{n-2,n-2}^{(n-3)} &= f_{n-2,n-2}^{(n-4)} - m_{n-2,n-3} g_{n-2}^{(n-4)} \\ &= 2(h_{n-2} + h_{n-1}) - m_{n-2,n-3} \cdot h_{n-2} > h_{n-2} + 2h_{n-1} \end{aligned}$$

Ovviamente risulta

$$\begin{aligned} f_{n-2,n-2}^{(n-3)} &> h_{n-2} \\ f_{n-2,n-2}^{(n-3)} &> h_{n-1} \end{aligned}$$

Concludendo si può osservare che l'elemento diagonale, ad ogni passo, è sempre il massimo, in modulo, degli elementi appartenenti alla sua stessa colonna. Pertanto si può utilizzare l'algoritmo di eliminazione di Gauss senza strategia del pivoting.

Inoltre, il determinante della matrice  $F$  risulta essere uguale al prodotto degli elementi diagonali della matrice risultante all'ultimo passo del metodo di eliminazione di Gauss; ciascuno di essi, per quanto dimostrato, è positivo, essendo, infatti,

$$\begin{aligned} f_{11}^{(n-3)} &= 2(h_1 + h_2) \\ f_{ii}^{(n-3)} &= 2(h_i + h_{i+1}) - m_{i,i-1} \cdot h_i > h_i \quad \forall i = 2, \dots, n-2 \end{aligned}$$

e gli  $h_i > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-2$ , per definizione, nell'ipotesi

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Ne segue, dunque, che

$$\det(F) = \prod_{i=1}^{n-2} f_{ii}^{(n-3)} > 0$$

cioè esiste una ed una sola soluzione del sistema (3.60).

Riepilogando quanto detto, il procedimento per la costruzione e valutazione in un fissato valore  $\tilde{x}$  della funzione spline cubica naturale interpolante un insieme di punti assegnati  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  consiste in:

- Passo 1):** costruzione della matrice  $F$  e del vettore  $g$ ;  
**Passo 2):** risoluzione del sistema  $F\bar{y} = g$ ;  
**Passo 3):** determinazione dell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  a cui  $\tilde{x}$  appartiene;  
**Passo 4):** calcolo dei coefficienti  $a_i, b_i, c_i, d_i$ ;  
**Passo 5):** valutazione in  $\tilde{x}$ .

Uno schema della procedura per la costruzione della spline cubica naturale interpolante è il seguente:

```

procedure Spline_Nat_Int(in:  $n, x, y, \tilde{x}$ , out:  $s$ )
  /# SCOPO: valutazione, in un fissato punto, della spline naturale cubica
  interpolante, costruita su un insieme di punti assegnati

  /# SPECIFICHE DEI PARAMETRI:
  /# PARAMETRI DI INPUT:
  var:  $n$       : intero      { numero dei punti di
                               { interpolazione }
  var:  $x(n)$   : array di reali { nodi di interpolazione }
  var:  $y(n)$   : array di reali { ordinate corrispondenti }
                               { ai nodi di interpolazione }
  var:  $\tilde{x}$     : reale        { punto di valutazione }
                               { della spline }

  /# PARAMETRI DI OUTPUT:
  var:  $s$       : reale        { valore della spline in  $\tilde{x}$  }

```

Procedura 3.10: Algoritmo per la costruzione e valutazione della spline naturale cubica interpolante - continua



*/# INIZIO ISTRUZIONI:*

```

call Coeff_F(n, x, e, f, m)           { costruzione della matrice F }
call Coeff_g(n, x, y, g)             { costruzione del vettore g }
call Gauss_Trid(n, e, f, m, g,  $\bar{y}$ )   { risoluzione del sistema }
                                         {  $F\bar{y} = g$  mediante }
                                         { l'algoritmo di Gauss, }
                                         { specializzato per matrici }
                                         { tridiagonali }

call Ric_Bin(n, x,  $\tilde{x}$ , i)           { determinazione }
                                         { dell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  }
                                         { a cui  $\tilde{x}$  appartiene }

call Coeff_Spline(xi, xi+1, yi, yi+1,  $\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}$ ,
                    ai, bi, ci, di)   { calcolo dei coefficienti }
                                         {  $a_i, b_i, c_i, d_i$  }

call Horner_Spline(xi,  $\tilde{x}$ , ai, bi, ci, di, s, n) { s è la valutazione della spline in  $\tilde{x}$  }

end Spline_Nat_Int
    
```

Procedura 3.10: Algoritmo per la costruzione e valutazione della spline naturale cubica interpolante - fine

Risolto il sistema, si determinano i coefficienti del polinomio che rappresenta la spline in ciascun intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  mediante le:

$$\left. \begin{aligned}
 a_i &= y_i \\
 b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{1}{6}(\bar{y}_{i+1} + 2\bar{y}_i)h_i \\
 c_i &= \frac{1}{2}\bar{y}_i \\
 d_i &= \frac{1}{6h_i}(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)
 \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n - 1. \quad (3.62)$$

Infine, per quanto riguarda la complessità di tempo e, quindi l'efficienza, il numero di operazioni richieste dal metodo di eliminazione di Gauss per matrici tridiagonali è:

$$T(n) = O(n) \text{ flop}$$

Concludendo, l'algoritmo per la costruzione e valutazione della spline cubica naturale interpolante un insieme di nodi assegnati, richiede una complessità di tempo che si ottiene, essenzialmente, stimando il numero di operazioni floating point coinvolte da ciascuna procedura, nonché il numero di confronti necessari per la ricerca binaria dell'intervallo di appartenenza del punto di valutazione:

- risoluzione di un sistema tridiagonale  $\Rightarrow T(n) = O(n)$  flop
- ricerca binaria dell'intervallo di appartenenza del punto di valutazione  $\Rightarrow T(n) = O(\log_2 n)$  confronti
- costruzione del polinomio interpolante  $\Rightarrow T(n) = O(n^2)$  flop
- valutazione (algoritmo di Horner)  $\Rightarrow T(n) = O(n)$  flop

♣ **Esempio 3.26.** Si vuole costruire una spline cubica interpolante 3 punti  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Costruiamo la spline intervallo per intervallo.

In ciascun intervallo fra due nodi consecutivi  $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$  la spline  $s(x)$  deve essere un polinomio di grado al più tre:

$$s(x) \equiv p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \in \Pi_3, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2$$

In ciascuno dei due sottointervalli, dunque, occorre determinare i quattro coefficienti  $a_i, b_i, c_i, d_i$ , e quindi complessivamente occorre determinare 8 coefficienti.

Per come abbiamo definito la spline cubica, dobbiamo richiedere che  $s(x)$  sia una funzione continua insieme con la sua derivata prima e seconda nell'intervallo  $[x_1, x_3]$ . I due sottointervalli si raccordano nel nodo  $x_2$ , e quindi dobbiamo richiedere la regolarità della funzione  $s(x)$  e della sua derivata prima e seconda solo nel nodo  $x_2$ . Allora:

A) 1 condizione di *regolarità* per  $s(x)$  in  $x_2$ :

$$p_1(x_2) = p_2(x_2), \quad (3.63)$$

B) 1 condizione di *regolarità* per  $s'(x)$  in  $x_2$ :

$$\frac{d}{dx}p_1(x_2) = \frac{d}{dx}p_2(x_2), \quad (3.64)$$

C) 1 condizione di *regolarità* per  $s''(x)$  in  $x_2$ :

$$\frac{d^2}{dx^2}p_1(x_2) = \frac{d^2}{dx^2}p_2(x_2), \quad (3.65)$$

Infine, affinché  $s(x)$  interpoli i punti assegnati, occorre imporre:

D) 3 condizioni di interpolazione:

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, 3 \rightarrow \begin{cases} p_1(x_1) = y_1 \\ p_2(x_2) = y_2 \\ p_2(x_3) = y_3 \end{cases} \quad (3.66)$$

In definitiva per determinare la funzione spline cubica  $s(x)$  interpolante i tre punti assegnati occorre determinare gli otto coefficienti  $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2$  a partire dalle 6 condizioni (3.63-3.66). Poniamo:

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 1, 2$$

utilizzando le (3.63), (3.64), (3.65) si ha:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = a_2 \\ b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 h_1 = 2c_2 \end{cases} \quad (3.67)$$

e, dalle (3.66):

$$\begin{cases} a_i = y_i \quad i = 1, 2 \\ a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3 = y_3 \end{cases} \quad (3.68)$$

Il sistema (3.67), insieme alle condizioni (3.68), diventa:

$$\begin{cases} b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = y_2 - y_1 \\ b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3 = y_3 - y_2 \\ b_1 - b_2 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = 0 \\ 2c_1 + 6d_1 h_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - d_1 h_1^2 \\ b_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - c_2 h_2 - d_2 h_2^2 \\ b_1 - b_2 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = 0 \\ d_1 = \frac{1}{6h_1} [2c_2 - 2c_1] \end{cases} \quad (3.69)$$

Quindi, sostituendo nella terza equazione le espressioni ottenute per  $b_1, b_2, d_1$ :

$$\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} + c_2(h_1 + h_2) - \frac{h_1}{6}[2c_2 - 2c_1] + d_2 h_2^2 = 0$$

da cui semplificando:

$$\frac{y_2 - y_1}{h_1} + \frac{y_3 - y_2}{h_2} + \frac{2}{3}h_1 c_2 + c_2 h_2 + \frac{1}{3}h_1 c_1 + d_2 h_2^2 = 0 \quad (3.70)$$

Quest'ultima equazione coinvolge tre incognite:  $c_1, c_2$  e  $d_2$ ; questo vuol dire che possono esistere infinite soluzioni al problema. Per garantire l'unicità della soluzione dobbiamo aggiungere altre due condizioni. In genere si impongono condizioni sulla derivata prima o seconda di  $s(x)$  nei nodi estremi  $x_1$  e  $x_3$ ; in base al tipo di condizioni richieste di solito si distinguono vari tipi di spline; ad esempio si parla di **spline cubica naturale** se si impone che:

$$\frac{d^2}{dx^2} s(x_1) = 0 \quad \frac{d^2}{dx^2} s(x_3) = 0;$$

Costruiamo quindi la spline cubica naturale. In questo caso dobbiamo imporre che:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} s(x_1) &= \frac{d^2}{dx^2} p_1(x_1) = 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} s(x_3) &= \frac{d^2}{dx^2} p_2(x_3) = 2c_2 + 6d_2 h_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dalla prima delle (3.71), poiché:

$$\frac{d^2}{dx^2} p_1(x_1) = c_1$$

ricaviamo:

$$c_1 = 0$$

Dalla seconda delle (3.71) ricaviamo  $d_2$ :

$$d_2 = \frac{-c_2}{3h_2}$$

Sostituendo nella (3.70) si ha:

$$\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} + \frac{2}{3} c_2 (h_1 + h_2) = 0$$

Da cui si ricava  $c_2$ :

$$c_2 = \frac{2}{3} \left( \frac{y_1 - y_2}{h_1} - \frac{y_2 - y_3}{h_2} \right) / (h_1 + h_2)$$

e successivamente  $d_2$ . Infine dalle (3.69) si ottengono  $b_1$ ,  $b_2$  e  $d_1$ . ♣

Come è stato osservato la funzione spline cubica descrive matematicamente lo strumento *spline* che sin dall'antichità i costruttori delle carene delle navi usavano per tracciarne il profilo. La posizione assunta dallo strumento flessibile e di legno, quando veniva fissato in certi punti, era quella corrispondente ad una situazione di equilibrio. Ci aspettiamo quindi che in quella posizione sia minima l'energia del sistema "*spline + pesi*".

In effetti l'equivalenza tra lo strumento meccanico e la funzione matematica sussiste ancora una volta. La funzione spline cubica naturale interpolante è quella funzione che, tra tutte le funzioni interpolanti un prefissato insieme di nodi, continue con le derivate prime e seconde, minimizza un funzionale "energia" del tipo:

$$E(f) = \int_{x_1}^{x_n} [f''(x)]^2 dx \quad f \in C^2[x_1, x_n]$$

Indicato con  $\eta_3(K)$  l'insieme delle spline naturali cubiche relative all'insieme

$$K = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\},$$

con  $x_0 = -\infty$  e  $x_{n+1} = +\infty$ , sussiste il seguente:

**Teorema 3.5.** *Assegnati i nodi:*

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

sia  $g \in C^2([a, b])$ , una funzione interpolante i punti  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ :

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Sia  $s \in \eta_3(K)$  la spline cubica naturale interpolante, costruita sull'insieme

$$K = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\},$$

con  $x_0 = -\infty$  e  $x_{n+1} = +\infty$ , tale che

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Allora <sup>35</sup>

$$E(s) = \int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq E(g) = \int_a^b [g''(x)]^2 dx$$

$\forall g \in C^2([a, b])$  ed, in particolare, l'uguaglianza vale se, e solo se,  $g \equiv s$  in  $[a, b]$ .<sup>36</sup>

**Dimostrazione** Posto  $f = g - s$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''(x)]^2 dx &= \int_a^b [s''(x) + f''(x)]^2 dx = \\ &= \int_a^b [s''(x)]^2 dx + \int_a^b [f''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b [s''(x) \cdot f''(x)] dx \end{aligned}$$

Dimostriamo, ora, che

$$\int_a^b [s''(x) \cdot f''(x)] dx = 0$$

<sup>35</sup>Per semplicità viene riportato solo il risultato relativo alla spline cubica. Il teorema sussiste, piú in generale, per una qualunque spline di grado dispari  $k = 2j + 1$  e in tal caso il ruolo svolto dalla derivata seconda in  $E$  viene svolto dalla derivata di ordine  $j$ , laddove il minimo del funzionale  $E(s)$  viene definito tra tutte le funzioni  $g \in C^j(\mathbb{R})$ , cioè continue con le derivate fino all'ordine  $j$ .

<sup>36</sup>Si osserva che, nell'ipotesi:

$$|s'(x)| < 1 \Rightarrow |s'(x)|^2 \ll 1$$

il funzionale  $E(s)$  può essere interpretato come il funzionale energia relativo alla posizione di equilibrio dello strumento *spline*, in cui, ricordando il significato assunto nella nota (28),  $M(x)$  indica il momento flettente del listello,  $E$  il modulo di Young del materiale ed  $I$  il momento di inerzia del segmento di spline considerato rispetto ad un opportuno punto:

$$E(s) \approx \int_{x_1}^{x_n} \frac{s''(x)}{(1 + (s'(x))^2)^{3/2}} dx = \int_{x_i}^{x_n} \frac{1}{EI} M(x) dx$$

Risulta verificato che lo strumento spline, una volta costretto a passare per certi punti fissi, è effettivamente quello la cui posizione di equilibrio, minimizza un'energia.

da cui si avrà, necessariamente, che

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''(x)]^2 dx$$

ovvero la tesi.

Integrando per parti l'integrale

$$\int_a^b [s'' \cdot f''] dx$$

si ottiene

$$\int_a^b [s''(x) \cdot f''(x)] dx = [f'(x) \cdot s''(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) s'''(x) dx$$

Essendo  $s$  una spline naturale cubica, il primo termine è nullo, dall'annullarsi di  $s''$  in  $a$  ed in  $b$ ; applicando la proprietà additiva degli integrali in  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$  al secondo termine, segue:

$$\int_a^b [s'' \cdot f''] dx = - \left[ \int_a^{x_1} f' \cdot s''' dx + \int_{x_1}^{x_2} f' \cdot s''' dx + \dots + \int_{x_n}^b f' \cdot s''' dx \right] \quad (3.72)$$

Poiché  $s$  è una spline naturale cubica, in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  essa è rappresentata da un polinomio di terzo grado, la cui derivata terza è una costante; in particolare si deduce che:

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n \Rightarrow s'''(x) = q_i = s'''(x_i)_+ = s'''(x_{i+1})_-$$

dove  $s'''(x_i)_+$  è la derivata destra calcolata in  $x_i$  ed, analogamente,  $s'''(x_{i+1})_-$  è la derivata sinistra in  $x_{i+1}$ . Segue, dunque, dalla (3.72):

$$\begin{aligned} &= - \left[ q_0 \int_a^{x_1} f'(x) dx + q_1 \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx + \dots \right] = \\ &= - [-f(a) s'''(a)_+ + f(x_1) [s'''(x_1)_- - s'''(x_1)_+] + \\ &+ f(x_2) [s'''(x_2)_- - s'''(x_2)_+] + \dots] = \\ &= - \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i) [s'''(x_i)_- - s'''(x_i)_+] + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{[f(b) s'''(b)_- - f(a) s'''(a)_+] }_{=0} \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

laddove l'ultimo termine si annulla poiché:

$$\text{se } b \equiv x_n \text{ allora } f(x_n) = g(x_n) - s(x_n) = 0$$

$$\text{se } a \equiv x_1 \text{ allora } f(x_1) = g(x_1) - s(x_1) = 0$$

$$\text{se } b < x_n \text{ allora } s'''(b) = 0 \text{ (spline naturale cubica)}$$

$$\text{se } a > x_1 \text{ allora } s'''(a) = 0 \text{ (spline naturale cubica)}$$

Si consideri, ora, la differenza

$$s'''(x_i)_- - s'''(x_i)_+;$$

siano  $p_i$  e  $p_{i+1}$  i due polinomi rappresentanti la spline nell'intervallo  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$  rispettivamente. Poiché

$$\left. \begin{aligned} p_i(x_i) &= p_{i+1}(x_i) \\ p_i'(x_i) &= p_{i+1}'(x_i) \\ p_i''(x_i) &= p_{i+1}''(x_i) \end{aligned} \right) \Rightarrow p_i(x) - p_{i+1}(x) \text{ ha, in } x_i, \text{ uno zero di molteplicità } 3$$

Segue, poi, dalla formula di Taylor, che

$$p_i(x) - p_{i+1}(x) = a_i(x - x_i)^3$$

e, dunque,

$$p_i'''(x_i) - p_{i+1}'''(x_i) = 6a_i$$

con

$$\begin{aligned} p_i'''(x_i) &= s'''(x_i)_- \\ p_{i+1}'''(x_i) &= s'''(x_i)_+ \end{aligned}$$

da cui

$$s'''(x_i)_- - s'''(x_i)_+ = 6a_i$$

La (3.72) si riduce, quindi, a:

$$\int_a^b [s'' \cdot f''] dx = - \sum_{i=1}^n 6a_i f(x_i),$$

poiché  $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$ , si ha

$$\int_a^b s''(x) \cdot f''(x) dx = - \sum_{i=1}^n 6a_i f(x_i) = 0$$

cioè la tesi.

L'uguaglianza

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [s''(x)]^2 dx$$

vale se

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f \in \Pi_1 \quad \text{in } [a, b];$$

e, poiché  $f$  ha  $n$  zeri, con  $n > 2$ ,  $f$  è il polinomio identicamente nullo in  $[a, b]$  e, dunque,

$$g(x) \equiv s(x), \quad x \in [a, b]$$

ovvero l'asserto. ■

Come si può interpretare il risultato del Teorema 3.5?

Osserviamo che, per una qualsiasi funzione  $g \in C^2(\mathfrak{R})$ , si definisce la **curvatura** in un punto  $P(x, g(x))$ , appartenente ad una curva di equazione  $y = g(x)$ , come:

$$curv_g(P) = \frac{g''(x)}{(1 + (g'(x))^2)^{3/2}}$$

Nell'ipotesi che  $|g'(x)| \ll 1$ , risulta:

$$\frac{g''(x)}{(1 + (g'(x))^2)^{3/2}} \approx g''(x)$$

In questa ipotesi, dunque l'essere  $E(s)$  minimo corrisponde ad una richiesta di curvatura media minima per la funzione  $s$  e quindi ad una richiesta di oscillazioni "regolari" (smooth). Per questo motivo si usa spesso associare alla funzione spline un andamento mediamente regolare (privo di "picchi"), anche se va comunque notato che tale comportamento sussiste solo se la derivata prima della funzione spline è sufficientemente piccola in valore assoluto.

### 3.5 L'approssimazione dei minimi quadrati

In questo paragrafo affrontiamo il problema della rappresentazione di dati nel caso in cui essi siano affetti da un errore non trascurabile (derivante dagli strumenti di misura utilizzati, oppure da opportune semplificazioni). Come già detto nel §3.1, per evitare di esaltare l'errore presente nei dati, è piú ragionevole richiedere che la funzione non debba assumere i valori assegnati ma che invece si scosti "poco" da questi in modo da non perdere completamente le informazioni in essi contenute e, allo stesso tempo, fornire una rappresentazione attendibile. In questi casi si parla di **modello approssimante**.

In base alla scelta della misura dello scostamento della funzione approssimante dai dati e ai vincoli che imponiamo sullo scostamento, si caratterizza il tipo di approssimazione. In particolare, se scegliamo come misura dello scostamento la somma dei quadrati delle distanze dei punti assegnati dal grafico della funzione approssimante, e imponiamo che tale scostamento sia il minimo possibile, allora la funzione che si ottiene viene detta **migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati**.

Come per il modello interpolante, anche per quello approssimante è opportuno fissare *la forma* della funzione. In particolare, in questa sezione, prendiamo in esame soltanto le funzioni approssimanti di tipo **polinomiale**. In questo caso, si parla di **approssimazione polinomiale**.



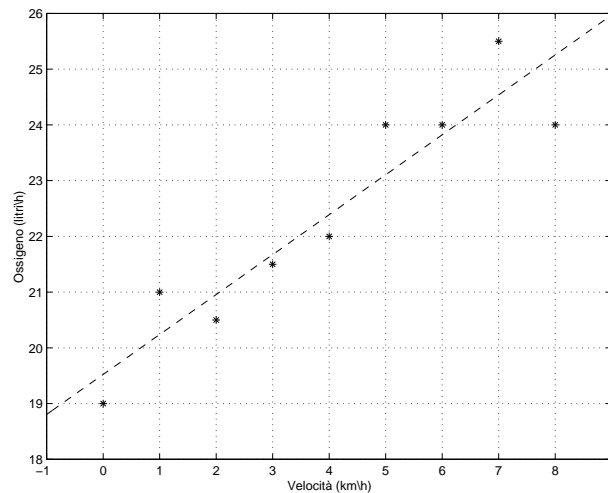


Figura 3.33: Un modello approssimante che descrive i dati

### 3.5.1 La migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati

♣ **Esempio 3.27.** Riprendiamo l' esempio 3.5; in questo esempio si è visto che la quantità di ossigeno respirata da un individuo in movimento, in base alle misure effettuate mediante lo spirometro, ha un andamento lineare. I punti però non sono allineati, cioè il modello interpolante non può essere lineare e pertanto non è attendibile. Assumiamo come modello per descrivere i dati registrati attraverso lo spirometro, una retta.

Sia

$$y = f(x) = a + bx$$

la sua equazione. Si vuole calcolare il valore dei coefficienti  $a$  e  $b$ .

La retta disegnata in Fig. 3.33 è quella che realizza la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dei punti assegnati.

Consideriamo, per ogni punto, la distanza (verticale) del punto dalla retta. Assumiamo questa distanza come *misura* dello scostamento del generico punto dalla funzione  $f(x) = a + bx$ . Per ogni punto  $P_i = (x_i, y_i)$ , la distanza verticale è il segmento che congiunge l'ordinata del punto con l'ordinata del punto di ascissa  $x_i$  appartenente alla retta, in particolare tale valore è  $f(x_i) = a + bx_i$ . Indichiamo, quindi, con  $d_i$  tale distanza cioè:  $d_i = |y_i - a - b \cdot x_i|$ .

Per *misurare* lo scostamento di tutti i punti dalla retta consideriamo la somma dei quadrati di

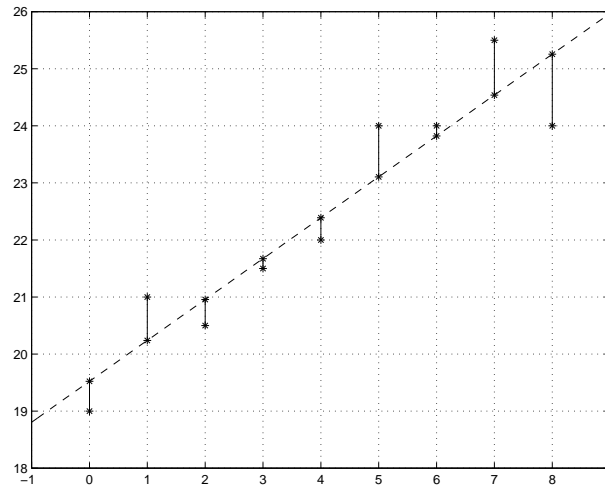


Figura 3.34: Distanza verticale dei punti dalla retta

queste distanze <sup>37</sup>, e imponiamo che esso sia minimo. Imporre che lo scostamento sia minimo equivale a minimizzare la funzione:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^9 d_i^2 = \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2$$

Osserviamo che, al variare di  $a$  e di  $b$  la funzione  $z = S(a, b)$  descrive un paraboloido (mostrato in Figura 3.35). Consideriamo le sezioni piane <sup>38</sup> di questo paraboloido ottenute riguardando la funzione  $S(a, b)$  come funzione della sola variabile  $a$  e pensando  $b$  come costante, oppure come funzione della sola variabile  $b$  e pensando  $a$  come costante. Indichiamo rispettivamente:  $f_1(a) = S(a, \cdot)$ , e  $f_2(b) = S(\cdot, b)$  le sezioni piane relative al primo e al secondo caso. In Figura 3.36 è mostrata una delle funzioni del tipo  $f_1(a) = S(a, \cdot)$ , per un fissato valore di  $b$ . Come si può notare, la sezione piana di un paraboloido è una parabola. Analogamente in Figura 3.37, è mostrata una delle funzioni del tipo  $f_2(b) = S(\cdot, b)$ , cioè una delle sezioni paraboliche ottenute considerando la funzione  $S(a, b)$  come funzione di una sola variabile, in particolare della variabile  $b$ . Anche in questo caso si può notare che si tratta di una parabola. Nel calcolare il punto di minimo di  $f_1(a)$ , basta imporre che la derivata prima di  $f_1(a)$  sia nulla. Avendo riguardato  $b$  come parametro, ne risulta una equazione che dipende da  $b$  oltre che da  $a$ . Analogamente, per la funzione  $f_2(b)$ , avendo riguardato  $a$  come parametro, imponendo che la derivata prima sia nulla si ottiene una equazione che dipende da  $a$  oltre che da  $b$ .

<sup>37</sup>Più precisamente, questo equivale a considerare il quadrato della norma euclidea del vettore:  $d = (d_1, d_2, \dots, d_9)$ , cioè:

$$\|d\|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_9^2$$

<sup>38</sup>Le sezioni piane sono curve ottenute intersecando il paraboloido con il piano  $y = y_0$  cioè con un piano parallelo al piano  $xz$  ad una distanza  $y_0$  dal piano  $xz$ , e con il piano  $x = x_0$  cioè con il piano parallelo al piano  $yz$  e ad una distanza  $x_0$  dal piano  $yz$ .

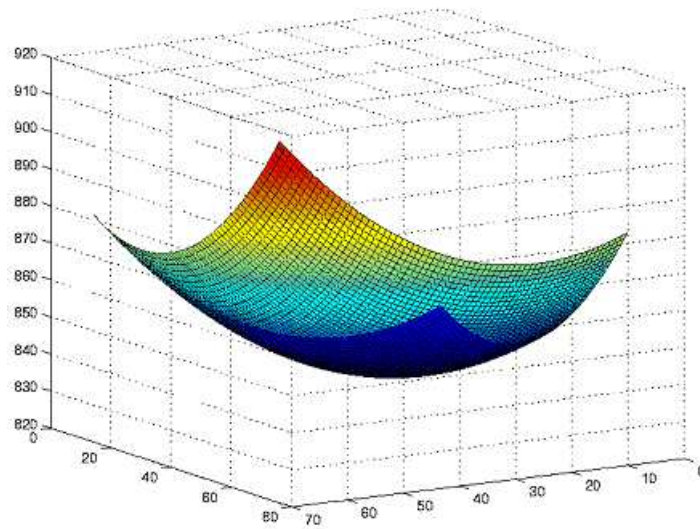


Figura 3.35: Il Paraboloido  $S(a,b)$

Il punto di minimo del paraboloido, in quanto punto di minimo per tutte le sezioni paraboliche, è determinato in corrispondenza di quei valori di  $a$  e di  $b$  che soddisfano sia la prima che la seconda equazione.

Quindi <sup>39</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

---

<sup>39</sup>Questa condizione in generale non è sufficiente a garantire che il punto sia un punto di minimo, ma assicura soltanto che tale punto è un **punto estremo**. La condizione necessaria che determina la presenza di un minimo o di un massimo (relativo) (cioè di un punto **estremante**) è che la matrice *Hessiana*, cioè la matrice costituita dalle derivate seconde di  $S(a, b)$  sia semidefinita positiva. Inoltre, se la derivata seconda rispetto alla prima variabile è positiva allora il punto è di minimo, altrimenti se è negativa il punto è un punto di massimo. Una condizione affinché una matrice sia definita positiva è fornita dal **criterio di Sylvester** che asserisce che tutti i minori principali di una matrice definita positiva devono essere non negativi. Nel caso in esame la matrice Hessiana è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 9 & 36 \\ 36 & 204 \end{pmatrix}$$

i cui minori principali sono rispettivamente 9 e 540. In particolare, il coefficiente di posto (1,1), è positivo (in generale coincide con il numero di punti).

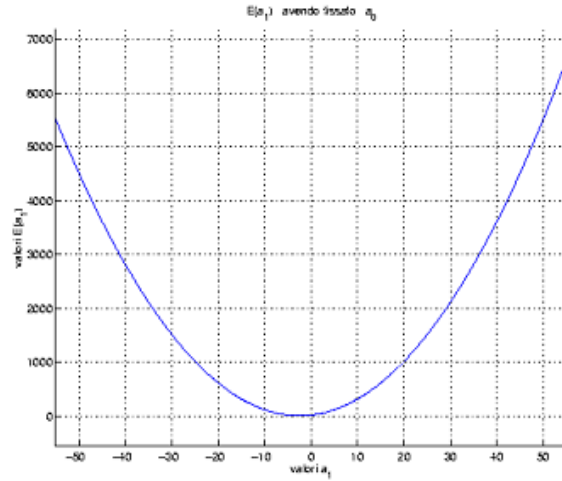


Figura 3.36: Sezione  $f_1(a) = S(a, \cdot)$  del Paraboloido ottenuta fissando  $b$

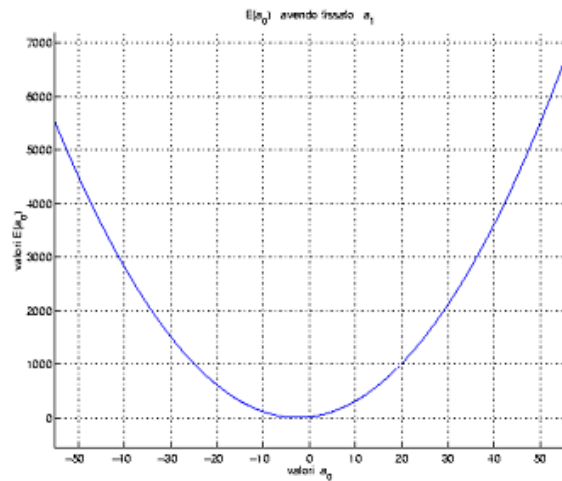


Figura 3.37: Sezione  $f_2(b) = S(\cdot, b)$  del Paraboloido ottenuta fissando  $a$

cioè:

$$\begin{cases} \frac{df_1(a, \cdot)}{da} = \frac{\partial \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{df_2(\cdot, b)}{db} = \frac{\partial \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)] (-x_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^9 [y_i - (a + b \cdot x_i)] (-1) = 0 \end{cases}$$

cioè, effettuando i prodotti:

$$\begin{cases} 9a + \sum_{i=1}^9 x_i b = \sum_{i=1}^9 y_i \\ \sum_{i=1}^9 x_i a + \sum_{i=1}^9 x_i^2 b = \sum_{i=1}^9 x_i y_i \end{cases} \quad (3.75)$$

Si è ottenuto un sistema lineare di 2 equazioni e 2 incognite. La sua soluzione fornisce i coefficienti della retta  $y = f(x) = a + bx$  che tra tutte le rette realizza la minima distanza dai punti assegnati. Nell'esempio considerato i punti  $P_i$  hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} x &= [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]; \\ y &= [19, 21, 20.5, 21.5, 22, 24, 24, 25.5, 24]; \end{aligned}$$

il sistema (3.75) diventa:

$$\begin{cases} 9 \cdot a + \sum_{i=1}^9 x_i \cdot b = \sum_{i=1}^9 y_i \\ \sum_{i=1}^9 x_i \cdot a + \sum_{i=1}^9 x_i^2 \cdot b = \sum_{i=1}^9 y_i \cdot x_i \end{cases} \iff \begin{cases} 9a + 36b = 201.5 \\ 36a + 204b = 849 \end{cases}$$

La soluzione di tale sistema è la coppia (19.52, 0.7167), rispettivamente i coefficienti  $a$  e  $b$  della retta  $y = f(x) = a + b \cdot x$ . La retta così costruita si dice **retta dei minimi quadrati**.

Descrivere i punti  $(x_i, y_i)$  mediante la retta dei minimi quadrati, significa assumere come valore *attendibile* per ogni misura  $x_i$ , il valore

$$f(x_i) = a + bx_i.$$

Un modo per stimare l'attendibilità del valore  $f(x_i)$  rispetto alla misura  $y_i$  consiste nel calcolare la *deviazione standard*,  $\sigma$ , delle misure  $y_1, y_2, \dots, y_n$  rispetto ai corrispondenti valori assunti veri  $f(x_i)$ , cioè calcolare:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^9 (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (y_i - f(x_i))^2}, \quad (3.76)$$

Questa quantità viene anche caratterizzata imponendo che la probabilità di ottenere queste stesse misure sia massima.<sup>40</sup>

In altre parole, la deviazione standard è (a meno del fattore  $\sqrt{(1/N)}$ ) la radice quadrata della somma dei quadrati delle distanze dei punti dalla retta approssimante e quindi, possiamo concludere che la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati è stata ottenuta minimizzando la deviazione standard.

Calcoliamo, dunque, la deviazione standard relativa alle misure  $y_1, \dots, y_n$  dell'esempio 3.19:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (y_i - 19.52 \cdot x_i - 0.7167)^2} = 0.712$$

Questo risultato consente di affermare che su ciascuna misura  $y_i$  c'è un'incertezza media pari a 0.712.

Questa quantità rappresenta, inoltre, il valore medio della somma dei quadrati delle distanze (verticali) di tutti i punti dalla retta dei minimi quadrati.



♣ **Esempio 3.28.** Determinare una stima dell'accelerazione di gravità in una certa regione della superficie terrestre

Consideriamo un corpo che cade liberamente e misuriamo la sua altezza in una successione di istanti di tempo. Supponendo che il moto sia uniformemente accelerato con accelerazione data dall'accelerazione di gravità, l'equazione di moto del corpo è:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (3.77)$$

avendo indicato con  $y_0$  la posizione iniziale,  $v_0$  la velocità iniziale e con  $g$  l'accelerazione di gravità.

Si effettuano le seguenti misure:

tempo	0	1	2	3	4	5
altezza	65	131	113	89	51	7

<sup>40</sup>Se le misure sono affette da errori casuali ma di ordine di grandezza sufficientemente piccolo rispetto a quello dei valori stessi, allora la distribuzione limite di ciascuna delle misure è la distribuzione normale:

$$\exp(-Y^2/2\sigma^2)$$

centrata nel valore vero  $Y$ , mentre  $\sigma$  è la deviazione standard, o *parametro di larghezza*. Quanto più  $\sigma$  è grande tanto meno velocemente la funzione tende a zero al crescere di  $x$  cioè tanto più larga è la "campana", caratteristica forma della distribuzione normale. In queste ipotesi la probabilità di ottenere le  $N$  misure ( $y_i$ ) è proporzionale al prodotto delle probabilità di ottenere ciascuna misura  $y_i$  e quindi a:

$$\frac{1}{\sigma^N} \exp(-\sum (y_i - Y_i)^2 / 2\sigma^2)$$

Il valore di  $\sigma$  che rende massima tale probabilità è proprio la deviazione standard definita dalla (3.76).

avendo misurato il tempo in decimi di secondi e l'altezza in centimetri. A partire da questi dati ci aspettiamo un andamento come quello descritto dall'equazione in (3.77).

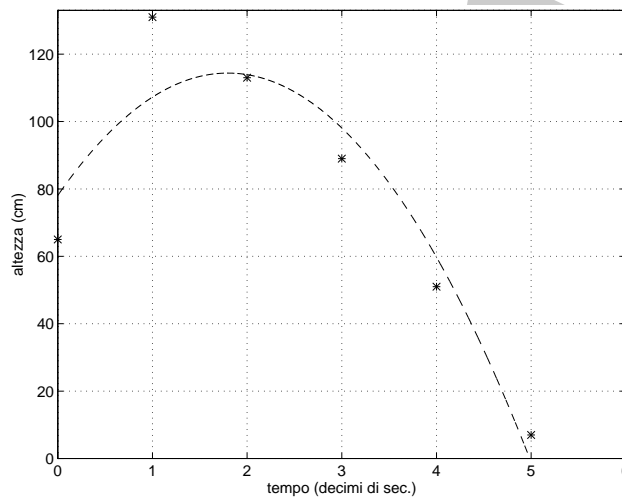


Figura 3.38: Traiettoria percorsa da un corpo in caduta soggetto all'accelerazione di gravità

Invece i punti non appartengono ad una parabola (cfr. Figura 3.38). Anche in questo caso, l'errore introdotto nell'effettuare le misure è tale che rappresentando in un piano cartesiano i punti di coordinate  $(t_i, h_i)$ , dove  $t_i$  indica l'istante di tempo in cui è stata misurata l'altezza  $h_i$ , questi punti non descrivono una parabola. Pertanto, anche in questo caso il modello interpolante non può essere attendibile. Costruiamo allora un modello approssimante.

Considerata la funzione di equazione (3.77) calcoliamo i suoi coefficienti  $y_0, v_0, g$  richiedendo che la curva descritta dal grafico di tale funzione sia quella che si scosti il meno possibile dai dati.

Ancora una volta, assumiamo come criterio per valutare lo scostamento tra il generico punto e il grafico della funzione (3.77) la distanza (verticale) del punto dalla curva.

Indicata con  $d_i$  la distanza del generico punto  $P_i$  dalla curva, cioè la differenza in valore assoluto tra l'ordinata del punto e l'ordinata del punto sulla curva con la medesima ascissa, lo scostamento della funzione approssimante dai dati è misurato dalla somma dei quadrati delle distanze di ciascun punto:

$$S = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2$$

Quindi, per calcolare i coefficienti  $y_0, v_0$  e  $g$  della parabola approssimante minimizziamo la funzione:

$$S(y_0, v_0, g) = \sum_{i=1}^6 \left[ y_i - \left( y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2 \right) \right]^2$$

Per calcolare il punto di minimo della funzione  $S(y_0, v_0, g)$  imponiamo che le derivate parziali di  $S$

rispetto a  $y_0$ ,  $v_0$  e  $g$  siano nulle, cioè richiediamo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial y_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial v_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial g} = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_{i=1}^6 [y_i - (y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2)]^2}{\partial y_0} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^6 [y_i - (y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2)]^2}{\partial v_0} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^6 [y_i - (y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2)]^2}{\partial g} = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^6 [y_i - (y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2)] (-1) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^6 [y_i - (y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2)] (-t_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^6 [y_i - (y_0 + v_0 \cdot t_i + \frac{1}{2}g \cdot t_i^2)] (-\frac{1}{2}t_i^2) = 0 \end{cases}$$

Effettuando i prodotti:

$$\begin{cases} 6 \cdot y_0 + \sum_{i=1}^6 t_i \cdot v_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 t_i^2 \cdot g = \sum_{i=1}^6 y_i \\ \sum_{i=1}^6 t_i \cdot y_0 + \sum_{i=1}^6 t_i^2 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 t_i^3 \cdot g = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^6 t_i^2 \cdot y_0 + \sum_{i=1}^6 t_i^3 \cdot v_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 t_i^4 \cdot g = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot t_i^2 \end{cases}$$

Siamo pervenuti ad un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite  $y_0$ ,  $v_0$  e  $g$ . La soluzione di tale sistema è la terna dei coefficienti della parabola di equazione (3.77) che realizza la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dai punti misurati.

La parabola così costruita si dice **parabola dei minimi quadrati**. In questo caso, effettuando i prodotti il sistema lineare diventa:

$$\begin{cases} 6 \cdot y_0 + 15 \cdot v_0 + 27.5 \cdot g = 456 \\ 15 \cdot y_0 + 55 \cdot v_0 + 112.5 \cdot g = 863 \\ 55 \cdot y_0 + 225 \cdot v_0 + 489.5 \cdot g = 2375 \end{cases}$$

La soluzione di tale sistema è la terna (78.0714, 40.4214, -22.5), cioè la terna dei coefficienti della parabola di equazione (3.77) che realizza la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dai punti misurati. In particolare  $g = -22.5$ . ♣



Assegnati i punti:

$$P_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, m$$

si vuole costruire il **polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati**. Indicato con:

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

tale polinomio, imponiamo che sia minima la somma delle distanze (verticali) di ciascun punto  $P_i$  dal grafico del polinomio  $p$ . Consideriamo la funzione:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + \dots + a_n \cdot x_i^n)]^2$$

che rappresenta la misura dello scostamento, nel senso dei minimi quadrati, di  $p$  dai punti  $P_i$ . Calcoliamo il punto di minimo imponendo che le derivate (parziali) di  $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , rispetto alle incognite  $a_0, a_1, \dots, a_n$  siano nulle <sup>41</sup>. Dunque imponendo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0 \end{cases}$$

ed effettuando i prodotti, si ottiene un sistema lineare di  $n + 1$  equazioni nelle  $n + 1$  incognite  $a_0, a_1, \dots, a_n$ :

$$\begin{cases} ma_0 & + \sum_{i=1}^m x_i \cdot a_1 & \dots & + \sum_{i=1}^m x_i^n \cdot a_n & = & \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot a_0 & + \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot a_1 & \dots & + \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \cdot a_n & = & \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases} \quad (3.78)$$

<sup>41</sup>Questa condizione in generale non basta a garantire che tale punto sia di minimo. In generale garantisce solo che si tratta di un punto estremale. L'eventuale presenza di massimi o di minimi (relativi) (cioè di punti estremanti) è stabilita dalla matrice Hessiana. Nel caso specifico si può verificare che la matrice Hessiana, cioè la matrice costituita dalle derivate seconde della funzione  $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , è definita positiva; per cui il punto stazionario sarà sicuramente un punto estremante cioè un punto in cui siamo in presenza di un minimo o di un massimo. D'altra parte, inoltre, il coefficiente di prima riga e prima colonna della matrice Hessiana, cioè la derivata seconda rispetto alla prima variabile  $a_0$ , è uguale a  $2m$  pertanto è positivo. Il punto quindi sarà sicuramente di minimo.

Tale sistema prende il nome di **sistema di equazioni normali**. Come vedremo nel prossimo paragrafo, si può dimostrare che questo sistema ammette un'unica soluzione. La soluzione fornisce il vettore dei coefficienti del polinomio di grado al più  $n$  che tra tutti i polinomi di grado al più  $n$  realizza la **migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati**.

♣ **Esempio 3.29.** Un biologo misura una popolazione di batteri per tre giorni successivi con i risultati mostrati nella tabella seguente:

t=tempo	0	1	2
p= popolaz. ( $\times 10^3$ )	153	137	128

A partire da questi dati il biologo vuole determinare la stima migliore per la *vita media* della popolazione.

Molte popolazioni (di batteri, di nuclei radioattivi) tendono a variare esponenzialmente nel tempo. Se una popolazione  $P$  sta diminuendo esponenzialmente, allora la legge che regola tale fenomeno è del tipo:

$$P(t) = P_0 e^{-t/\tau}$$

dove  $\tau$  è detta *vita media* della popolazione. Si deve determinare, quindi, il valore di  $\tau$ . Poiché l'equazione:

$$P(t) = P_0 e^{-t/\tau} \quad (3.79)$$

non è lineare, prima di procedere cerchiamo di *linearizzarla* cioè di trasformarla in una equazione lineare equivalente. Poiché la non linearità è introdotta unicamente dalla funzione esponenziale un modo per eliminarla è quello di esprimere anche il primo membro in termini della funzione esponenziale, cioè:

$$P(t) \equiv e^{\log(P(t))}$$

e quindi la (3.79) si scrive:

$$e^{\log(P(t))} = P_0 e^{-t/\tau} = e^{\log(P_0)} e^{-t/\tau} = e^{\log(P_0) - t/\tau}$$

Questa equazione è verificata se e solo se:

$$\log(P(t)) = \log(P_0) - t/\tau \quad (3.80)$$

cioè posto:

$$z(t) = \log(P(t)), \quad z_0 = \log P_0$$

se e solo se

$$z(t) = z_0 - t/\tau$$

Abbiamo ricondotto l'equazione (3.79) ad una equazione lineare nella incognita  $t$  di cui si devono calcolare i coefficienti  $z_0$  e  $\tau$  in modo che sia minima la distanza del grafico della funzione  $y = z(t)$  dai punti assegnati. Tenendo conto che si è effettuata la trasformazione  $z(t) = \log(P(t))$ , trasformiamo allo stesso modo anche le coordinate dei punti assegnati:

$$\begin{aligned} z(0) &= \log(P(0)) = 11.9382 \\ z(1) &= \log(P(1)) = 11.8277 \\ z(2) &= \log(P(2)) = 11.7598 \end{aligned}$$

Considerata la funzione:

$$S(z_0, \tau) = \sum_{i=1}^3 [z_i - (z_0 - t_i/\tau)]^2$$

il sistema delle equazioni normali è il seguente:

$$\begin{cases} 3 \cdot a + 3 \cdot b = 35.5257 \\ 3 \cdot a + 5 \cdot b = 35.3473 \end{cases}$$

dove  $a = z_0$  e  $b = -1/\tau$ . La soluzione è la coppia  $(11.9311, -0.0892) = (z_0, -\frac{1}{\tau})$ , da cui deriva che la vita media della popolazione in esame,  $\tau$ , è  $\frac{1}{0.0892} = 11.21$  giorni. ♣

### 3.5.2 Esistenza ed unicità

In tutti gli esempi che abbiamo descritto la costruzione della funzione approssimante conduce alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. L'esistenza e l'unicità della funzione approssimante dipende, pertanto, dalla esistenza ed unicità della soluzione del sistema delle equazioni normali e quindi dalla matrice dei coefficienti del sistema.

♣ **Esempio 3.30.** Consideriamo l'esempio 3.27 e determiniamo la matrice dei coefficienti del sistema lineare (3.75). Tale sistema è del tipo:

$$\begin{cases} 9 \cdot a + \sum_{i=1}^9 x_i \cdot b = \sum_{i=1}^9 y_i \\ \sum_{i=1}^9 x_i \cdot a + \sum_{i=1}^9 x_i^2 \cdot b = \sum_{i=1}^9 x_i \cdot y_i \end{cases} \quad (3.81)$$

per cui la matrice dei coefficienti è:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & \sum_{i=1}^9 x_i \\ \sum_{i=1}^9 x_i & \sum_{i=1}^9 x_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

Introdotta la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \\ 1 & x_6 \\ 1 & x_7 \\ 1 & x_8 \\ 1 & x_9 \end{pmatrix}$$

e considerata la sua trasposta:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

la matrice  $C$  si può ottenere dal prodotto righe per colonne della trasposta di  $A$  per  $A$  cioè:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & \sum_{i=1}^9 x_i \\ \sum_{i=1}^9 x_i & \sum_{i=1}^9 x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \\ 1 & x_6 \\ 1 & x_7 \\ 1 & x_8 \\ 1 & x_9 \end{pmatrix} = A^T \cdot A$$

Analogamente, il termine noto del sistema (3.81) si può esprimere come prodotto della trasposta di  $A$  per il vettore  $y$  delle ordinate corrispondenti ai nodi. In altre parole si ha:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^9 y_i \\ \sum_{i=1}^9 x_i y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = A^T y$$

e quindi posto  $c = (a, b)^T$ , il sistema (3.81):

$$\begin{cases} m \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i \cdot b = \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot b = \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{cases}$$

in termini matriciali si riscrive:

$$A^T \cdot A c = A^T y$$

L'esistenza e l'unicità della soluzione dipende dal determinante della matrice  $A^T A$ . ♣

Riscriviamo il sistema di equazioni normali (3.78). Introdotta la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

si verifica facilmente che la matrice dei coefficienti del sistema (3.78) si esprime come:

$$C = A^T A$$

e, analogamente, indicato con  $z$  il vettore dei termini noti nel sistema (3.78) si verifica che:

$$z = A^T y$$

Pertanto, il sistema di equazioni normali (3.78), è espresso in forma matriciale nel modo seguente:

$$A^T A c = A^T y$$

Vogliamo vedere sotto quali condizioni esso ammette un'unica soluzione.

**♣ Esempio 3.31.** Consideriamo il sistema omogeneo associato al sistema di equazioni normali relativo all'esempio 3.30:

$$\begin{cases} m \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i \cdot b = 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot b = 0 \end{cases} \iff A^T \cdot A c = 0 \quad (3.83)$$

Moltiplicando la prima equazione per  $a$  e la seconda per  $b$ , si ha:

$$\begin{cases} a \cdot (m \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i \cdot b) = 0 \\ b \cdot (\sum_{i=1}^m x_i \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot b) = 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

Sommando ambo i membri

$$a \cdot \left( m \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i \cdot b \right) + b \cdot \left( \sum_{i=1}^m x_i \cdot a + \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot b \right) = 0 \quad (3.85)$$

Osserviamo che in questo modo si ottiene un'equazione equivalente al sistema (3.83). Infatti, chiaramente ogni soluzione del sistema (3.83) è soluzione della (3.85), viceversa data l'equazione (3.85) con  $a$  e  $b$  arbitrari, se assumiamo che questa equazione sia soddisfatta qualunque siano i valori di  $a$  e di  $b$ , necessariamente devono annullarsi le quantità racchiuse in parentesi, cioè  $a$  e  $b$  devono soddisfare le due equazioni del sistema (3.83).

Osserviamo che la (3.85), sviluppando i calcoli, si può esprimere come:

$$a^2 m + 2 \sum_{i=1}^m x_i a b + \sum_{i=1}^m x_i^2 b^2 = \sum_{i=1}^m (a^2 + 2x_i a b + x_i^2 b^2) = \sum_{i=1}^m (a + b \cdot x_i)^2 = 0 \quad (3.86)$$

Perché sia soddisfatta la (3.86) è necessario che sia:

$$p(x_i) = a + b x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si possono verificare due eventualità: il polinomio  $p(x) = a + b x$  si annulla nei punti  $x_i$ , oppure  $p$  è il polinomio identicamente nullo. Escludiamo la prima possibilità perché un polinomio di primo grado può avere al più uno zero e invece i punti sono  $m > 1$ .

Ne deriva che  $p$  è il polinomio identicamente nullo cioè  $a = b = 0$ , pertanto l'equazione (3.85), e quindi il sistema (3.83), ammette solo la soluzione identicamente nulla, e quindi il suo determinante è diverso da zero. ♣

Consideriamo il sistema

$$A^T A c = 0$$

omogeneo associato al sistema  $A^T A c = A^T y$  e moltiplichiamo la  $k - ma$  equazione per il coefficiente  $a_k$  del polinomio approssimante  $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^m$ . Sommando le  $m$  equazioni si ha:

$$\sum_{i=1}^m p(x_i)^2 = 0 \quad (3.87)$$

Perché sia verificata la (3.87) è necessario che sia  $p(x_i) = 0$  per  $i = 1, \dots, n$ .

Si possono verificare due possibilità: il polinomio  $p$  si annulla in questi punti, oppure il polinomio  $p$  è identicamente nullo. Se supponiamo che sia  $n > m$ , dal teorema fondamentale dell'algebra si deduce che un polinomio di grado al più  $m$  non può avere  $n$  zeri se  $n > m$  e, pertanto, escludiamo la prima possibilità; rimane, allora, l'altra, cioè  $p(x)$  è il polinomio identicamente nullo. L'equazione (3.76) e, quindi, il sistema omogeneo associato alle equazioni normali, ammette solo la soluzione identicamente nulla e ciò implica che il determinante del sistema delle equazioni normali è diverso da zero.

Osserviamo che l'ipotesi che ha consentito di concludere che il determinante debba essere necessariamente non nullo e quindi che il sistema lineare che fornisce i coefficienti del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati ammette un'unica soluzione, è che il numero di punti  $n$  sia maggiore del grado del polinomio  $m$ . Possiamo dunque concludere che:

**Teorema 3.6.** *Assegnati  $n$  nodi distinti ed  $n$  valori corrispondenti, il sistema di equazioni normali relativo alla costruzione del polinomio  $p(x) \in \Pi_m$  di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, ammette una ed una sola soluzione se e solo se i nodi sono a due a due distinti e se  $n > m + 1$ .<sup>42</sup>*

♣ **Esempio 3.32.** Assegnati i punti:

$$P_1 = (1, 1), P_2 = (2, 5),$$

si determini la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}$$

in questo caso risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il sistema delle equazioni normali è del tipo:

$$A^T A c = A^T y \tag{3.88}$$

dove con  $c$  abbiamo indicato il vettore dei coefficienti  $a, b$  della retta  $y = a + bx$  di minimi quadrati. Quindi, si ha:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 6 \\ 3a + 5b = 11 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è:

$$a = -3, b = 4$$

cioè la retta di minimi quadrati ha equazione:

$$y = f(x) = -3 + 4x$$

Rappresentiamo in un sistema di assi cartesiani i punti e la retta:

---

<sup>42</sup>In effetti il teorema risulta vero anche nell'ipotesi  $n > m$  ma, poiché in questo caso può accadere che  $n = m + 1$  cioè che la soluzione coincida con il polinomio interpolante, e dato che in linea di principio nella costruzione del polinomio di migliore approssimazione non siamo interessati a trovare il polinomio interpolante, si preferisce in questa sede lasciare la condizione  $n > m + 1$ .

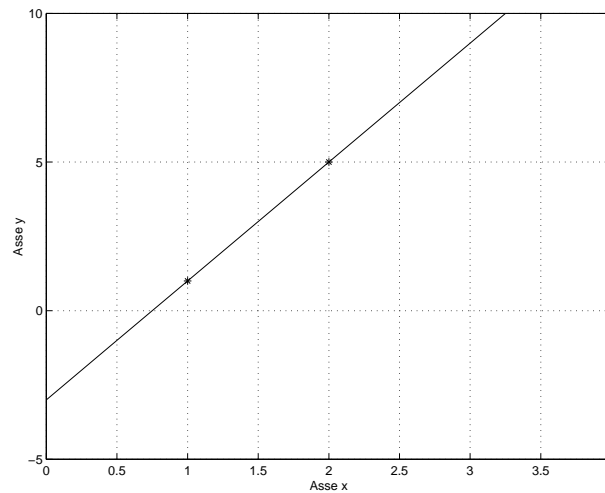


Figura 3.39: Approssimazione nel senso dei minimi quadrati con un polinomio di primo grado

Come si osserva dalla figura, il polinomio di primo grado di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati è la retta interpolante. In altre parole, in questo caso lo scostamento dei punti dalla funzione di minimi quadrati è nullo. Vediamo di spiegare cosa è successo nel risolvere questo problema.

Osserviamo innanzitutto che, poiché il determinante di  $A$  è dato da:

$$\det(A) = (x_2 - x_1)$$

se  $x_1 \neq x_2$  tale matrice è non singolare, inoltre  $n = 2 > 1 = m$ . Pertanto esiste l'inversa  $A^{-1}$ , il sistema (3.88) è quindi equivalente al seguente sistema:

$$Ac = y \tag{3.89}$$

ottenuto moltiplicando il precedente a sinistra per la matrice  $(A^T)^{-1}$ .

Il sistema (3.89) ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione è quella che fornisce i coefficienti del polinomio interpolante. Esso infatti, coincide con il sistema che si ottiene dal metodo dei coefficienti indeterminati costruito per il calcolo dei coefficienti della retta interpolante. Pertanto si può affermare che in questo caso la retta dei minimi quadrati è la retta interpolante, cioè è la retta in corrispondenza della quale  $y_i = f(x_i)$  cioè la distanza dei punti dalla retta è nulla. <sup>43</sup> ♣

In questo caso il modello interpolante è anche un modello approssimante perché i coefficienti del polinomio interpolante rendono nullo lo scostamento  $S$ . Ma in un problema di rappresentazione di dati, affetti da un errore non trascurabile, non ha senso costruire il modello interpolante.

<sup>43</sup>Si osservi che in termini matriciali questo significa che  $y = Ac$



Tenendo conto che fissati  $n$  punti il polinomio interpolante ha grado  $n - 1$ , bisogna escludere che il grado del polinomio approssimante,  $m$ , possa essere uguale a  $n - 1$ .

### 3.5.3 Un algoritmo per la costruzione e valutazione del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Per calcolare i coefficienti del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati bisogna risolvere il sistema delle equazioni normali. Tale sistema può essere risolto utilizzando l'algoritmo di Gauss <sup>44</sup>. In conclusione, una procedura per la determinazione del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati deve prevedere:

1. la costruzione della matrice dei coefficienti  $A^T A$  del sistema;
2. la costruzione del termine noto  $A^T y$  del sistema;
3. la risoluzione del sistema:  $A^T A c = A^T y$ ;
4. la valutazione del polinomio approssimante.

Utilizzando una procedura per ciascuna delle richieste, una versione dell'algoritmo è la seguente:

---

<sup>44</sup>In generale, non è consigliabile l'algoritmo di Gauss perché la matrice dei coefficienti del sistema delle equazioni normali è mal condizionata. In tal caso si preferiscono opportuni algoritmi di fattorizzazione che trasformano il sistema in uno meglio condizionato.

```

procedure polinapprox(in:  $n, m, x, y, \tilde{x}$  ; out:  $p$ )

  /# SCOPO: valutazione in un punto del polinomio di grado al più  $m$ 
    di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati,
    relativo ad un insieme di punti assegnati

  /# SPECIFICHE DEI PARAMETRI:
  /# PARAMETRI DI INPUT:
  var:  $n$       : intero   { numero dei punti }
  var:  $m$       : intero   { grado del polinomio }
  var:  $x(n)$    : reale    { nodi di approssimazione }
  var:  $y(n)$    : reale    { ordinate corrispondenti }
                                { ai nodi di approssimazione }
  var:  $\tilde{x}$     : reale    { punto di valutazione }

  /# PARAMETRI DI OUTPUT:
  var:  $p$       : reale    {  $p$  è il valore del polinomio }
                                { nel punto di valutazione }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
  call Sist( $n, x, B$ )      { costruzione della matrice del sistema }
                                { di equazioni normali }
  call noto( $n, y, b$ )     { calcolo del termine noto del sistema }
                                { di equazioni normali }
  call Gauss( $n, B, c, b$ ) { risoluzione del sistema }
                                { di equazioni normali }
  call Horner( $c, \tilde{x}, p, n$ ) {  $p$  è la valutazione del polinomio }
                                { nel punto assegnato }

  end polinapprox

```

Procedura 3.11: Migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati

## 3.6 MATLAB e la rappresentazione di dati

È possibile utilizzare alcune funzioni predefinite in ambiente MATLAB per rappresentare un insieme di punti nel piano o nello spazio.

La funzione `polyfit` costruisce il polinomio interpolante di Lagrange e più in generale il polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati. Funzioni polinomiali a tratti di primo e terzo grado possono essere costruite utilizzando la funzione `interp1`. Spline cubiche si ottengono, infine, richiamando la funzione built-in `spline`. Vediamone l'uso attraverso alcuni esempi.

♣ **Esempio 3.33.** Supponiamo di voler costruire il polinomio interpolante un insieme assegnato di punti. Il seguente programma, dopo aver calcolato i coefficienti del polinomio interpolante di Lagrange, ne disegna il grafico:

```
>> x=[1:1:10];
>> y=[ 2 4 6 7 9 10 23 24 48 56 ];
>> xi=[0:0.1:10];
>> c=polyfit(x,y,9);
>> yi = polyval(c,xi);
>> plot(x,y,'o',xi,yi)
```

Analizziamo il programma istruzione per istruzione.

L'istruzione:

```
>> x=[1:1:10];
```

definisce l'array `x` contenente i nodi di interpolazione. In particolare `x` contiene i valori da 1 a 10 equispaziati con passo 1.

L'istruzione:

```
>> y=[ 2 4 6 7 9 10 23 24 48 56 ];
```

definisce l'array `y` contenente le ordinate corrispondenti ai nodi di interpolazione.

L'istruzione:

```
>> xi=[0:0.1:10];
```

definisce l'array `xi` dei punti necessari alla valutazione del polinomio interpolante. L'array `xi` viene definito dall'insieme dei valori da 0 a 10 equispaziati con passo 0.1.

La funzione `polyfit` :

```
>> c=polyfit(x,y,9);
```

restituisce il vettore dei coefficienti del polinomio, di grado al più 9, interpolante i punti assegnati.

La funzione `polyval`:

```
>> yi = polyval(c,xi);
```

valuta, nei punti `xi`, il polinomio i cui coefficienti sono definiti dalle componenti dell'array `c`.

L'istruzione:

```
>> plot(x,y,'o',xi,yi)
```

consente di disegnare sia i punti di interpolazione (in corrispondenza dei quali verrà disegnata una 'o'), sia il grafico del polinomio interpolante.

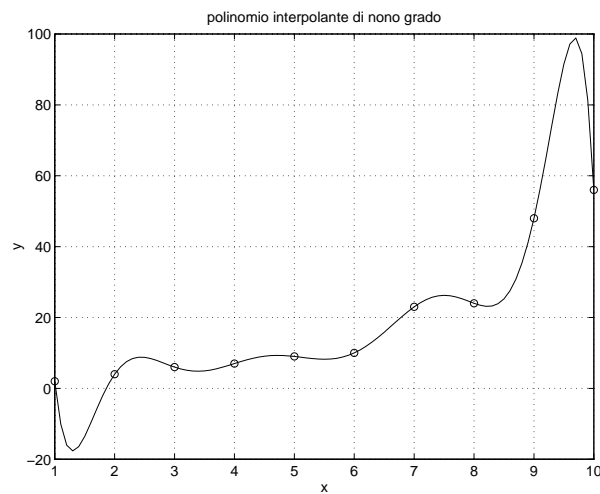


Figura 3.40: Polinomio interpolante

La stessa funzione `polyfit` può essere utilizzata per costruire il polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

In particolare le istruzioni:

```
>> c1=polyfit(x,y,1);
```

```
>> y1 = polyval(c1,xi);
```

consentono, rispettivamente, di costruire e valutare il polinomio di primo grado, di migliore approssimazione nel senso di minimi quadrati.

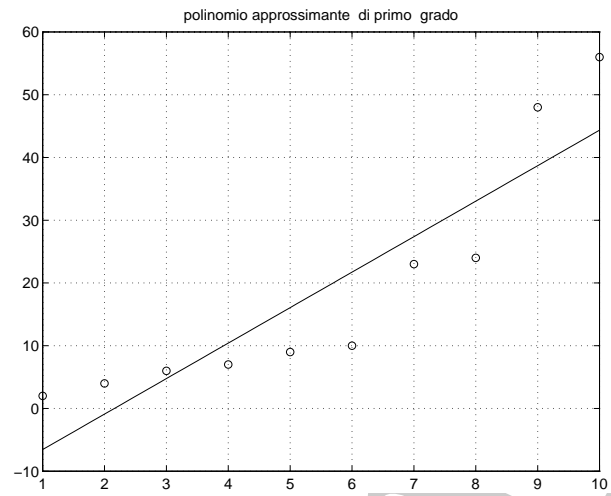


Figura 3.41: Polinomio di approssimazione nel senso dei minimi quadrati

La Figura 3.42 mostra un confronto tra il polinomio interpolante e quello approssimante, ottenuto eseguendo l'istruzione:

```
>> plot(x,y,'o',xi,yi,x1,y1)
```

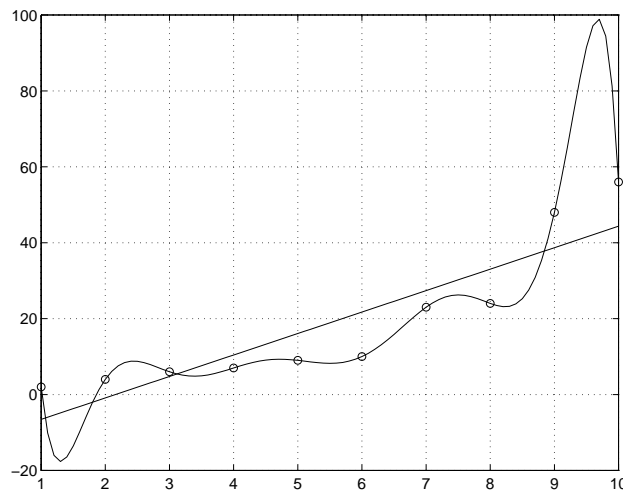


Figura 3.42: Confronto tra la retta dei minimi quadrati e il polinomio interpolante

Analogamente, se  $m < n - 1$  la funzione:

```
>> c=polyfit(x,y,m);
```

calcola i coefficienti del polinomio di grado  $m$ , di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati. ♣

♣ **Esempio 3.34.** Le seguenti istruzioni MATLAB costruiscono rispettivamente il polinomio interpolante a tratti di primo e terzo grado, sullo stesso insieme di punti considerato nell'esempio precedente:

```
>> zi= interp1(x,y,xi);
>> zi= interp1(x,y,xi,'cubic');
```

Dopo aver calcolato i coefficienti si possono valutare i polinomi utilizzando la funzione `polyval`, mentre per disegnare il loro grafico si può utilizzare la funzione `plot`. Infine, l'istruzione seguente valuta, nei nodi  $x_i$ , la spline cubica interpolante:

```
>> zi= spline(x,y,xi);
```

♣ **Esempio 3.35.** L'interpolazione lineare a tratti è alla base dell'algoritmo utilizzato per disegnare in ambiente MATLAB il grafico di una qualsiasi funzione. Supponiamo di voler disegnare il grafico della

funzione  $y = \sin(x)$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ . Vediamo cosa succede se eseguiamo l'istruzione seguente:

```
>> x=[0:0.9:2π];
>> plot(x,sin(x))
```

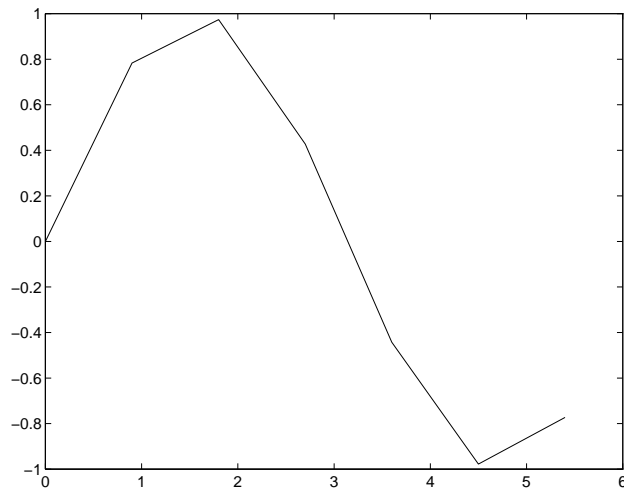


Figura 3.43: Grafico della funzione  $\sin(x)$ , ottenuto suddividendo l'intervallo  $[0, 2\pi]$  in sottointervalli di ampiezza 0.9

Come si può osservare dalla Figura 3.43, per rappresentare questi punti sul piano, essi vengono congiunti a due a due con segmenti di retta. Chiaramente la rappresentazione sarà tanto più attendibile quanto più numerosi sono i nodi nell'intervallo fissato. Ad esempio, eseguendo le istruzioni:

```
>> x=[0:0.1:2π];
>> plot(x,sin(x))
```

si utilizza una distribuzione di punti, per mezzo della quale la rappresentazione di  $y=\sin(x)$  risulta piuttosto soddisfacente, come si può osservare in Figura 3.44.





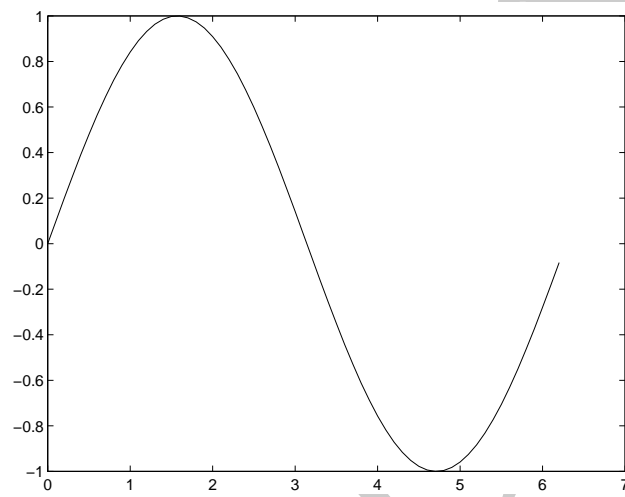


Figura 3.44: Grafico della funzione  $\sin(x)$ , ottenuto suddividendo l'intervallo  $[0, 2\pi]$  in sottointervalli di ampiezza 0.1

### 3.7 Il software disponibile per la rappresentazione di dati

Prima di descrivere seppur brevemente il software disponibile per la rappresentazione di dati, richiamiamo la classificazione del software matematico introdotta da *J. Rice* in *Numerical methods, Software and Analysis*, Academic Press, 1993. Tale classificazione consiste in:

- routines individuali (eventualmente raccolte in collezioni),
- packages di routines che risolvono problemi in una specifica area computazionale,
- packages di routines di base,
- librerie *general - purpose*,
- Ambienti di risoluzione di problemi (PSE).

Descriviamo, brevemente per ciascuna delle classi individuate, il software disponibile per la rappresentazione di dati.

- ACM-TOMS (*Collected Algorithms of the Association for Computing Machinery*), una collezione di piú di 650 elementi di software matematico, distribuita dall'ACM Algorithms Distribution Service.
- PPPACK (*Package of Piecewise Polynomial and spline Routines*), raccolta dei programmi del libro di C. De Boor, *A practical Guide to Splines*, del 1979.
- LAPACK (*Linear Algebra Package*), il package di routines di algebra lineare, ottimizzate per calcolatori a memoria gerarchica.
- le librerie del NAG e la IMSL.

Tranne le librerie, tutto il software citato è di pubblico dominio ed è reperibile tramite la rete web attraverso il sito di Netlib <http://www.netlib.org>. Tra le routines dell'ACM-TOMS ve ne sono 20 per problemi di interpolazione e 25 per quelli di approssimazione. In particolare, si utilizza l'interpolazione polinomiale (nella formula di Newton), polinomiale a tratti, mediante spline cubiche.

PPPACK è un package di 58 routines in Fortran 77 per la costruzione, valutazione, derivazione ed integrazione di spline cubiche interpolanti e approssimanti.

La libreria NAG (Mark 17) contiene due capitoli dedicati alla rappresentazione di dati, rispettivamente E01 (interpolazione) e E02 (Fitting di curve e superfici). Il capitolo E01 contiene 24 routines per l'interpolazione di Lagrange in due e tre dimensioni, mediante polinomi, funzioni razionali, polinomi a tratti, spline cubiche. Ad esempio, nell'ambito dell'interpolazione polinomiale, la routine E01AEF fornisce il polinomio interpolante costruito attraverso la formula di Newton, mentre se si vuole solo la valutazione in un preassegnato valore si può utilizzare la routine E01AAF basata sullo schema di Aitken.

La routine `EO1BAF` costruisce la spline cubica interpolante.

Per quanto riguarda l'approssimazione di dati, nel senso dei minimi quadrati, i modelli utilizzati dalle routine della NAG si basano sui polinomi e sulle spline cubiche.

La libreria dell'IMSL contiene circa 60 routine in Fortran 77 per la rappresentazione di curve e superfici mediante modelli interpolanti o approssimanti. In tutti i casi si utilizzano solo spline cubiche.

Le routines sono raggruppate in due sottoinsiemi: nel primo la spline cubica viene costruita intervallo per intervallo, nel secondo si utilizzano spline di ordine al più 15 e la rappresentazione utilizza opportune funzioni di base (le B-spline).

Infine tra gli ambienti di risoluzione di problemi, quello più utilizzato è sicuramente il `MATLAB`.

## 3.8 Esercizi

### 3.8.1 Interpolazione

♠ **Esercizio 3.1:**

Costruire il polinomio di terzo grado che assume i seguenti valori:

$$\begin{array}{c|cccc|} x & 1 & 3 & 4 & 6 & \\ \hline y & -7 & 5 & 8 & 14 & \end{array}$$

utilizzando la Formula di Lagrange.

♠ **Esercizio 3.2:**

Utilizzando un opportuno polinomio interpolante, calcolare una stima del valore della funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  in  $x = 0.9$  a partire dai seguenti valori tabulati:

$$\begin{array}{c|cc|} x & 0.6 & 0.7 & \\ \hline y & 1.82212 & 2.01375 & \end{array}$$

Utilizzare, successivamente i seguenti punti:

$$\begin{array}{c|ccc|} x & 0.6 & 0.7 & 0.8 & \\ \hline y & 1.82212 & 2.01375 & 2.22554 & \end{array}$$

e infine i punti:

$$\begin{array}{c|cccc|} x & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 1.0 & \\ \hline y & 1.82212 & 2.01375 & 2.22554 & 2.71828 & \end{array}$$

Confrontare i valori ottenuti.

♠ **Esercizio 3.3:**

Calcolare una stima del valore assunto dalla funzione esponenziale in  $x = .0075$  utilizzando la tavola seguente:

$$\begin{array}{c|ccc|} x & 0.006 & 0.007 & 0.008 & \\ \hline y & 1.00601 & 1.00702 & 1.00803 & \end{array}$$

♠ **Esercizio 3.4:**

Determinare il polinomio interpolante espresso nella formula di Lagrange e nella formula di Newton, relativo ai seguenti dati:

x	7	1	2
y	146	2	1

e dimostrare che sono identicamente uguali.

♠ **Esercizio 3.5:**

Calcolare una stima del valore assunto dalla funzione  $\sin(x)$  in  $x = 1.375$  utilizzando il polinomio di primo grado nell'intervallo  $[1.35, 1.40]$ , e il polinomio di secondo grado nell'intervallo  $[1.35, 1.45]$ .

♠ **Esercizio 3.6:**

A partire dai seguenti dati:

anno	caffè
1961	1052
1965	1204
1969	1556
1973	2010
1977	1815
1981	2253
1985	2812

costruire il polinomio interpolante di settimo grado.

♠ **Esercizio 3.7:**

A partire dai seguenti dati:

anno	laureati
1961/62	23
1967/68	40
1970/71	57
1973/74	63
1976/77	72
1979/80	76
1982/83	74

costruire il polinomio interpolante di sesto grado, utilizzando la formula di Newton.

♠ **Esercizio 3.8:**

Costruire il polinomio interpolante i dati seguenti:

A)

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 3 & 7 & \\ \hline y & 5 & -1 & \end{array}$$

B)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 7 & 1 & 2 & \\ \hline y & 146 & 2 & 1 & \end{array}$$

C)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 3 & 7 & 1 & 2 & \\ \hline y & 10 & 146 & 2 & 1 & \end{array}$$

D)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} x & 1.5 & 2.7 & 3.1 & -2.1 & -6.6 & 11.0 & \\ \hline y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

### 3.8.2 Approssimazione

♠ **Esercizio 3.9:**

Se il volume di un campione di gas ideale è tenuto costante allora la sua temperatura  $T$  è una funzione lineare della sua pressione  $p$ :

$$T(p) = a + bp$$

calcolare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati a partire dalle seguenti misure:

$p$	65	75	85	95	105	
$T$	-20	17	42	94	127	

Valutare l'affidabilità delle misure  $T_i$  utilizzando la deviazione standard.

♠ **Esercizio 3.10:**

Un carrello viaggia a velocità costante e viene cronometrato il suo passaggio in 4 differenti posizioni, in successione di 4 istanti di tempo:

$t$	17.6	40.4	67.7	90.1	
$s$	0	3000	6000	9000	

calcolare una stima della sua velocità.

Valutare, inoltre, l'affidabilità delle misure  $s_i$  utilizzando la deviazione standard.

♠ **Esercizio 3.11:**

Assegnati i punti:

$x$	-4	-2	-1	0	1	3	4	6	
$y$	-35.1	15.1	15.9	8.9	.1	.1	.21.1	135	

determinare il polinomio di terzo grado di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Calcolare, inoltre, l'indice di condizionamento del sistema delle equazioni normali.

♠ **Esercizio 3.12:**

Calcolare la parabola e la retta di migliore approssimazione relativa mente ai punti:

$x$	0	.5	1	1.5	
$y$	0	.6	1	1.5	

Calcolare, inoltre, l'indice di condizionamento del sistema delle equazioni normali, sia nel primo che nel secondo caso.

A. Muri



# Bibliografia

- [1] Davis P. J. - *Interpolation and approximation* - Blaisdell, New York, 1963.
- [2] Gauss F. C. - *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae* - tradotto in inglese da G.W. Stewart, Classics in applied Mathematics, n. 11, SIAM, 1995
- [3] Hayes J.G. - *Numerical approximation to Functions and Data* - The Athlone Press, 1970.
- [4] Meinardus G. - *Introductory Lectures on some problems in approximation theory* - manoscritto, 1974 .
- [5] Severi F. - *Geometria elementare* - 1926
- [6] Shoenberg I.J. - *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytical functions* - Vol 4, N.1, 1945
- [7] Spath H. - *Spline Algorithms for Curves and Surfaces* - UTILITAS MATHEM. PUBLISH. INC., 1973
- [8] Ueberhuber C.W. - *Numerical Computation 1: Methods, Software and Analysis* - Springer, 1997.

A. M. J.