

Capitolo 7

Una introduzione alla risoluzione numerica di equazioni non lineari

7.1 Introduzione

Questo capitolo è dedicato allo studio ed all'analisi di algoritmi numerici per la risoluzione di equazioni non lineari. In generale, assegnata una funzione non lineare $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una equazione non lineare è un'equazione del tipo:

$$f(x) = 0. \quad (7.1)$$

Risolvere l'equazione (7.1) equivale a calcolare per quali valori di $x \in [a, b] \subseteq A$ risulta $f(x) = 0$. Ogni valore di x per cui è soddisfatta la (7.1) è detto **radice dell'equazione** oppure **zero della funzione** f .

Spesso il modello matematico utilizzato per descrivere e risolvere problemi applicativi è costituito da equazioni non lineari e, generalmente, la difficoltà nel risolvere tali problemi si trasferisce direttamente alla difficoltà nella risoluzione dell'equazione non lineare associata. Si descrivono, nel seguito, alcuni esempi di problemi o applicazioni la cui risoluzione riconduce ad una equazione del tipo (7.1).

♣ **Esempio 7.1.** La legge che regola la crescita di una popolazione è del tipo

$$p(t) = \frac{p_M}{1 + (p_M/p_0)e^{-kp_M t}} \quad (7.2)$$

dove $p(t)$ fornisce il numero di individui presenti al tempo t , p_0 rappresenta la popolazione all'istante iniziale $p(t_0) = p_0$, p_M è il valore massimo raggiungibile dalla popolazione, mentre k è un prefissato fattore di crescita. Se si desidera conoscere in quale istante la popolazione raggiungerà un livello uguale a metà del massimo consentito, occorrerà risolvere l'equazione

$$\frac{p_M}{1 + (p_M/p_0)e^{-kp_M t}} - \frac{p_M}{2} = 0$$

nella variabile t .



♣ **Esempio 7.2.** Si supponga di disporre di un capitale di 1000 euro da investire. Si assuma, inoltre, che il tipo di investimento prescelto frutti un interesse netto dell'otto per cento annuo e non sia consentito per frazioni di anno. Si vuol conoscere il tempo di investimento necessario (in anni) perché il capitale raddoppi.

Si osservi che al termine del primo anno il capitale sarà cresciuto dell'otto per cento e quindi sarà uguale a $1080 = 1000 \cdot 1.08$. Tale capitale, investito durante il secondo anno frutterà a sua volta un interesse dell'otto per cento; dunque, al termine del secondo anno, il capitale sarà uguale a $(1000 \cdot 1.08) \cdot 1.08 = 1000 \cdot (1.08)^2$. In generale, al termine dell' n -mo anno di investimento, il capitale ammonterà a $1000 \cdot (1.08)^n$. La risoluzione del problema si riconduce, quindi, a determinare il più piccolo intero \bar{n} per il quale si verifichi:

$$1000 \cdot 1.08^{\bar{n}} \geq 2000.$$

ovvero a determinare la soluzione \bar{x} dell'equazione

$$1000 \cdot 1.08^x - 2000 = 0$$

e calcolare successivamente \bar{n} come minimo intero maggiore o uguale a \bar{x} .¹

♣

♣ **Esempio 7.3.** In meccanica celeste, la posizione x di un pianeta nella sua orbita può essere determinata risolvendo un'equazione del tipo:

$$x - E \sin x - M = 0 \tag{7.3}$$

con E ed M costanti positive minori di 1.

♣

♣ **Esempio 7.4.** Il problema della determinazione del minimo [massimo] di una funzione convessa [concava] $f \in C[a, b]$ è equivalente a quello della risoluzione di un'equazione non lineare:

$$f'(x) = 0. \tag{7.4}$$

Pertanto un capitolo fondamentale dei metodi numerici di ottimizzazione è costituito dalla risoluzione di sistemi di equazioni non lineari.

♣

In tutti gli esempi precedenti l'equazione coinvolta è scalare. Nel caso generale, ovvero di una funzione di più variabili, cioè:

$$F : A \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n, \quad n \geq 2,$$

l'equazione $F(x) = 0$ rappresenta un sistema di equazioni non lineari, ed in tal caso la soluzione, quando esiste, è un vettore di n componenti.

¹Si osservi che da continuità, crescita e codominio della funzione $f(x) = 1000 \cdot 1.08^x - 2000$ segue banalmente l'esistenza e unicità della soluzione del problema.

♣ **Esempio 7.5.** Un esempio di sistema di equazioni non lineari è il seguente:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 5 \\ x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una soluzione di tale sistema, di due equazioni non lineari, definita su tutto \mathbb{R}^2 , è $x^* = (1, -2)$. ♣

In seguito sarà considerato solo il caso scalare ².

L'esistenza ed il numero delle radici di equazioni non lineari scalari dipende non solo dalla funzione, ma anche dall'intervallo considerato. Ovvero, i dati del problema del calcolo delle radici di un'equazione non lineare sono la funzione f e l'intervallo di ricerca $[a, b]$.

♣ **Esempio 7.6.** Si consideri la seguente equazione non lineare scalare:

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x = 0.$$

Le radici reali di tale equazione, definita su tutto \mathbb{R} , sono 4 e precisamente $x^* = 0, 3, 4, 5$ (si osservi che la funzione considerata è un polinomio algebrico di quarto grado), tuttavia se si considera il problema di determinare le radici nell'intervallo $[-1, +1]$ l'equazione ha una sola soluzione ($x^* = 0$). Considerando invece l'intervallo $[-1, 3.5]$ l'equazione ha due radici ($x^* = 0, 3$). Mentre nell'intervallo $[1, 2]$, l'equazione non ha soluzioni. ♣

È importante osservare che anche quando si dispone dell'espressione analitica delle soluzioni, spesso non è possibile valutarla con un numero finito di operazioni.

♣ **Esempio 7.7.** L'equazione $\cos(\log(x)) = 0$ ha infinite radici nell'intervallo $(0, \infty)$, precisamente:

$$x^* = e^{\pi/2+k\pi}, \quad k \in \mathcal{N}.$$

Tuttavia una valutazione delle stesse comporta delle approssimazioni. ♣

♣ **Esempio 7.8.** Si consideri il polinomio di quinto grado

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3.$$

Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, l'equazione (algebraica, in questo caso) non lineare $f(x) = 0$ ha 5 radici, e cioè i 5 zeri del polinomio. Per determinare tali soluzioni si può fattorizzare il polinomio nel prodotto di 2 polinomi, e precisamente $f(x) = x^3(x^2 - 2x - 1)$. L'equazione $f(x) = 0$ è quindi decomposta in due equazioni non lineari, $x^3 = 0$ e $x^2 - 2x - 1 = 0$, le cui soluzioni sono: $x_1 = 0$, con molteplicità 3, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$, $x_5 = 1 + \sqrt{2}$. Anche se nel caso del polinomio considerato si è riusciti a determinare gli zeri mediante una fattorizzazione in polinomi di grado più basso, in generale non esistono formule per calcolare gli zeri di polinomi di grado maggiore o uguale a 5 (Teorema di Abel). ♣

²Tale scelta è giustificata dal fatto che la maggior parte dei metodi per la risoluzione numerica di equazioni non lineari scalari è estendibile al caso di sistemi.

♣ **Esempio 7.9.** Si analizzi la funzione seguente:

$$f(x) = xe^{3x} + x^3 + \log(x+1) - 3.$$

Considerato l'intervallo $[0, 1.5]$, si ha che $f(0) = -3$ e $f(1.5) = 136.317$, e quindi la funzione assume agli estremi valori di segno opposto. Inoltre, si ha che $f'(x) = 3x \exp 3x + \exp 3x + 3x^2 + 1/(x+1) > 0$, $x \in [0, 1.5]$, cioè la funzione è strettamente crescente e, quindi, ha un unico zero nell'intervallo considerato. ♣

In generale, non esistono metodi che consentono di calcolare gli zeri di funzioni non lineari con un numero finito di operazioni. La soluzione può essere approssimata solo numericamente mediante la progettazione di opportuni algoritmi.

7.2 Il Metodo di Tabulazione

Un modo "naturale" di calcolare le soluzioni di $f(x) = 0$ è di indagare sui valori che la funzione f assume in un insieme finito di punti nell'intervallo. Scelti ad esempio n punti t_1, \dots, t_n , analizzando i valori $f(t_i)$, si individuano i sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$ in cui la funzione assume agli estremi valori di segno opposto. Tali sottointervalli possono contenere uno zero della funzione.

♣ **Esempio 7.10.** Si consideri l'equazione seguente:

$$3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0, \quad (7.5)$$

il cui grafico è mostrato in Fig. 7.1.

Le radici sono $x^* = -3$, $x^* = 2/3$ e $x^* = 3$ (quest'ultima è radice doppia). Si vogliono trovare le radici nell'intervallo $[-2, 2]$. Si considerano $n = 11$ punti distinti ed equidistanti, cioè i punti

$$t_i = -2 + (i-1) \cdot h, \quad i = 1, \dots, 11, \quad \text{con } h = 0.4,$$

e si valuta la funzione f in tali punti (Fig. 7.2).

In Tabella 7.1 sono riportati gli 11 punti considerati nell'intervallo $[-2, 2]$ e i valori corrispondenti della funzione, approssimati alla quarta cifra significativa. Osservando tali valori possiamo dire che l'equazione (7.5) potrebbe avere una radice nell'intervallo $[0.4, 0.8]$ (qui la funzione assume valori di segno opposto agli estremi) (Fig. 7.3). Pertanto il punto medio dell'intervallo $[t_7, t_8]$, $x_1 = 0.6$, può essere assunto come approssimazione della radice $x^* = 0.666\dots$

Si può applicare di nuovo il procedimento appena descritto all'intervallo $[0.4, 0.8]$, considerando gli 11 punti

$$t_i = 0.4 + (i-1) \cdot h, \quad i = 1, \dots, 11, \quad \text{con } h = 0.04.$$

I valori che la funzione assume in tali punti, riportati in Tabella 7.2, mostrano che essa potrebbe avere uno zero nell'intervallo $[0.64, 0.68]$.

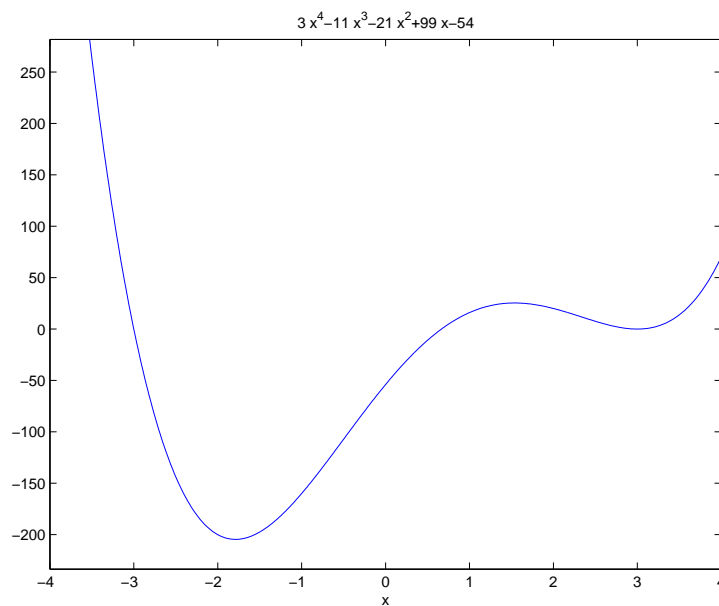


Figura 7.1: Grafico di $f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ in $[-4, 4]$

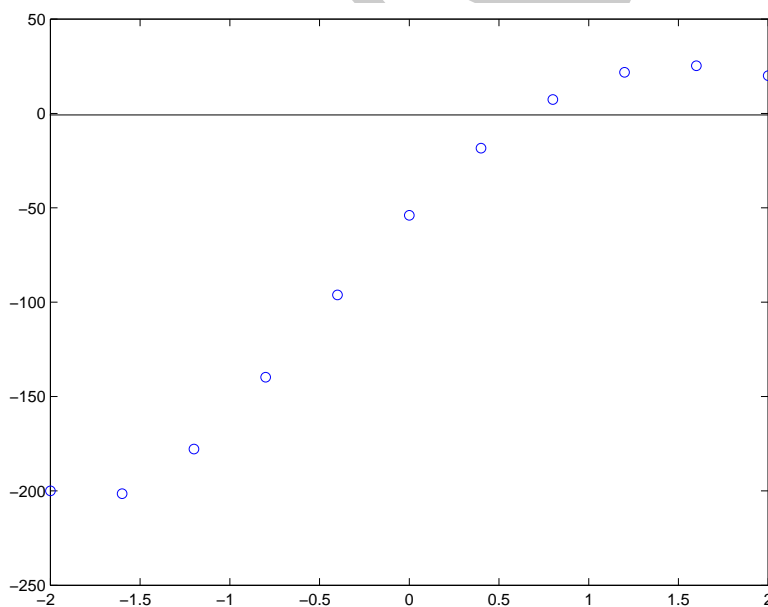


Figura 7.2: 11 valori calcolati di $f(x) = x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ in $[-2, 2]$

x	$f(x)$
-.2000e+01	-2.000e+02
-.1600e+01	-2.014e+02
-.1200e+01	-1.778e+02
-.8000e+00	-1.397e+01
-.4000e+00	-9.617e+01
.0	-5.400e+01
.4000e+00	-1.838e+00
.8000e+00	7.35e+01
.1200e+01	2.177e+01
.1600e+01	2.524e+01
.2000e+01	2.000e+01

Tabella 7.1: Tabulazione di $f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ in $[-2, 2]$

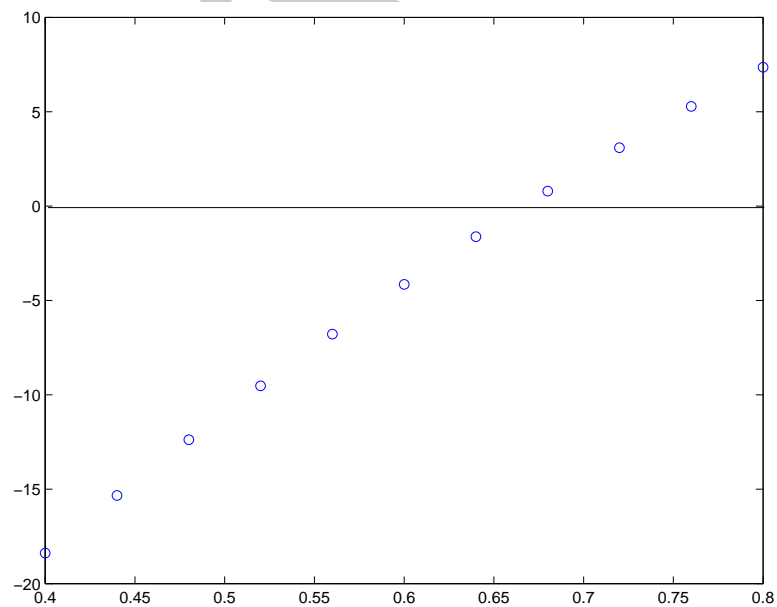


Figura 7.3: 11 valori calcolati di $f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ in $[0.4, 0.8]$

x	$f(x)$
.4000e+00	-1.838e+01
.4400e+00	-1.5339e+01
.4800e+00	-1.237e+01
.5200e+00	-9.525e+00
.5600e+00	-6.782e+00
.6000e+00	-4.147e+00
.6400e+00	-1.621e+00
.6800e+00	7.922e-01
.7200e+00	3.094e+00
.7600e+00	5.282e+00
.8000e+00	7.356e+00

Tabella 7.2: Tabulazione di $f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ in $[0.4, 0.8]$

Se si arresta il procedimento a questo passo, si può assumere come approssimazione della radice dell'equazione (7.5) il punto medio dell'intervallo $[t_7, t_8]$, cioè $x_2 = 0.66$, ottenendo, così un'accuratezza di 2 cifre significative. Se si desidera una accuratezza maggiore si può iterare il procedimento a partire dall'intervallo $[0.64, 0.68]$ (vedi Tabella 7.3).



Il procedimento utilizzato nell'esempio è detto **Metodo di Tabulazione** e rappresenta il modo più semplice di calcolare una approssimazione dello zero di una funzione in un intervallo.

♣ **Esempio 7.11.** Si consideri l'equazione seguente:

$$x^2 - 0.09 = 0, \tag{7.6}$$

il cui grafico è mostrato in Fig. 7.4.

Le radici sono $x^* = -0.3$ e $x^* = 0.3$. Si vogliono trovare le radici nell'intervallo $[-4, 2]$. Si considerano $n = 5$ punti distinti ed equidistanti, cioè i punti

$$t_i = -4 + (i - 1) \cdot h, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \text{con } h = 1.5,$$

e si valuta la funzione f in tali punti (Fig.7.5).

In Tabella 7.4 sono riportati i 5 punti considerati nell'intervallo $[-4, 2]$ ed i valori corrispondenti della funzione, approssimati alla quarta cifra significativa. Osservando tali valori possiamo dire che il Metodo di Tabulazione non rileva alcun intervallo in cui la funzione assume valori di segno opposto agli estremi.

In questo caso si può applicare di nuovo il Metodo di Tabulazione aumentando ad esempio il numero di punti di tabulazione, ovvero considerando gli $n = 9$ punti

$$t_i = -4 + (i - 1) \cdot h, \quad i = 1, \dots, 9, \quad \text{con } h = 0.75.$$

x	$f(x)$
0.6400e+01	-1.621e+00
0.6440e+01	-1.375e+00
0.6480e+01	-1.130e+00
0.6520e+00	-8.858e-01
0.6560e+00	-6.427e-01
0.6600e+01	-4.008e-01
0.6640e+01	-1.599e-01
0.6680e+00	7.978e-02
0.6720e+01	3.184e-01
0.6760e+01	5.559e-01
0.6800e+01	7.922e-01

Tabella 7.3: Tabulazione di $f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ in $[0.64, 0.68]$

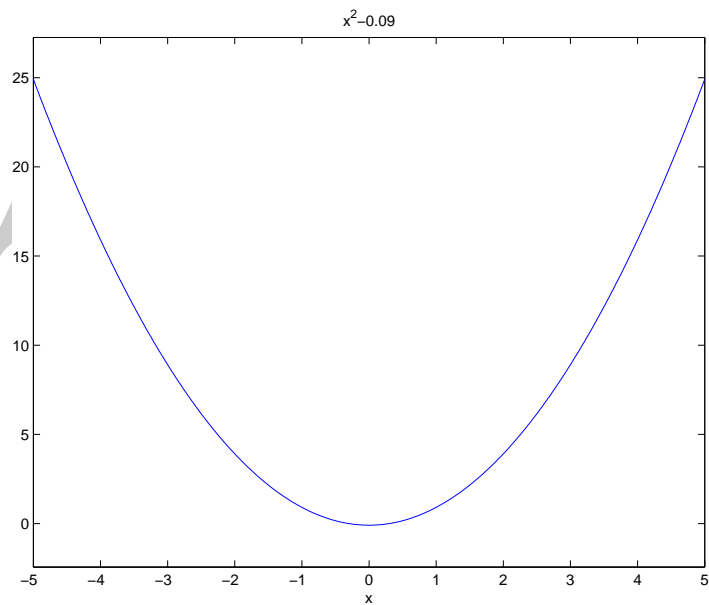


Figura 7.4: Grafico di $f(x) = x^2 - 0.09$ in $[-5, 5]$

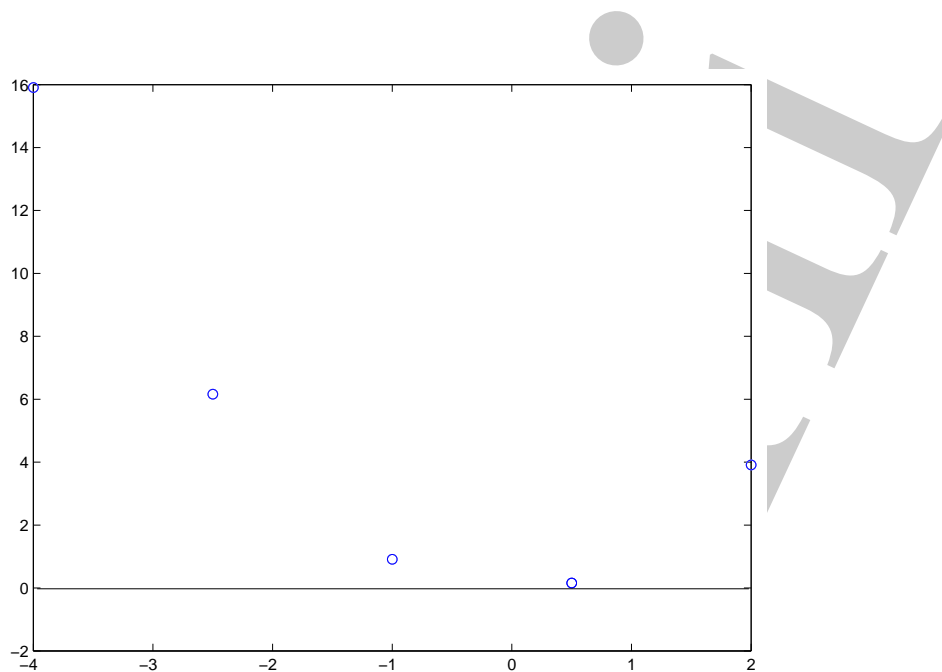


Figura 7.5: 5 valori calcolati di $f(x) = x^2 - 0.09$ in $[-4, 2]$

x	$f(x)$
-.4000e+01	.1591e+02
-.2500e+01	.6160e+01
-.1000e+01	.9100e+00
.5000e+00	.1600e+00
.2000e+01	.3910e+01

Tabella 7.4: Tabulazione di $f(x) = x^2 - 0.09$ in $[-4, 2]$ (5 punti)

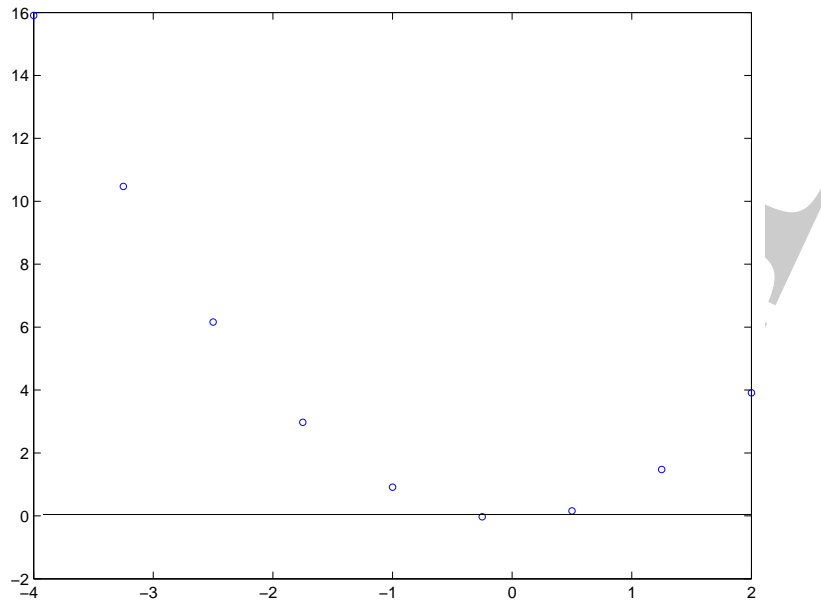


Figura 7.6: 9 valori calcolati di $f(x) = x^2 - 0.09$ in $[-4, 2]$

I valori che la funzione assume in tali punti, riportati in Tabella 7.5, mostrano che il metodo individua due intervalli dove la funzione assume segno discorde agli estremi, ed in essi potrebbe avere uno zero (Fig. 7.6).

Se si arresta il procedimento a questo passo, si può assumere, come approssimazione della radice dell'equazione (7.6), sia il punto medio dell'intervallo $[t_5, t_6]$, cioè $x_2 = -0.625$, sia il punto medio dell'intervallo $[t_6, t_7]$, cioè $x_2 = 0.125$. A questo punto, se si desidera un'accuratezza maggiore, a partire da uno dei due intervalli, ad esempio l'intervallo più a sinistra $[t_5, t_6]$, si può iterare il procedimento. ♣

L'esempio 7.11 ha evidenziato che il Metodo di Tabulazione non sempre è in grado di determinare al primo passo un intervallo che contiene zeri della funzione. In tal caso può essere opportuno effettuare una tabulazione più fitta. Di seguito si riporta una sintesi del Metodo di Tabulazione che tiene conto di questa possibilità.

Ad ogni passo k , indicato con $[a_k, b_k]$ il generico intervallo corrente, si ha:

- scelta di n punti distinti in $[a_k, b_k]$, in cui valutare f :

$$\bullet \quad a_k = t_1 < \dots < t_n = b_k$$

ovvero il **processo di tabulazione**;

- scelta, tra i sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$ (per $i = 1, \dots, n - 1$), dell'intervallo (più a sinistra³) dove si verifica una variazione di segno, cioè

³Può essere scelto, in modo arbitrario, un qualsiasi altro intervallo.

x	$f(x)$
-.4000e+01	.1591e+02
-.3250e+01	.1047e+02
-.2500e+01	.6160e+01
-.1750e+01	.2972e+01
-.1000e+01	.9100e+00
-.2500e+00	-0.2750e-01
.5000e+00	.1600e+00
.1250e+01	.1472e+00
.2000e+01	.3910e+01

Tabella 7.5: Tabulazione di $f(x) = x^2 - 0.09$ in $[-4, 2]$ (9 punti)

– se $s = \min\{i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ t.c. } f(t_i) * f(t_{i+1}) \leq 0\}$, allora

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv [t_s, t_{s+1}]$$

e si assume come approssimazione dello zero $x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$

– altrimenti, se la funzione non cambia segno in nessun intervallo, si effettua una nuova tabulazione in $[a_k, b_k]$ con $m > n$ punti.

7.2.1 Applicabilità del Metodo di Tabulazione

In questo paragrafo siamo interessati ad individuare le condizioni che garantiscono al metodo di fornire un risultato (a prescindere dall'accuratezza dello stesso) ovvero che garantisca l'applicabilità del metodo. Si osserva che il metodo in esame può essere sempre applicato a funzioni che siano valutabili su tutto l'intervallo di ricerca. Se tale condizione non è verificata, nulla si può dire sulla sua applicabilità.

♣ **Esempio 7.12.** Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} = 0$$

La funzione f ha uno zero in $x^* = 1$ e non è definita in $\hat{x} = 2$. Applicando un passo del Metodo di Tabulazione in $[0, 6]$, con $n = 5$, si ottengono i risultati mostrati nella Tabella 7.6.

Se analizziamo i risultati in tabella si deduce che la funzione cambia segno in $[0, 1.5]$, ed una prima approssimazione della soluzione è data dal punto medio di tale intervallo, $x_1 = 0.75$.

Tuttavia se vogliamo applicare il Metodo di Tabulazione alla stessa funzione f , cambiando da 5 a 7 il numero di punti di tabulazione, già alla prima iterazione il metodo diventa non applicabile. Infatti i punti della tabulazione sono 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e la funzione non è definita in uno dei punti della tabulazione.

♣

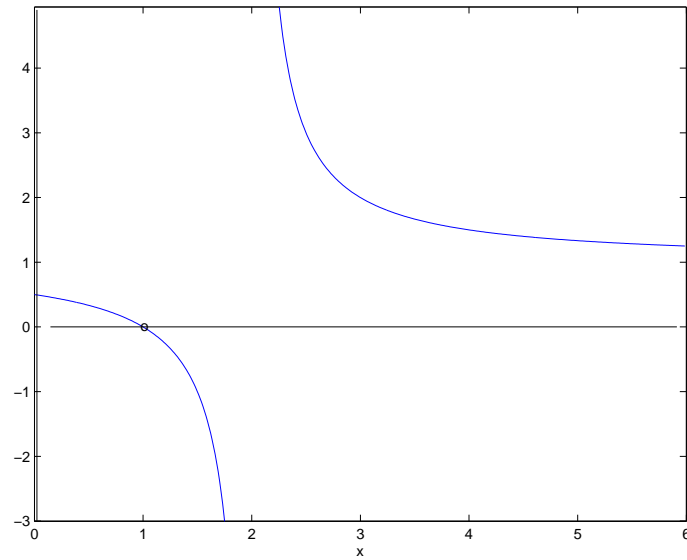


Figura 7.7: Grafico di $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ in $[0, 6]$

x	$f(x)$
.0000e+00	.5000e+00
.1500e+00	-.1000e+01
.3000e+00	.2000e+01
.4500e+00	.1400e+01
.6000e+01	.1250e+01

Tabella 7.6: Un passo del Metodo di Tabulazione, con $n = 5$, applicato alla funzione in Fig. 7.7

x	$f(x)$
.0000e+00	-.5000e+00
.2500e+00	-.4375e+00
.5000e+00	-.2500e+00
.7500e+00	.6250e-01
.1000e+01	.5000e+00

Tabella 7.7: Primo passo del Metodo di Tabulazione, con $n = 5$, applicato alla funzione in Fig. 7.8

7.2.2 Convergenza

Poichè il Metodo di Tabulazione è un metodo iterativo, ovvero a partire da valori iniziali, a e b , genera una successione di valori $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, è importante studiare le condizioni che assicurano che tale successione di valori "si avvicini sempre di più" alla soluzione del problema x^* , ovvero si vuole studiare la **convergenza** del metodo⁴.

♣ **Esempio 7.13.** Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2},$$

essa ha due zeri nei punti $x^* = -\sqrt{2}/2 \simeq -0.7071$ ed $\hat{x} = \sqrt{2}/2 \simeq 0.7071$, Si vuole determinare uno zero di f in $[0, 1]$ utilizzando il Metodo di Tabulazione. Scegliendo 5 punti equidistanti, cioè i punti $t_i = (i - 1) \cdot h$, $i = 1, \dots, 5$, con $h = 0.4$, si ottengono i valori riportati in Tabella 7.7.

Si osserva che la funzione f assume segno discorde agli estremi dell'intervallo $[0.5, 0.75]$, il cui punto medio $x_1 = 0.625$ è la prima approssimazione dello zero di f . Procedendo con il Metodo di Tabulazione, si determinano via via nuovi sottointervalli di $[0, 1]$ dove la funzione cambia segno agli estremi. Indicato quindi con x_k il punto medio dell'intervallo corrente $[a_k, b_k]$ dopo 5 iterazioni si ottengono i risultati mostrati in Tabella 7.8.

♣

⁴Più in generale, per un metodo iterativo sussiste la seguente definizione:

Definizione 7.1. Considerata l'equazione

$$f(x) = 0$$

e supposto che la funzione abbia almeno uno zero nell'intervallo $[a, b]$, sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la successione generata da un metodo iterativo.

Si dice che il metodo converge se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \tag{7.7}$$

dove x^* è uno zero della funzione nell'intervallo $[a, b]$

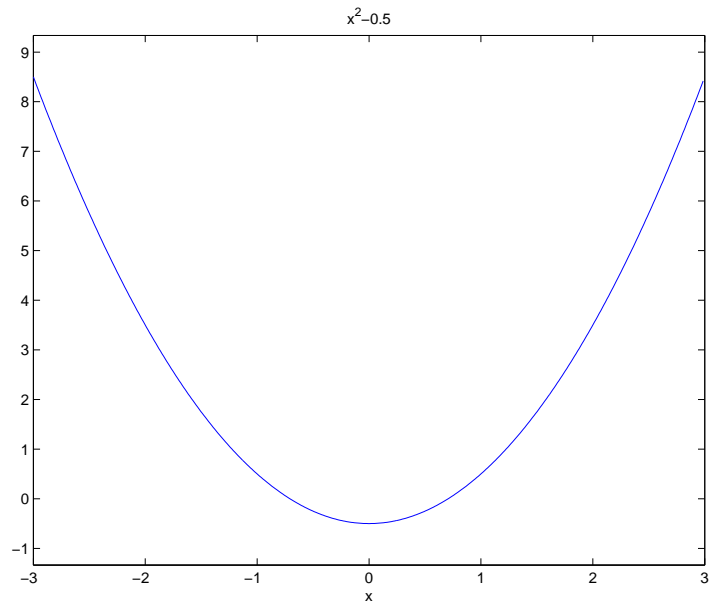


Figura 7.8: Grafico di $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ in $[-3, 3]$

k	x_k	$f(x)$
1	.6250e+00	-.1093e+00
2	.7188e+00	.1667e-01
3	.7109e+00	.5378e-02
4	.7089e+00	.2658e-02
5	.7075e+01	.5562e-03

Tabella 7.8: 5 iterazioni del Metodo di Tabulazione, con $n = 5$, applicato alla funzione in Fig. 7.8

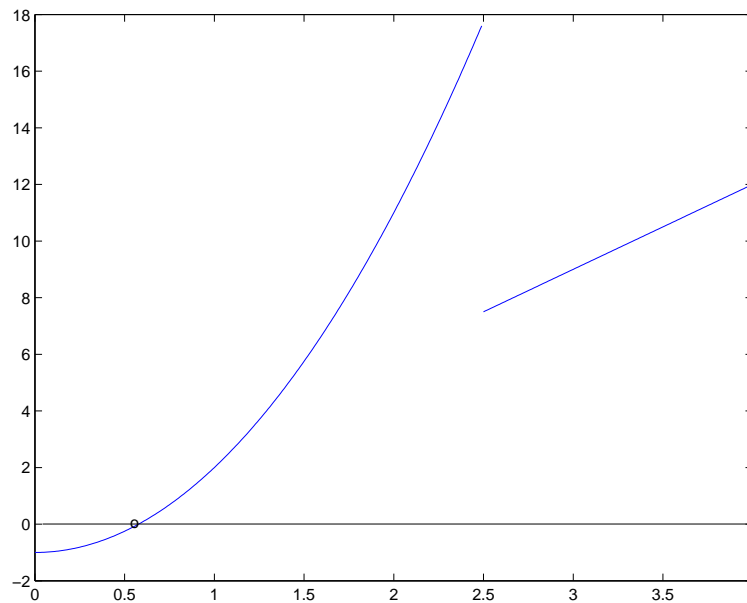


Figura 7.9: Grafico della funzione (7.8) in $[0, 4]$

x	$f(x)$
.0000e+00	-.1000e+01
.1000e+00	.2000e+01
.2000e+00	.1100e+02
.3000e+00	.9000e+01
.4000e+01	.1200e+02

Tabella 7.9: Primo passo del Metodo di Tabulazione, con $n = 5$, applicato alla funzione in Fig. 7.9

♣ **Esempio 7.14.** Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{se } x \leq 2.5 \\ 3x & \text{se } x > 2.5 \end{cases} \quad (7.8)$$

Essa ha due zeri nei punti $x^* = -\sqrt{3}/3 \simeq -0.57735$ ed $x^* = \sqrt{3}/3 \simeq 0.57735$, ed un punto di discontinuità in 2.5,

Si vuole determinare uno zero di f in $[0, 4]$ utilizzando il Metodo di Tabulazione. Scegliendo 5 punti equidistanti, cioè i punti $t_i = i - 1$ con $i = 1, \dots, 5$, si ottengono i valori riportati in Tabella 7.9.

Si osserva che la funzione f assume segno discorde agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$, il cui punto medio $x_1 = 0.5$ è la prima approssimazione dello zero di f . Dopo 5 iterazioni del Metodo di Tabulazione si ottengono i risultati riportati in Tabella 7.10.

♣

k	x_k	$f(x_k)$
1	.5000e+00	-.2500e+00
2	.6250e+00	.1718e+00
3	.5937e+00	.5761e-01
4	.5703e+00	-.2423e-01
5	.5761e+00	-.4078e-02

Tabella 7.10: 5 iterazioni del Metodo di Tabulazione, con $n = 5$, applicato alla funzione in Fig. 7.9

Nell'esempio 7.13 le approssimazioni determinate dal Metodo di Tabulazione sembrano avvicinarsi sempre più alla zero $\hat{x} = \sqrt{2}/2 \simeq 0.7071$, ovvero il metodo sembra convergere. Una giustificazione di tale risultato si può dare osservando che il Metodo di Tabulazione è essenzialmente basato sulla considerazione che se una funzione continua assume valori di segno opposto agli estremi di un intervallo, la funzione si annulla almeno in un punto interno a tale intervallo. Si ricorda, infatti, il seguente:

Teorema 7.1. [Teorema degli zeri]

Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Da un punto di vista grafico tale risultato può essere espresso dicendo che se i due punti del grafico di $y = f(x)$, di ascissa a e b , si trovano rispettivamente al di sopra ed al di sotto (o viceversa) dell'asse delle x , allora il grafico della funzione interseca tale asse in almeno un punto.

Tuttavia, è bene precisare, e se ne ha conferma nell'esempio 7.14, che nel Metodo di Tabulazione si può avere la convergenza anche senza le ipotesi del Teorema degli zeri. Al fine di determinare condizioni sufficienti alla convergenza introduciamo l'**errore di troncamento analitico** alla k -ma iterazione, definito come:

$$e_k = x^* - x_k, \quad (7.9)$$

con x^* uno zero della funzione nell'intervallo $[a, b]$. Si osservi che la convergenza del metodo ad uno zero della funzione è equivalente alla convergenza a zero della successione dei valori assoluti degli errori, cioè:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |e_k| = 0 \quad (7.10)$$

Sussiste il seguente:

Teorema 7.2. *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora, condizione sufficiente affinché il Metodo di Tabulazione con n punti equidistanti⁵, converga a x^* , dove x^* è uno zero della funzione nell'intervallo $[a, b]$ è che $f(a) \cdot f(b) < 0$.*

⁵Un risultato analogo continua a valere se i punti della tabulazione sono arbitrari

Dimostrazione Il Metodo di Tabulazione genera, a partire dall'intervallo $[a_0, b_0] = [a, b]$, una successione di intervalli tutti contenenti uno zero x^* della funzione (Teorema degli zeri). Inoltre essendo i punti della tabulazione equidistanziati, ognuno di questi intervalli ha ampiezza uguale a $1/(n-1)$ dell'ampiezza dell'intervallo precedente; si ha quindi:

$$x^* \in [a_k, b_k], \quad \forall k \geq 0; \tag{7.11}$$

$$b_k - a_k = \frac{1}{n-1}(b_{k-1} - a_{k-1}), \quad \forall k \geq 1. \tag{7.12}$$

Applicando l'uguaglianza (7.12) ripetutamente, si ottiene che:

$$b_k - a_k = \frac{1}{(n-1)^k}(b_0 - a_0), \quad \forall k \geq 1. \tag{7.13}$$

Poichè $x_k = (a_k + b_k)/2$ è il punto medio dell'intervallo $[a_k, b_k]$, dalla (7.11) si ha:

$$|e_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) \tag{7.14}$$

da cui, in base alla (7.13) si ha:

$$|e_k| \leq \frac{1}{2(n-1)^k}(b_0 - a_0), \quad \forall k \geq 0. \tag{7.15}$$

Quindi, la successione dei valori assoluti degli errori converge a zero perchè è limitata superiormente da una successione che converge a zero. Di conseguenza, la successione $\{x_k\}$ converge a x^* . ■

Dalla (7.14) si ricava che una stima dell'errore è fornita dalla metà dell'ampiezza dell'intervallo corrente che rappresenta il massimo errore, in valore assoluto, che si può avere in quella iterazione, cioè

$$e_k = \mathcal{O}((n-1)^{-k})$$

da cui si può dedurre la relazione che esiste tra l'errore alla $k+1$ -ma iterazione e quello dell'iterazione precedente:

$$|e_{k+1}| \simeq \frac{1}{n-1}|e_k| \tag{7.16}$$

La relazione mostra che, ad ogni iterazione del Metodo di Tabulazione, l'errore diminuisce rispetto a quello all'iterazione precedente del fattore $n-1$. In tal caso, si dice che il metodo **converge in modo lineare**. In generale sussiste la seguente:

Definizione 7.2. Si dice che una successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a x^* ha ordine di convergenza p se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ ed un numero reale positivo C (< 1 se $p = 1$) tale che, per ogni $n > \bar{n}$ si abbia

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p$$

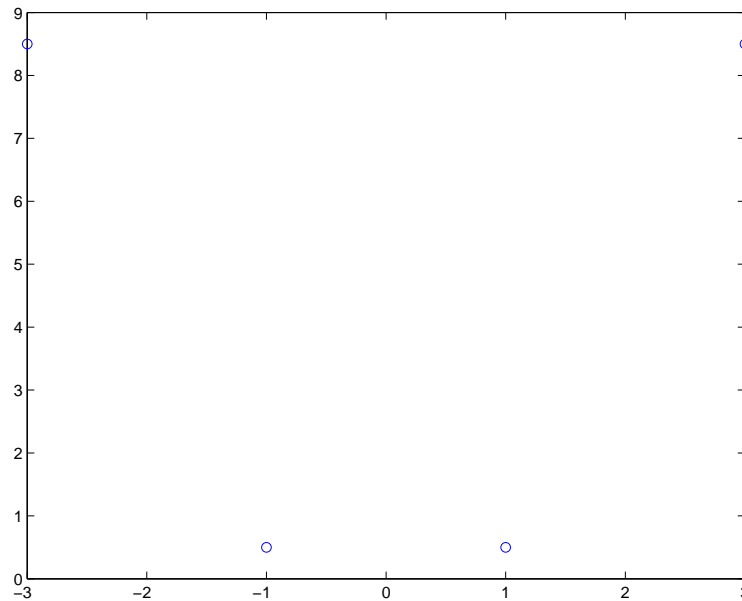


Figura 7.10: Tabulazione di $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ in $[-3, 3]$ con $n = 4$

In particolare quando $p = 1$ si parla di **convergenza lineare**, per $p = 2$ **convergenza quadratica** ed, in generale, per $p > 1$ **convergenza superlineare**; la costante C prende il nome di **raggio di convergenza**. Il teorema precedente conferma che, per il Metodo di Tabulazione, la convergenza è assicurata purché si conosca un intervallo $[a_0, b_0]$ tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$ (sotto le ipotesi di continuità per f). Metodi iterativi per la risoluzione di equazioni non lineari che hanno la suddetta proprietà di convergenza sono detti **globali**, i quali si distinguono dai metodi **locali**, ovvero da quei metodi la cui convergenza ad uno zero della funzione dipende non solo dall'intervallo di ricerca, ma anche dalla scelta opportuna dei punti iniziali del procedimento iterativo.

7.3 Il Metodo di Bisezione

♣ **Esempio 7.15.** Consideriamo la funzione dell'esempio 7.13:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2},$$

essa ha due zeri nei punti $x^* = -\sqrt{2}/2 \simeq -0.7071$ e $x^* = \sqrt{2}/2 \simeq 0.7071$. Se tabuliamo la funzione in $[-3, 3]$ con 4 punti di tabulazione non troviamo alcun intervallo dove la funzione cambia segno, come mostrato in Figura 7.10. Quindi, volendo applicare un altro passo, infittiamo la tabulazione, scegliendo $n = 7$ punti di tabulazione della funzione in $[-3, 3]$. Dalla Figura 7.11 si può evincere la presenza di almeno due zeri della funzione, e precisamente il primo nell'intervallo $[-1, 0]$ ed il secondo nell'intervallo $[0, 1]$.

♣

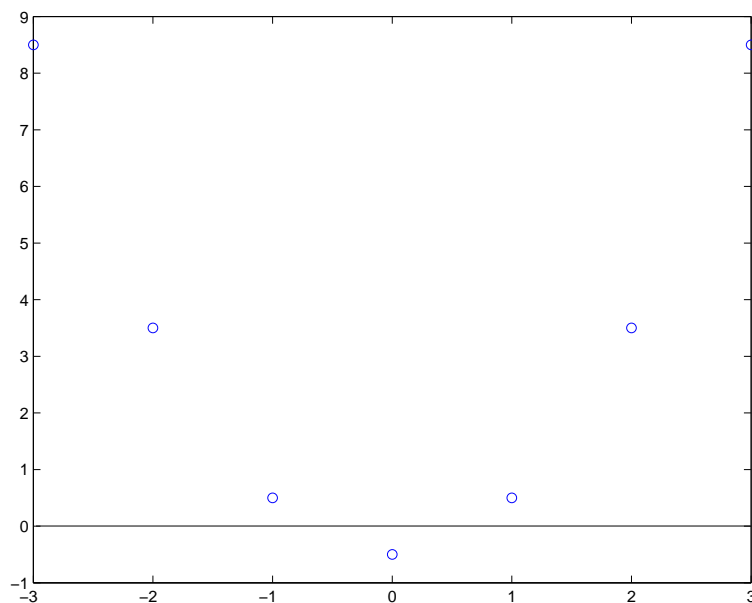


Figura 7.11: Tabulazione di $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ in $[-3, 3]$ con $n = 7$

Nell'esempio 7.15 si osserva che l'individuazione di un intervallo che potrebbe contenere uno zero dipende dal numero di punti di tabulazione, nel senso che una tabulazione con pochi punti può non rivelare la presenza di uno o più zeri. D'altra parte per individuare intervalli contenenti delle soluzioni potrebbe essere necessario scegliere troppi punti di tabulazione, e quindi possono essere necessarie numerose valutazioni della funzione, la maggior parte delle quali spesso "superflue". Da queste considerazioni si deduce che il Metodo di Tabulazione è di utilità pratica solo per una "rozza" localizzazione delle radici di una equazione, cioè per la determinazione di intervalli in cui potrebbe esservi una radice. Un metodo più efficiente per la risoluzione di equazioni non lineari è il **Metodo di Bisezione**.

♣ **Esempio 7.16.** Consideriamo l'equazione dell'esempio 7.10:

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0 \quad (7.17)$$

si consideri l'intervallo $[0, 2]$, in cui la funzione ha un solo zero, $x^* = 2/3$ e valori estremi di segno opposto. Si consideri il punto medio dell'intervallo iniziale, cioè $x_1 = 1$. Si generano in tal modo due sottointervalli, $[0, 1]$ e $[1, 2]$, entrambi di ampiezza uguali alla metà di quello iniziale, e x_1 costituisce un'approssimazione dello zero della funzione. A questo punto, osservando che la funzione assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$, si può applicare il procedimento appena descritto a tale intervallo, ottenendo una nuova approssimazione della soluzione, $x_2 = 0.5$, ed altri due sottointervalli, $[0, 0.5]$ e $[0.5, 1]$. Iterando il procedimento è possibile determinare una successione di intervalli, ciascuno di ampiezza uguali alla metà del precedente e contenente una soluzione di (7.17). Il procedimento descritto è noto come **Metodo di Bisezione**.

k	x_k	$f(x_k)$
1	1.0000e+00	1.8768e+01
2	5.0000e-01	-1.0938e+01
3	7.5000e-01	4.7461e+00
4	6.2500e-01	-2.5559e+00
5	6.8750e-01	1.2325e+00
6	6.5625e-01	-6.2764e-01
7	6.7188e-01	3.1097e-01
8	6.6406e-01	-1.5620e-01
9	6.6797e-01	7.7921e-02
10	6.6602e-01	-3.9005e-02
11	6.6699e-01	1.9491e-02
12	6.6650e-01	-9.7485e-03
13	6.6675e-01	4.8735e-03
14	6.6663e-01	-2.4369e-03
15	6.6669e-01	1.2184e-03
16	6.6666e-01	-6.0922e-04
17	6.6667e-01	3.0461e-04
18	6.6666e-01	-1.5231e-04
19	6.6667e-01	7.6153e-05

Tabella 7.11: Metodo di Bisezione applicato all'equazione $3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0$ in $[0, 2]$ (prime 19 iterazioni)

In Tabella 7.11 sono riportati i valori x_k , e i corrispondenti valori della funzione, per $k = 1, \dots, 19$, ottenuti applicando il Metodo di Bisezione alla risoluzione di (7.5). Si osservi che con 5 iterazioni ($k = 5$), si ottiene una approssimazione della soluzione migliore di quella che si ottiene tabulando la funzione in 11 punti equidistanti nell'intervallo (vedi Tabella 7.1). Ciò conferma la maggiore efficienza del Metodo di Bisezione rispetto al Metodo di Tabulazione generale. In Figura 7.12 è rappresentata graficamente l'applicazione del metodo alla risoluzione di (7.17).



♣ **Esempio 7.17.** Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1/3, & \text{se } x \leq 2/3 \\ x/3 & \text{se } x > 2/3 \end{cases} \quad (7.18)$$

il cui grafico è riportato in Figura 7.13.

Applicando il Metodo di Bisezione nell'intervallo $[0, 1[$ si ottengono i valori riportati in Tabella 7.12.



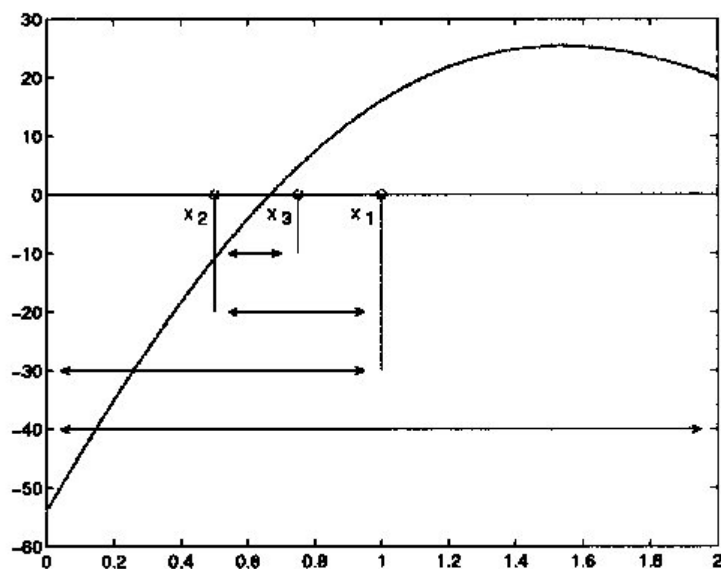


Figura 7.12: Metodo di Bisezione applicato all'equazione $3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0$ in $[0, 2]$ (prime 3 iterazioni)

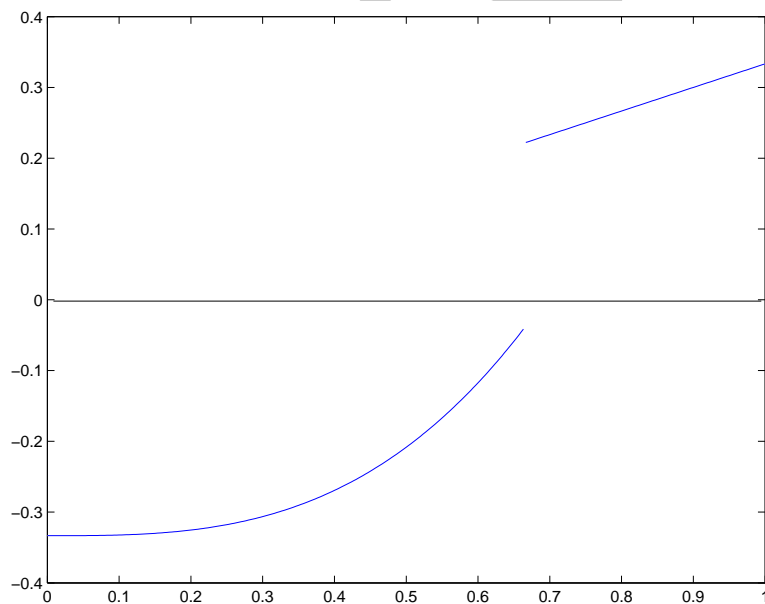


Figura 7.13: Grafico della funzione (7.18) in $[0, 1]$

n	x_n	$f(x_n)$
1	1.0000e+00	1.8768e+01
2	5.0000e-01	-0.20833e+00
3	7.5000e-01	0.25000e+00
4	6.2500e-01	-0.89192e-01
5	6.8750e-01	0.22916e+00
6	6.5625e-01	-0.50710e-01
7	6.7188e-01	0.22396e+00
8	6.6406e-01	-0.40499e-01
9	6.6797e-01	0.22656e+00

Tabella 7.12: Metodo di Bisezione applicato alla (7.18) in $[0, 2]$ (prime 9 iterazioni)

Il Metodo di Bisezione è un particolare metodo iterativo che, a partire dall'intervallo di ricerca $[a, b]$, genera una successione di valori $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$, come descritto di seguito: Sia $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ e sia $[a_k, b_k]$ ($k > 0$) il generico intervallo:

- calcolo del punto medio di $[a_k, b_k]$:

$$x_{k+1} = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}$$

- scelta dell'intervallo successivo:

- se $f(x_{k+1})f(a_k) \leq 0$, allora $[a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv [a_k, x_{k+1}]$;
- altrimenti $[a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv [x_{k+1}, b_k]$.

Di seguito è riportata una prima versione dell'algoritmo, scritto utilizzando il linguaggio Pascal-like, basato sul Metodo di Bisezione. Si osservi che in tale versione è fissato il numero di iterazioni (rappresentato dalla variabile `itmax`) da effettuare. Le variabili `a`, `b` e `c` rappresentano rispettivamente gli estremi dell'intervallo corrente ed il suo punto medio, mentre `fa`, `fb`, `fc` sono i valori che la funzione, rappresentata da `f`, assume nei tre punti considerati. Si osservi, infine, che gli estremi dell'intervallo iniziale, `a` e `b`, come pure la funzione `f`, sono i dati di input dell'algoritmo. Le variabili `c` e `fc` rappresentano i dati di output, cioè, rispettivamente, l'approssimazione dello zero e del valore di `f` in `c`.

```

procedure fxbis(input: a,b,f,itmax, out: c,fc)
  /# SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /# di una funzione mediante il Metodo di Bisezione
  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  var: a : reale {primo estremo dell'intervallo di ricerca}
  var: b : reale {secondo estremo dell'intervallo di ricerca}
  var: f : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var: itmax : reale {numero massimo di iterazioni}
  var: c : reale {approssimazione dello zero}
  var: fc : reale {valore di f in c}

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
  fa := f(a);
  fb := f(b);
  for i = 1, itmax
  /# calcolo del punto medio e del valore della funzione
  c := (a + b)/2;
  fc := f(c);
  if (fc * fa ≤ 0) then {test sul segno di f}
    b := c;
    fb := fc;
  else

```

Procedura 7.1: Algoritmo di Bisezione (prima versione) - continua

```

        a := c;
        fa := fc;
    endif
    k := k + 1;
endfor
end fxbis

```

Procedura 7.1: Algoritmo di Bisezione (prima versione) - fine

7.3.1 Applicabilità del Metodo di Bisezione

Si osservi che il Metodo di Bisezione è un procedimento di "tabulazione nel punto medio", più precisamente di tabulazione con $n = 3$ punti equidistanziati. Di conseguenza il Metodo di Bisezione eredita le caratteristiche del Metodo di Tabulazione. Si deduce così che può essere sempre applicato a funzioni che sono valutabili su tutto l'intervallo di ricerca, mentre se tale condizione non è verificata, nulla si può dire sulla sua applicabilità. L'esempio che segue mostra che, nel caso di funzioni non ovunque definite, l'applicabilità del Metodo di Bisezione dipende dall'intervallo di ricerca, ovvero dalla scelta dei punti di tabulazione.

♣ **Esempio 7.18.** Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

La funzione f ha due zeri in $x^* = -0.5$ e $\hat{x} = 0.5$. Applichiamo il Metodo di Bisezione in $[-2, 1.5]$. Indicato con c il punto medio dell'intervallo corrente $[a_k, b_k]$, dopo 5 iterazioni si ottengono i risultati mostrati nella Tabella 7.13.

Il metodo, in questo caso, sembra avvicinarsi ad una delle radici dell'equazione (-0.5). Tuttavia, se vogliamo applicare il Metodo di Bisezione alla stessa funzione f , cambiando però l'intervallo in $[-2, 2]$, già alla prima iterazione il metodo diventa non applicabile. Infatti il valore del punto medio dell'intervallo al primo passo è $x_1 = 0$ e qui la funzione non è definita.

♣

7.3.2 Convergenza

Come abbiamo fatto per l'applicabilità, anche la convergenza può essere dedotto dai medesimi risultati del Metodo di Tabulazione. Dal Teorema 7.2 segue, quindi, il seguente:

Corollario 7.1. *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, con $f(a) \cdot f(b) < 0$.*

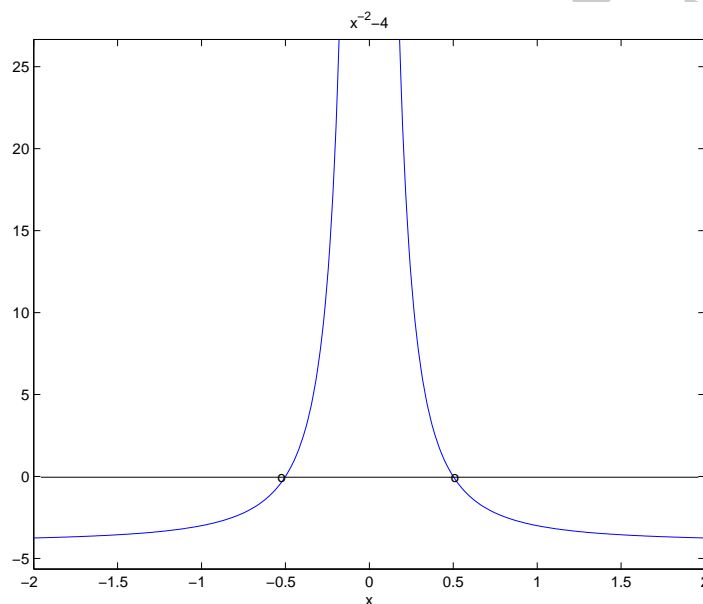


Figura 7.14: Grafico di $f(x) = \frac{1}{x^2} - 4$ in $[-2, 2]$

k	c	$f(c)$
1	-0.2500	12.000
2	-1.1250	-3.2099
3	-0.6875	-3.4711
4	-0.4688	0.5511
5	-0.5781	-1.0080

Tabella 7.13: 5 iterazioni del Metodo di Bisezione applicato alla funzione in Fig. 7.14

Allora, condizione sufficiente affinché il Metodo di Bisezione converga a x^* , dove x^* è uno zero della funzione nell'intervallo $[a, b]$ è che $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Il corollario precedente conferma che il Metodo di Bisezione converge sotto opportune ipotesi; inoltre trattandosi di un metodo di Tabulazione, anche esso converge linearmente. In particolare dalla relazione (7.16) con $n = 3$, si ottiene

$$|e_{k+1}| \simeq \frac{1}{2}|e_k| \quad (7.19)$$

da cui si ha che il raggio di convergenza del Metodo di Bisezione è $1/2$.

Si osservi, infine, che analogamente al Metodo di Tabulazione, anche per il Metodo di Bisezione le ipotesi di continuità della funzione, a volte, non sono necessarie per la convergenza del metodo. A tal fine si consideri nuovamente l'esempio 7.16. In tale esempio la funzione non ha radici, tuttavia la successione determinata dal Metodo di Bisezione (Tabella 7.12) sembra comunque convergere al valore $2/3$, cioè il punto di discontinuità della funzione. Ovvero il metodo riesce in ogni caso a fornire una soluzione⁶.

7.4 Il Metodo di Newton

Nel Metodo di Bisezione la successione di valori $\{x_k\}$ è generata tenendo conto solo delle variazioni di segno della funzione negli estremi degli intervalli $[a_k, b_k]$. Non è utilizzata alcuna informazioni sull'andamento della funzione; ad esempio potrebbe essere utile avere informazioni sulla "pendenza" della funzione nell'intervallo di ricerca, che consentano di selezionare lo stesso in modo più efficiente.

♣ **Esempio 7.19.** Consideriamo l'equazione non lineare:

$$f(x) = 0.2x - \log(x) = 0$$

Se consideriamo la funzione f in $[1, 7]$ essa ha uno zero in $x^* = 1.2959$, ovvero ha uno zero vicino all'estremo sinistro dell'intervallo. In questo caso, il Metodo di Bisezione è abbastanza "lento". Osserviamo, infatti, la Figura 7.16

dove sono rappresentati i 3 passi del Metodo di Bisezione, x_3 è ancora "abbastanza" lontano dalla soluzione x^* , come si può osservare anche dai valori numerici riportati nella Tabella 7.14.

Se indichiamo con t la retta tangente a f nel punto $(1, f(1)) = 0.2$, detta z l'ascissa della sua intersezione con l'asse delle ascisse, tale punto risulta molto più vicino ad x^* , come si evince dalla Tabella 7.14.

♣

Un metodo che tiene conto, in qualche modo, dell'andamento della funzione è il **Metodo di Newton**.

⁶In questo senso si parla di robustezza del Metodo di Bisezione. Più in generale la **robustezza** è una caratteristica dei metodi globalmente convergenti.

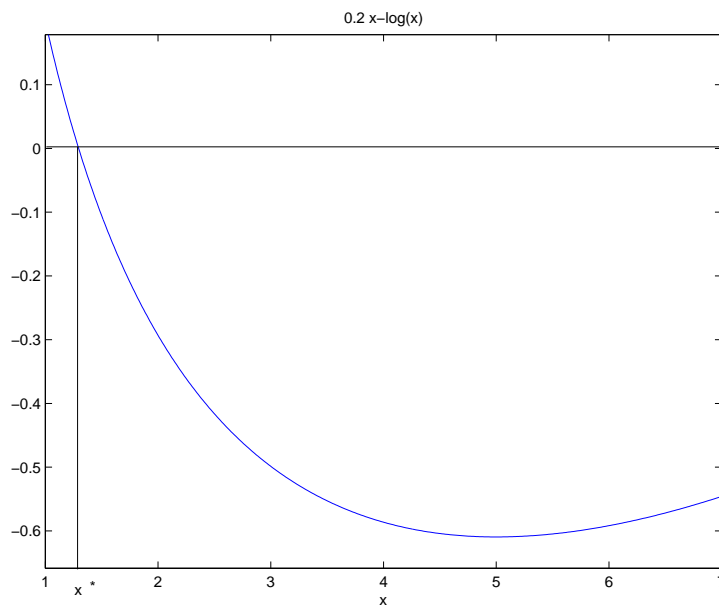


Figura 7.15: Grafico di $f(x) = 0.2x - \log(x)$ in $[1, 7]$

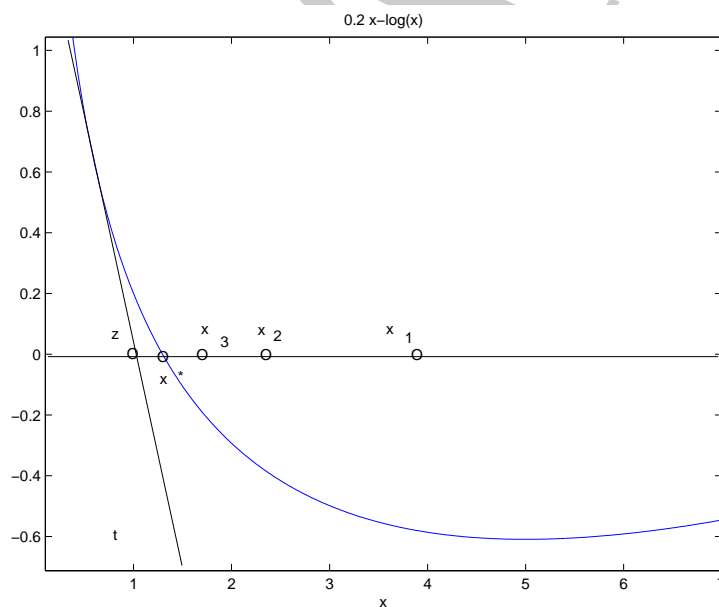


Figura 7.16: Metodo di Bisezione applicato all'equazione $0.2x - \log(x) = 0$ in $[1, 7]$ (prime 3 iterazioni)

$x_1 = 4$	$f(x_1) = -0.5863\dots$
$x_2 = 2.5$	$f(x_2) = -0.4163\dots$
$x_3 = 1.75$	$f(x_3) = -0.2096\dots$
$z = 1.25$	$f(z) = 0.0269\dots$

Tabella 7.14: 3 iterazioni del Metodo di Bisezione applicato alla funzione in Fig. 7.16

k	x_k	$f(x_k)$
1	5.5556e-01	-7.0818e+00
2	6.6041e-01	-3.7601e-01
3	6.6664e-01	-1.3582e-03
4	6.6667e-01	-1.8001e-08

Tabella 7.15: 4 iterazioni del Metodo di Newton applicato all'equazione $3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0$ con $x_0 = 1$.

♣ **Esempio 7.20.** Considerata l'equazione:

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0 \quad (7.20)$$

si scelga il punto $x_0 = 1$ e si consideri l'equazione della retta tangente alla curva $y = f(x)$ in questo punto:

$$m_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 16 + 36(x - 1).$$

Il punto di intersezione di tale retta con l'asse delle ascisse (che si ottiene risolvendo $m_0(x) = 0$) è:

$$x_1 = 20/36 \simeq 0.55556,$$

Si può procedere in modo analogo a partire da x_1 , ottenendo:

$$m_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \simeq -7.0815 + 67.539(x - 0.55556);$$

da cui:

$$x_2 \simeq 0.66041.$$

In Tabella 7.15 sono riportati i valori ottenuti nelle prime 4 iterazioni del Metodo di Newton applicato all'equazione (7.20), con $x_0 = 1$.

Confrontando tali risultati con quelli ottenuti con il Metodo di Bisezione, riportati nella Tabella 7.11, si osserva che, per calcolare un'approssimazione $\tilde{x} = 0.66667$ con quattro cifre significative dello zero $x^* = 0.66666\dots$:

- il *Metodo di Bisezione* impiega 19 iterazioni calcolando:

$$\tilde{x} = x_{19} = 0.66667 \quad |f(x_{19})| = 7.6153 \times 10^{-5}$$

- il *Metodo di Newton* impiega 4 iterazioni calcolando:

$$\tilde{x} = x_4 = 0.66667 \quad |f(x_4)| = 1.8001 \times 10^{-8}$$

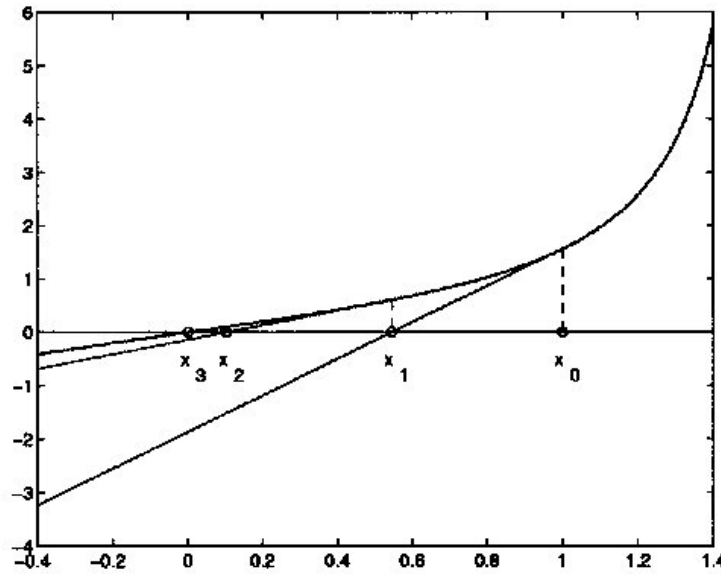


Figura 7.17: 3 iterazioni del Metodo di Newton applicato all'equazione $\tan x = 0$ con $x_0 = 1$

Si può affermare quindi che, per l'equazione considerata, il Metodo di Newton fornisce valori vicini alla soluzione più velocemente rispetto al Metodo di Bisezione. ♣

♣ **Esempio 7.21.** Consideriamo l'equazione:

$$\tan x = 0,$$

In Fig. 7.17 è illustrata graficamente l'applicazione di 3 iterazioni del Metodo di Newton alla risoluzione di tale equazione, con approssimazione iniziale dello zero $x_0 = 1$. ♣

Il procedimento appena descritto è noto come **Metodo di Newton**. Tale metodo costruisce una successione di valori $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ nel modo seguente:

- $\forall k = 0, 1, 2, \dots$, a partire da un valore iniziale x_0 , si considera la tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(x_k, f(x_k))$, e si assume come approssimazione dello zero della funzione il valore, x_{k+1} , ottenuto intersecando tale retta con l'asse delle ascisse, cioè:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (7.21)$$

Di seguito è riportata una prima versione dell'algoritmo di Newton per risolvere l'equazione:

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \subseteq A, \quad (7.22)$$

dove $f : A \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ è una funzione con derivata f' definita in $[a, b]$.

```

procedure fxnew(input:  $x_0, f, f', itmax$ , out:  $xnew, fxnew$ )
  /# SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /# di una funzione mediante il Metodo di Newton
  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  var:  $x_0$       : reale           {approssimazione iniziale dello zero}
  var:  $f$        : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var:  $f'$       : funzione esterna {derivata di  $f$ }
  var:  $itmax$    : reale           {numero massimo di iterazioni}
  var:  $xnew$     : reale           {approssimazione dello zero}
  var:  $fxnew$    : reale           {valore di  $f$  in  $xnew$ }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
   $k := 0$ 
  /# generazione della successione delle approssimazioni
  repeat
     $x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k)$            {calcolo}
     $k := k + 1$                                {dell'approssimazione}
  until (condizione di arresto verificata)
end fxnew

```

Procedura 7.2: Algoritmo di Newton (prima versione)

7.4.1 Applicabilità del Metodo di Newton

Abbiamo visto che, per applicare il Metodo di Bisezione, è sufficiente che la funzione f sia valutabile nell'intervallo di ricerca. Per il Metodo di Newton invece è richiesto l'uso

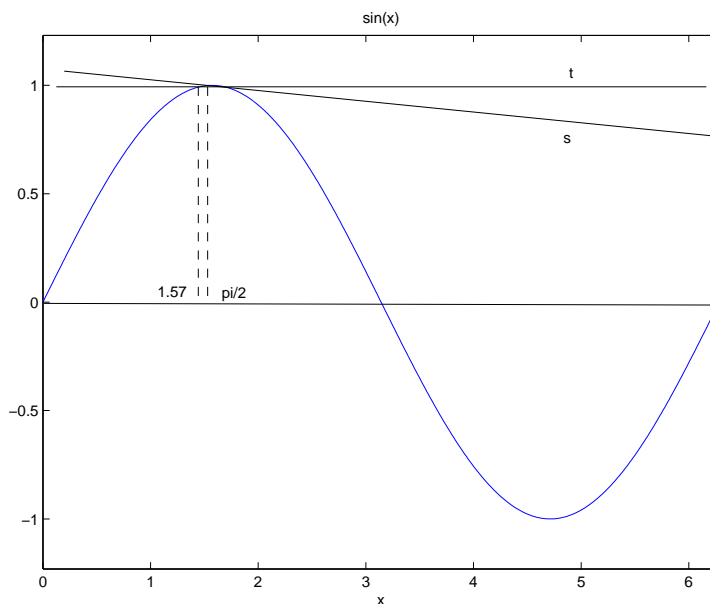


Figura 7.18: Metodo di Newton applicato all'equazione $\sin(x) = 0$

della derivata prima della funzione. Inoltre, nel Metodo di Newton l'approssimazione x_{k+1} può essere calcolata solo se è $f'(x_k) \neq 0$. La Fig. 7.18 mostra un'interpretazione geometrica di tale condizione.

♣ **Esempio 7.22.** Se si considera l'equazione:

$$\sin(x) = 0$$

in $]0, 2\pi[$ e si vuole calcolare un'approssimazione dello zero π , con il Metodo di Newton, in tale intervallo, scegliendo come approssimazione iniziale $x_0 = \pi/2$, la retta tangente t non ha intersezione con l'asse delle x , essendo ad esso parallela. Infatti, in questo caso, $f'(x_0) = \cos(\pi/2) = 0$

Purtoppo però, anche se come punto iniziale si sceglie un punto "vicino" a $\pi/2$, ad esempio, si pone $x_0 = 1.58$ per cui $f'(x_0) \neq 0$, la retta tangente s non ha intersezione con l'asse delle x nell'intervallo di ricerca dello zero.

È quindi intuitivamente giustificabile il fatto che il Metodo di Newton non sia applicabile non solo se $f'(x_k)$ è uguale a zero, ma anche se è molto piccolo in modulo.

♣

7.4.2 Convergenza

Si vogliono analizzare le caratteristiche di convergenza del Metodo di Newton, ovvero si vuole studiare sotto quali condizioni il Metodo di Newton converge ad una radice di f .

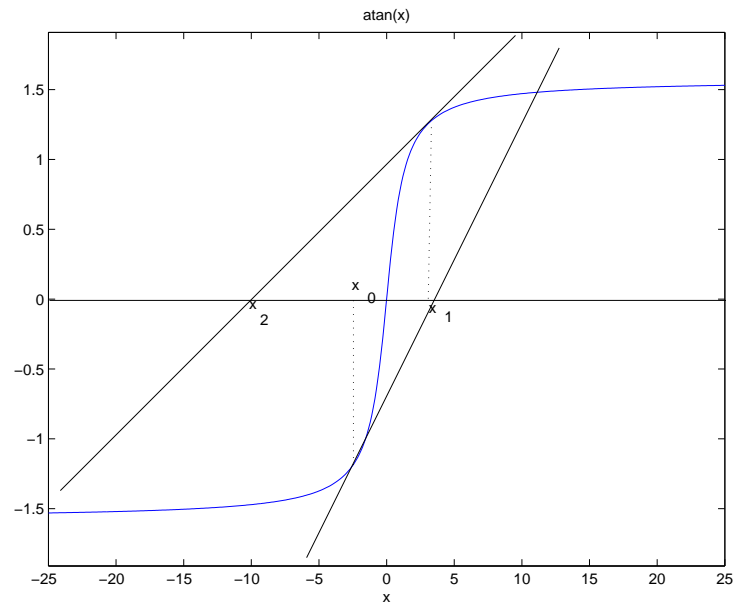


Figura 7.19: Metodo di Newton applicato all'equazione $\arctan(x) = 0$ con $x_0 = -2$ (prime 3 iterazioni) (esempio in cui l'algoritmo diverge)

k	x_k	$f(x_k)$
0	-2	-1.1071
1	3.5357	1.2952
2	-13.9510	-1.4992

Tabella 7.16: Metodo di Newton applicato all'equazione $\arctan(x) = 0$ con $x_0 = -2$

♣ **Esempio 7.23.** Applichiamo il Metodo di Newton all'equazione:

$$f(x) = \arctan(x) = 0$$

In Fig. 7.19 sono illustrate le prime 3 iterazioni del Metodo di Newton, applicato alla funzione $f(x) = \arctan(x)$ nell'intervallo $[-25, 25]$. Dalla Tabella 7.16 si evince che, partendo da $x_0 = -2$, la successione di approssimazioni generata si allontana dallo zero $x^* = 0$ dell'equazione, e pertanto il metodo diverge per tale scelta del punto iniziale.

Se applichiamo, invece, il Metodo di Newton scegliendo come punto iniziale $x_0 = 1$, dalla Tabella 7.17 si evince che dopo 4 iterazioni si ottiene una buona approssimazione dello zero

$$x_4 = -0.001061012... \quad f(x_4) = -0.001061017...$$

ovvero con la scelta di tale punto iniziale il metodo converge.



k	x_k	$f(x_k)$
0	1	0.78
1	-0.507...	-0.511...
2	0.1168...	0.1168...
3	-0.00106...	-0.00106..

Tabella 7.17: Metodo di Newton applicato all'equazione $\arctan(x) = 0$ con $x_0 = 1$ (prime 4 iterazioni)

Come è stato evidenziato dall'esempio 7.23, per il Metodo di Newton la sola continuità della funzione non è sufficiente per la convergenza, in quanto quest'ultima dipende dalla scelta del punto iniziale x_0 : se tale punto è "abbastanza vicino" alla soluzione, allora il metodo genera una successione di valori convergente alla soluzione. Da ciò si deduce che, a differenza dei metodi di Tabulazione e Bisezione, il Metodo di Newton è un metodo "a convergenza locale". Condizioni sufficienti per la convergenza del Metodo di Newton sono fornite dal:

Teorema 7.3. *Sia $f \in C^2([a, b])$ con $x^* \in [a, b]$ zero di f . Si assuma che $|f'(x)| \geq m$, per ogni $x \in [a, b]$, con $m > 0$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che, se $x_0 \in [a, b]$ è scelto in modo che $|x_0 - x^*| < \delta$, la successione $\{x_k\}$ generata dal Metodo di Newton converge a x^* . Inoltre, si ha⁷:*

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_k)|}{|f'(x_k)|} |x_k - x^*|^2, \quad \xi_k \in \text{int}[x_k, x^*], \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.23)$$

Dimostrazione Posto $M = \max |f''(x)|$, definiamo:

$$\delta = \tau(2m/M), \quad \text{con } 0 < \tau < 1. \quad (7.24)$$

Considerata la formula di Taylor di f di punto iniziale x_0 , si ha che:

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(x^* - x_0)^2, \quad \xi_0 \in [x_0, x^*]. \quad (7.25)$$

Poiché x^* è uno zero di f , il primo membro di (7.25) è uguale a zero. Dividendo ambo i membri di (7.25) per $f'(x_0)$ (che è non nullo per ipotesi) si ha

$$0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + (x^* - x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}(x^* - x_0)^2, \quad \xi_0 \in [x_0, x^*]. \quad (7.26)$$

Dalla (7.21) segue

$$|x_1 - x^*| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_0)|}{|f'(x_0)|} |x_0 - x^*|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} |x_0 - x^*|^2. \quad (7.27)$$

Poiché per ipotesi $|x_0 - x^*| < \delta = \tau(2m/M)$, dalla (7.27) segue che:

$$|x_1 - x^*| \leq \tau |x_0 - x^*| < |x_0 - x^*| < \delta. \quad (7.28)$$

⁷Dati due numeri reali distinti a e b , con $\text{int}[a, b]$ indicheremo l'intervallo i cui estremi sono rispettivamente il minimo e il massimo fra i due numeri

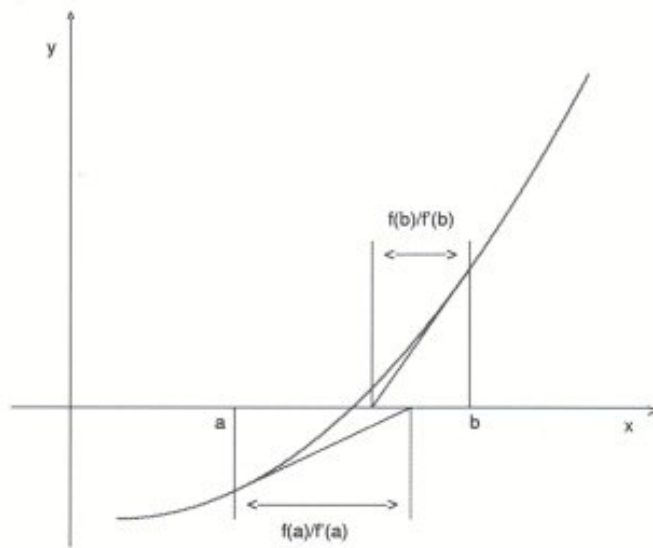


Figura 7.20: Illustrazione grafica del Teorema 7.4

Ciò dimostra che il nuovo punto x_1 è anch'esso distante dallo zero x^* meno della quantità δ . Applicando il ragionamento precedente a partire da x_1 si ottiene:

$$|x_2 - x^*| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_1)|}{|f'(x_1)|} |x_1 - x^*|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} |x_1 - x^*|^2, \quad (7.29)$$

con $\xi_1 \in \text{int}[x_1, x^*]$. Inoltre:

$$|x_2 - x^*| \leq \tau |x_1 - x^*| < \tau^2 |x_0 - x^*|. \quad (7.30)$$

In generale, abbiamo che:

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_k)|}{|f'(x_k)|} |x_k - x^*|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} |x_k - x^*|^2, \quad (7.31)$$

e quindi la (7.23). Inoltre, dalla (7.30):

$$|x_k - x^*| \leq \tau^k |x_0 - x^*|. \quad (7.32)$$

Poichè $0 < \tau < 1$, si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau^k = 0$, e quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| = 0$, che è equivalente alla convergenza a x^* della successione generata da Metodo di Newton. ■

Il teorema appena dimostrato conferma che la convergenza del Metodo di Newton è garantita se il punto iniziale è sufficientemente vicino alla soluzione.

Il teorema seguente, che ci limiteremo ad enunciare, fornisce una condizione sufficiente per la convergenza del Metodo di Newton indipendentemente dalla scelta del punto iniziale. Chiaramente in questo caso le ipotesi sulla funzione f sono più forti.

Teorema 7.4. *Sia $f \in C^2[a, b]$; si supponga inoltre che sia $f(a)f(b) < 0$ e nell'intervallo $[a, b]$ sia $f' \neq 0$ e f'' di segno costante. Se*

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a, \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a, \quad (7.33)$$

allora il Metodo di Newton converge comunque si scelga il punto iniziale x_0 nell'intervallo $[a, b]$.

Le condizioni espresse dal teorema ora enunciato possono essere geometricamente (vedi Fig. 7.20) interpretate come segue: la funzione f è strettamente monotona nell'intervallo $[a, b]$, non cambia concavità in tale intervallo, assume valori discordi agli estremi e le tangenti alla curva di equazione $y = f(x)$ nei punti di ascissa a e b intersecano l'asse x in punti interni all'intervallo $[a, b]$.

Per quanto riguarda la velocità di convergenza del Metodo di Newton, si osservi, dalla (7.32), che l'errore ad una certa iterazione è circa il quadrato dell'errore alla iterazione precedente. Ovvero il Metodo di Newton converge quadraticamente, come mostra il:

Teorema 7.5. [Velocità di convergenza del Metodo di Newton]

Sia $f \in C^2([a, b])$ con $x^ \in [a, b]$ ed $f'(x^*) \neq 0$. Se x_0 è scelto sufficientemente vicino a x^* la successione $\{x_n\}$ generata dal Metodo di Newton converge quadraticamente a x^* ed, inoltre,*

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2, \quad \xi_n \in [x_n, x^*], \quad (7.34)$$

dove $e_h = x_h - x^*$

Informazioni sul raggio di convergenza si hanno dal seguente:

Teorema 7.6. [Raggio di convergenza del Metodo di Newton]

Nelle ipotesi del Teorema 7.5, il Metodo di Newton converge alla soluzione x^ se, posto $|x_0 - x^*| = \rho$ e*

$$K(\rho) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-x^*|<\rho} |f''(x)|}{\min_{|x-x^*|<\rho} |f'(x)|},$$

si ha

$$K(\rho)\rho < 1$$

Si può dimostrare che se x^* è una radice di molteplicità $n > 1$, allora il Metodo di Newton converge (solo) linearmente. Si osservi che $K(\rho)\rho \rightarrow 0$ se $\rho \rightarrow 0$ e, quindi, i due teoremi ora dimostrati assicurano che, se x^* è radice semplice di $f \in C^2[a, b]$, allora il Metodo di Newton converge quadraticamente purchè l'approssimazione iniziale sia scelta sufficientemente vicina a x^* . La convergenza quadratica implica che (almeno in vicinanza della soluzione) le cifre corrette della soluzione approssimata raddoppiano ad ogni iterazione; una conferma sperimentale di questo fatto si ha nell'esempio 7.20.

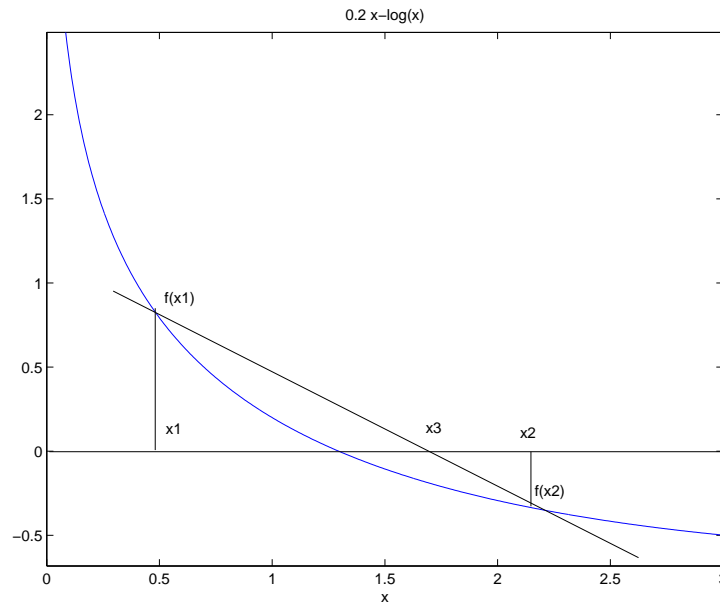


Figura 7.21: Approssimazione della soluzione

7.5 Il Metodo delle Secanti

♣ **Esempio 7.24.** Consideriamo la funzione:

$$f(x) = 0.2x - \log(x)$$

assegnati i punti x_1 ed x_2 ed i valori corrispondenti $f(x_1)$ e $f(x_2)$ è possibile costruire la retta secante $y = r(x)$ passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$, dove:

$$r(x) = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad (7.35)$$

La Figura 7.21 mostra che la radice $x^* = 1.2959\dots$ si può approssimare con x_3 ottenuto come intersezione di $y = r(x)$ con l'asse delle ascisse.

Tale idea è alla base del metodo numerico detto **Metodo delle Secanti**. ♣

Il **Metodo delle Secanti** può essere interpretato come una variante del Metodo di Newton in cui, al passo $(n + 1)$ -mo anziché considerare la tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_n si costruisce la secante alla curva nei punti di ascissa x_n e x_{n-1} rispettivamente; in altre parole, x_{n+1} è calcolata come intersezione di tale secante con l'asse delle ascisse.

Come il Metodo di Newton, anche il Metodo delle Secanti procede in modo iterativo: dati due valori iniziali x_0 e x_1 si calcola x_2 , quindi noti x_1 e x_2 si calcola x_3 e così via.

La generica iterazione k può essere sintetizzata come segue:

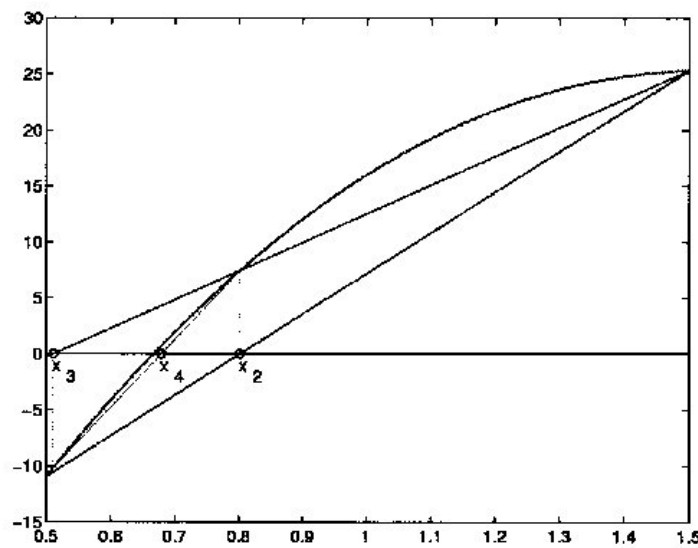


Figura 7.22: Metodo delle Secanti applicato alla risoluzione di $3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0$ con $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 1.5$ (prime tre iterazioni)

- si considera la retta secante alla curva $y = f(x)$ nei punti $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$,

$$m_{k+1}(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k),$$

e si assume come approssimazione dello zero della funzione il valore, x_{k+1} , ottenuto intersecando tale retta con l'asse delle ascisse, cioè:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (7.36)$$

In Fig. 7.22 è illustrata graficamente l'applicazione del Metodo delle Secanti.

Di seguito riportiamo l'algoritmo del Metodo delle Secanti.

```

procedure fxsec(input:  $x_0, f, itmax$ , out:  $xsec, fxsec$ )
  /# SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /#      di una funzione mediante il Metodo delle Secanti
  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  var:  $x_0$       : reale           {approssimazione iniziale dello zero}
  var:  $f$         : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var:  $itmax$     : reale           {numero massimo di iterazioni}
  var:  $xsec$      : reale           {approssimazione dello zero}
  var:  $fxsec$     : reale           {valore di  $f$  in  $xsec$ }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
   $k := 1$ 
  /# generazione della successione delle approssimazioni
  repeat
     $x_{k+1} := x_k - f(x_k)(x_k - x_{k-1}) / (f(x_k) - f(x_{k-1}))$            {calcolo}
     $k := k + 1$                                                          {dell'approssimazione}
  until (condizione di arresto verificata)
end fxsec

```

Procedura 7.3: Algoritmo del Metodo delle Secanti

7.5.1 Applicabilità del Metodo delle Secanti

Il Metodo delle Secanti offre, rispetto al Metodo di Newton il vantaggio di non richiedere la valutazione della derivata della funzione. Quindi, a differenza di quest'ultimo, è applicabile anche quando la funzione non ha derivata nota a priori. Tuttavia, proprio in vicinanza della soluzione, alcuni problemi computazionali possono derivare dal calcolo di:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (7.37)$$

n	$x_n - x^*$ (Secanti)	$x_n - x^*$ (Newton)
1	1.0227333e+00	1.0274087e+00
2	7.9795980e-01	6.7160857e-01
3	5.7919392e-01	4.2182169e-01
4	4.1961536e-01	2.4137373e-01
5	2.8766862e-01	1.1571221e-01
6	1.8486823e-01	3.9039751e-02
7	1.0634089e-01	6.2030114e-03
8	5.1321407e-02	1.8844420e-04
9	1.8362718e-02	1.8063821e-07
10	3.9135545e-03	1.6620039e-13
11	3.4139206e-04	0.0000000e+00
12	6.7124537e-06	0.0000000e+00
13	1.1657860e-08	0.0000000e+00
14	3.9857007e-13	0.0000000e+00
15	0.0000000e+00	0.0000000e+00

Tabella 7.18: Metodo di Newton e Metodo delle Secanti applicati alla risoluzione di $x^4(\sin x - \cos x) = 0$, con $x_0 = 2.4$ e $x_1 = 2.6$ (Secanti) e $x_0 = 2.5$ (Newton) $x^* = \pi/4$

che è rapporto fra due quantità che possono diventare numericamente nulle. Da queste considerazioni è ragionevole affermare che il Metodo di Newton è più "affidabile" di quello delle Secanti; quest'ultimo (con un calcolo accurato di (7.37)) è, comunque, da preferire quando il calcolo della derivata risulta computazionalmente molto costoso o addirittura impossibile.

7.5.2 Convergenza

♣ **Esempio 7.25.** Appliciamo il Metodo di Newton e quello delle Secanti per risolvere in $[0.5, 2]$:

$$x^4(\cos x - \sin x) = 0$$

che ha uno zero in $x^* = \pi/4$. In Tabella 7.18 è mostrata l'applicazione di 15 iterazioni dei due metodi. Si osserva che il Metodo delle Secanti converge meno velocemente di quello di Newton. ♣

Fra Metodo di Newton e Metodo delle Secanti, non è possibile affermare la superiorità dell'uno rispetto all'altro. I risultati in Tabella 7.18 mostrano che per l'esempio in esame, almeno nelle vicinanze della soluzione, i due metodi hanno comportamenti simili (si tenga conto che il costo computazionale di Newton è circa il doppio rispetto a quello delle Secanti); ciò non deve meravigliare visto che, se x_n e x_{n-1} sono vicini, allora la

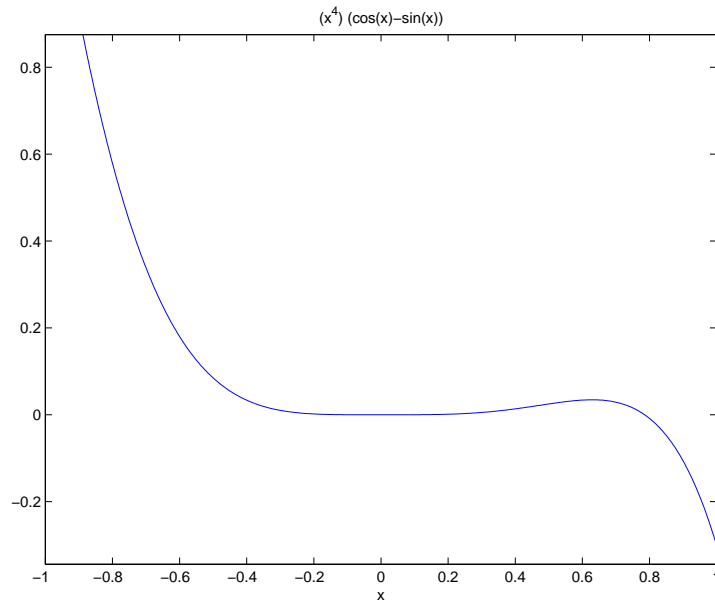


Figura 7.23: Grafico di $f(x) = x^4(\sin x - \cos x)$ in $[-1, 1]$

secante è una buona approssimazione della tangente. Il teorema che segue, ottenuto con argomenti del tutto analoghi a quelli utilizzati per la dimostrazione del Teorema 7.3, fornisce condizioni sufficienti alla convergenza del Metodo delle Secanti.

Teorema 7.7. [Convergenza del Metodo delle Secanti]

Si supponga $f \in C^2([a, b])$, x^ sia soluzione di*

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \subseteq A,$$

dove $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con derivata f' definita in $[a, b]$, tale che $f'(x^) \neq 0$. Se x_0 è scelto sufficientemente vicino a x^* la successione $\{x_n\}$ generata dal Metodo delle Secanti converge a x^* ed, inoltre*

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(\zeta_n)} e_n e_{n-1}, \quad \xi_n, \zeta_n \in \text{int}[x_n, x^*] \quad (7.38)$$

dove $e_h = x_h - x^$ è l'errore locale di troncamento.*

Si osservi come da (7.38) non segue immediatamente l'ordine di convergenza del metodo; si può comunque dimostrare che il Metodo delle Secanti ha ordine di convergenza uguale a:

$$(1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.62$$

e quindi il metodo converge più lentamente del Metodo di Newton (che ha ordine di convergenza 2). Si deve tenere conto per un equo raffronto fra i due metodi, del costo computazionale del Metodo di Newton maggiore rispetto a quello delle Secanti; in

particolare, se si assume che la complessità computazionale per il calcolo di f' è circa uguale a quella per il calcolo di f (assunzione ragionevole in molti casi), un'iterazione nel primo metodo ha un costo circa doppio di una iterazione che del secondo; poiché per il Metodo delle Secanti

$$|e_{n+2}| \simeq |e_{n+1}|^{1.62} \simeq |e_n|^{1.62^2} \simeq |e_n|^{2.62},$$

quest'ultimo, a parità di valutazioni complessive di funzione, può risultare più veloce del Metodo di Newton.

7.6 I metodi ibridi. Il Metodo di Dekker-Brent

I metodi ibridi si propongono di coniugare la robustezza (capacità di fornire sempre una soluzione) dei metodi globalmente convergenti con l'efficienza (veloce convergenza) dei metodi locali. Un esempio di tali metodi è il Metodo di Dekker Brent che rappresenta una combinazione dei metodi di Bisezione e Secanti.

Nel Metodo di Dekker-Brent, a partire da un intervallo di ricerca $[a, b]$:

- al fine di garantire una "sufficiente" velocità di convergenza, la scelta della approssimazione successiva avviene mediante il Metodo delle Secanti. Se il valore così calcolato cade all'esterno dell'intervallo di ricerca, si utilizza il Metodo di Bisezione.
- al fine di garantire la convergenza si individua un intervallo contenuto nel precedente come per il Metodo di Bisezione.

Nel dettaglio, il Metodo di Dekker-Brent si può descrivere nel modo seguente:

- **inizializzazione:** $x_0 = a$, $x_1 = b$, $y_1 = a$, $y_{-1} \equiv y_0 = a + 1$.
- **$k + 1$ -mo passo ($k \geq 1$):** viene calcolato, con il Metodo delle Secanti, il valore:

$$x_s = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (7.39)$$

Se x_s appartiene all'intervallo che ha per estremi x_k e y_k , e $y_k \neq y_{k-2}$, allora

$$x_{k+1} \equiv x_s,$$

altrimenti x_{k+1} è calcolato con il Metodo di Bisezione, cioè

$$x_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2}.$$

Il valore di y_{k+1} , l'altro estremo dell'intervallo di ricerca, viene calcolato come:

$$y_{k+1} = \begin{cases} x_k & \text{se } f(x_k)f(x_{k+1}) < 0 \\ y_k & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.40)$$

Osserviamo che se $y_k = y_{k-2}$ vuol dire che, per almeno 2 iterazioni, l'estremo dell'intervallo di ricerca di estremi x_k e y_k è rimasto fisso, ovvero la soluzione potrebbe trovarsi, in prossimità di questo estremo. In tal caso si utilizza la Bisezione. Infine, la (7.40) assicura che la funzione assume segno discorde nei punti x_{k+1} e y_{k+1} , pertanto l'intervallo che ha tali estremi (che quindi contiene una soluzione) ha ampiezza minore di quella dell'intervallo precedente.

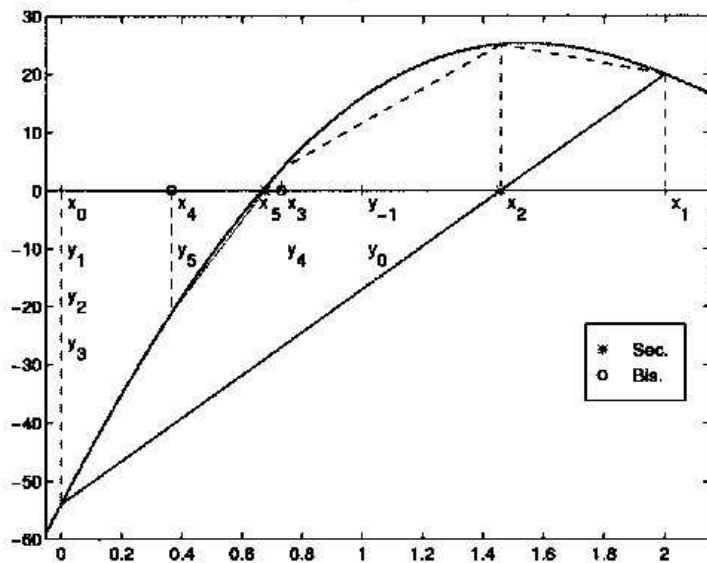


Figura 7.24: Metodo di Dekker-Brent applicato all'equazione $f(x) = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ con $x_0 = 0$ e $x_1 = 2$ (prime 4 iterazioni)

♣ **Esempio 7.26.** Applichiamo il Metodo di Dekker-Brent alla risoluzione del problema:

$$3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54 = 0$$

In Figura 7.24 è illustrata l'applicazione del Metodo di Dekker-Brent alla risoluzione dell'equazione in $[0, 2]$. In Tabella 7.19 sono riportati i risultati ottenuti. Confrontando tali risultati con quelli riportati in Tabella 7.11, ottenuti applicando il Metodo di Bisezione, risulta evidente la superiorità del metodo ibrido.



Il Metodo di Dekker-Brent eredita la proprietà di metodo globalmente convergente dal Metodo di Bisezione; inoltre, per k sufficientemente grande, x_k viene calcolato secondo il Metodo delle Secanti (7.39) da cui, quindi, eredita l'ordine di convergenza.

Di seguito riportiamo l'algoritmo di Dekker-Brent, scritto in Pascal-like. Successivamente verranno descritte le condizioni di arresto.

x_k	$f(x_k)$
1.4595e+00	2.5172e+01
7.2973e-01	3.6369e+00
3.6486e-01	-2.1155e+01
6.7621e-01	5.6810e-01
6.6806e-01	8.3598e-02
6.6666e-01	-4.6986e-04
6.6667e-01	3.8397e-07

Tabella 7.19: Metodo di Dekker-Brent applicato all'equazione $y = 3x^4 - 11x^3 - 21x^2 + 99x - 54$ con $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ (prime 7 iterazioni)

```

procedure DB(input:  $x_0, f, itmax$ , out:  $x_{db}, f_{xdb}$ )
  /# SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /#      di una funzione mediante il Metodo di Dekker-Brent
  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  var:  $x_0$       : reale      {approssimazione iniziale dello zero}
  var:  $f$         : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var:  $itmax$     : reale      {numero massimo di iterazioni}
  var:  $x_{db}$      : reale      {approssimazione dello zero}
  var:  $f_{xdb}$     : reale      {valore di  $f$  in  $x_{db}$ }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
   $y_1 := x_0$ 
   $y_0 := y_1 + 1$ 
   $y_{-1} := y_0$ 
   $f_0 := f(x_0)$ 
   $f_1 := f(x_1)$ 
   $k := 1$ 

```

Procedura 7.4: Metodo di Dekker-Brent - continua

```

while (condizioni di arresto non verificate)
  if  $y_1 \neq y_{-1}$  then
     $d := f_1(x_1 - x_0)/(f_1 - f_0)$ 
    if ( $d(x_1 - y_1) < 0$  or  $|d| > |x_1 - y_1|$ ) then
       $d := (x_1 - y_1)/2$ 
    endif
  else
     $d := (x_1 - y_1)/2$ 
  endif
   $x_0 := x_1; f_0 := f_1; x_1 := x_1 - d$ 
   $f_1 := f(x_1); y_{-1} := y_0; y_0 := y_1$ 
  if  $f_0 f_1 < 0$  then
     $y_1 := x_0$ 
  endif
   $k := k + 1$ 
endwhile
 $x_{db} := y_1;$ 
 $f_{xdb} := f_1;$ 
end DB

```

Procedura 7.4: Metodo di Dekker-Brent - fine

7.7 Metodi *one point*. Il Metodo del punto fisso

Nel Metodo di Newton l'approssimazione x_{n+1} viene calcolata a partire da x_n come

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{7.41}$$

ovvero, indicata con $\Phi(x)$ la funzione di iterazione:

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{7.42}$$

x_{n+1} è calcolata mediante l'iterazione funzionale:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \tag{7.43}$$

Metodi del tipo (7.43) sono detti metodi **one-point** perché ciascuna iterazione viene calcolata in funzione solo dell'iterazione precedente.

In generale è possibile, per risolvere un'equazione non lineare $f(x) = 0$, costruire metodi iterativi, detti metodi *one-point*, a partire da considerazioni di tipo geometrico (come per il Metodo di Newton) o analitico. Ad esempio, l'osservazione che in generale l'equazione $f(x) = 0$ può essere equivalentemente scritta come:

$$x = f(x) + x, \quad (7.44)$$

suggerisce il metodo iterativo

$$x_{n+1} = f(x_n) + x_n, \quad (7.45)$$

che è proprio un metodo iterativo *one-point* in cui la funzione di iterazione è data dall'espressione a secondo membro della (7.44).

Più in generale, se $x = g(x)$ è una equazione equivalente ad $f(x) = 0$, un metodo iterativo del tipo (7.43) in cui la funzione g sia presa come funzione di iterazione, viene detto **del punto fisso**.

Data una funzione di iterazione Φ ed un punto iniziale x_0 , è sempre possibile considerare la successione x_n generata mediante (7.43); si osservi che, se Φ è continua e $x_n \rightarrow x^*$, allora

$$x^* = \lim x_n = \lim \Phi(x_{n-1}) = \Phi(x^*),$$

cioè x^* è punto fisso per la funzione Φ . Graficamente un punto fisso è una intersezione del grafico della curva di equazione $y = \Phi(x)$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano.

Si osservi che un punto fisso della funzione Φ definita secondo (7.42) è anche uno zero della funzione f .

7.7.1 Convergenza

Il teorema seguente può essere utilizzato per stabilire condizioni sufficienti alla convergenza del Metodo del punto fisso.

Teorema 7.8. [Teorema delle contrazioni]

Sia Φ una funzione continua e derivabile in $[a, b]$ a valori in $[a, b]$. Se esiste un numero $K < 1$ tale che $|\Phi'(x)| \leq K$ in $[a, b]$, allora

- *la funzione Φ ammette un unico punto fisso x^* in $[a, b]$;*
- *comunque si scelga x_0 in $[a, b]$, la successione generata mediante (7.43) converge a x^* .*

Una stessa equazione può ovviamente essere espressa nella forma $x = g(x)$ in infiniti modi, dando luogo a diverse funzioni di iterazione per il punto fisso che portano o meno alla convergenza della successione generata mediante (7.43).

♣ **Esempio 7.27.** Si supponga di risolvere l'equazione:

$$x^3 - 3 = 0$$

che ovviamente ammette l'unica soluzione:

$$\bar{x} = \sqrt[3]{3}.$$

Il Metodo del punto fisso può essere utilizzato con

$$g(x) = 3/x^2,$$

essendo l'equazione di partenza equivalente a:

$$x = 3/x^2$$

Si ottiene, quindi, la formula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{3}{x_n^2}$$

che, scegliendo come punto iniziale $x_1 = 1$, genera una successione che non converge a \bar{x} (addirittura non regolare). Si noti che essendo $g'(\bar{x}) = |-2| > 1$, non esiste alcun intervallo contenente la radice in cui valgono le ipotesi del teorema precedente. ♣

♣ **Esempio 7.28.** Si supponga di voler risolvere l'equazione dell'esempio precedente

$$x^3 - 3 = 0$$

Tale equazione ammette anche una formulazione equivalente:

$$x = \sqrt{3/x}$$

a partire dalla quale è possibile definire la formula iterativa

$$x_{n+1} = \sqrt{3/x_n}$$

Si osservi che per tale formulazione si verifica $g'(\bar{x}) = |-1/2| < 1$. Quindi è possibile trovare intervalli, di ampiezza sufficientemente piccola contenenti la radice \bar{x} , tali che le ipotesi del teorema precedente sono verificate. ♣

♣ **Esempio 7.29.** Volendo risolvere l'equazione di Keplero (7.3), si osservi che questa è equivalente all'equazione:

$$x = E \sin x + M$$

e quindi:

$$x_{n+1} = E \sin x_n + M \tag{7.46}$$

Essendo $|g'(x)| = |E \cos x| \leq E$ e per ipotesi $E < 1$, si ha, in virtù del teorema precedente, che la successione generata mediante la (7.46) converge alla soluzione dell'equazione di Keplero, qualunque sia la scelta del punto iniziale. ♣

Per quanto riguarda il raggio e la velocità di convergenza, supposta la validità delle ipotesi del Teorema 7.8, si osserva che per l'errore di troncamento, dal Teorema del valor medio, risulta:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_{n+1}) - g(\bar{x}) = g'(\xi_n)(x_{n+1} - \bar{x})$$

con $\xi_n \in \text{int}(x_{n+1} - \bar{x})$ e, quindi,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(\xi_n)$$

Se g' è continua in \bar{x} e $|g'(\bar{x})| < 1$, il Metodo del punto fisso ha convergenza lineare con raggio di convergenza $|g'(\bar{x})|$.

Nell'esempio 7.28, se si sceglie $g(x) = \sqrt{3/x}$ si ottiene che il raggio di convergenza è $1/2$.

7.8 Criteri di arresto per i metodi iterativi

I metodi numerici per la risoluzione di una equazione non lineare $f(x) = 0$ generano una successione $\{x_n\}$ di approssimazioni di una soluzione x^* . Un aspetto fondamentale legato all'utilizzo efficace di tali metodi è la scelta di un criterio opportuno in base al quale decidere quando arrestare il processo iterativo. A tal proposito possiamo affermare che un metodo iterativo è caratterizzato da due aspetti:

- 1) un criterio per la scelta delle approssimazioni numeriche delle soluzioni, o degli intervalli che la contengono;
- 2) un criterio di arresto che consenta di decidere quando arrestare il processo iterativo.

In generale, un criterio di arresto è ritenuto soddisfacente se il suo utilizzo conduce ad un risultato sufficientemente accurato, o meglio, consente di ottenere una accuratezza prefissata. In particolare, in questo contesto, le condizioni da utilizzare per stabilire quando terminare il processo iterativo, devono in generale:

1. verificare se il valore $f(x)$ è "sufficientemente" vicino a zero. A tal fine, si può utilizzare una condizione del tipo:

$$|f(x_k)| < \epsilon_f \tag{7.47}$$

con ϵ_f valore reale positivo prefissato. Quindi, si richiede di arrestare il procedimento quando il valore (assoluto) che la funzione assume nel valore x_k è minore di una quantità, detta **tolleranza**, la quale rappresenta l'accuratezza richiesta sulla soluzione dell'equazione.

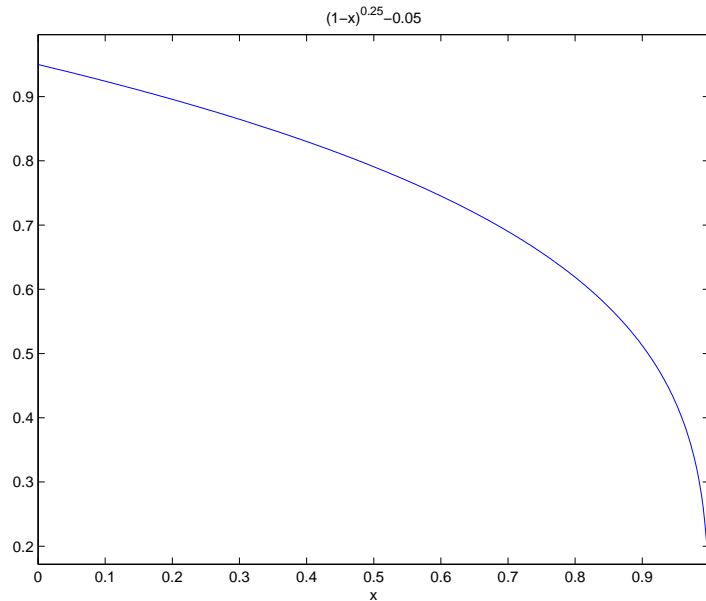


Figura 7.25: Grafico di $f(x) = \sqrt[4]{(1-x)} - 0.05$ in $[0, 1]$

♣ **Esempio 7.30.** Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = \sqrt[4]{(1-x)} - 0.05 = 0$$

Essa ha uno zero in $x^* = 0.99999375$ Applicando il Metodo di Bisezione dopo 7 iterazioni si ha:

$$x_7 = 0.9922, \quad f(x_7) = 0.2473$$

ovvero l'errore relativo su x^* :

$$E_r = \frac{|x_7 - x^*|}{|x^*|} = \frac{0.9999 - 0.9922}{|0.9999|} = 0.0076$$

Dunque l'errore che si commette sull'approssimazione della radice è di 0.7% mentre:

$$E_a = |0 - f(x_7)| = 0.2473$$

ovvero l'errore che si commette sull'approssimazione di $f(x^*) = 0$ è di circa il 24%. ♣

2. verificare se x_k è "sufficientemente" vicino allo zero x^* .

♣ **Esempio 7.31.** Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = x^8 - 0.01 = 0$$

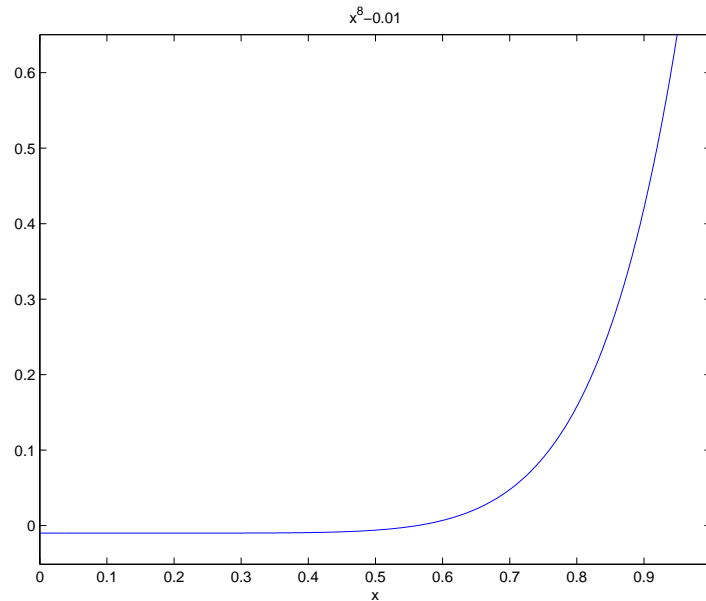


Figura 7.26: Grafico di $f(x) = x^8 - 0.01$ in $[0, 1]$

Essa ha uno zero in $x^* = 0.562341\dots$. Arrestando il Metodo di Bisezione al passo k , per cui:

$$|f(x_k)| < 0.01$$

dopo un'iterazione abbiamo:

$$x_1 = 0.5$$

e

$$E_a = |0 - f(x_1)| = 0.0061 < 0.01;$$

considerando l'errore relativo su x^* si ottiene:

$$E_r = \frac{|x_1 - x^*|}{|x^*|} = \frac{0.562341 - 0.5}{|0.562341|} = 0.119$$

Dunque l'errore che si commette sull'approssimazione della radice è dello 11%. ♣

In generale, una condizione per l'arresto del metodo iterativo è richiedere che l'errore assoluto, $|x_k - x^*|$, sia minore di una quantità ϵ_x :

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \epsilon_x. \quad (7.48)$$

Tuttavia, l'utilizzo della (7.48) come criterio di arresto presuppone la conoscenza della soluzione dell'equazione, che non è nota a priori.

Nel caso del Metodo di Bisezione, si è già osservato che una stima dell'errore è fornita dalla semiampiezza dell'intervallo corrente. Quindi, un criterio di arresto "effettivamente utilizzabile", perché basato su quantità calcolabili dall'algoritmo, è il seguente:

$$(b_k - a_k)/2 \leq \epsilon_x. \tag{7.49}$$

Se, in particolare, si desidera stimare l'errore relativo di troncamento analitico, e quindi controllare l'accuratezza della approssimazione in termini di cifre significative, basta osservare che dalla (7.14) segue che:

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{b_k - a_k}{2|a_k|},$$

ottenendo così il criterio di arresto basato sulla distanza relativa tra gli estremi dell'intervallo corrente:

$$\frac{b_k - a_k}{2|a_k|} \leq \epsilon_x. \tag{7.50}$$

♣ **Esempio 7.32.** Riprendiamo l'equazione della Figura 7.26:

$$f(x) = x^8 - 0.01 = 0$$

La funzione ha uno zero in $x^* = 0.562341\dots$. Assegniamo, come condizione di arresto, il verificarsi di una delle eventualità descritte nei punti 1. e 2., ovvero che al generico passo k :

1. $|f(x_k)| < \epsilon_f = 10^{-3}$;
2. $\frac{b_k - a_k}{2|a_k|} \leq \epsilon_x = 10^{-4}$.

Dai valori della Tabella 7.20, si osserva che dopo 10 iterazioni del Metodo di Bisezione,

1. $|f(x_{10})| = |f(0.560546)| \approx 2.52 \times 10^{-4} < \epsilon_f = 10^{-3}$;
2. $\frac{b_{10} - a_{10}}{2|a_{10}|} = \frac{0.5625 - 0.56054}{2(0.56054)} \approx 10^{-3} > \epsilon_x = 10^{-4}$.

per cui il Metodo di Bisezione si arresta, in questo caso, per il verificarsi della condizione 1. ♣

♣ **Esempio 7.33.** Riprendiamo l'equazione della Figura 7.25:

$$f(x) = \sqrt[4]{1-x} - 0.05 = 0$$

La funzione ha uno zero in $x^* = 0.9999\dots$. Assegniamo, come condizione di arresto, il verificarsi di una delle eventualità descritte nei punti 1. e 2., ovvero che al generico passo k :

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	0.5	-0.60937
2	0.5	1	0.75	0.9×10^{-1}
3	0.5	0.75	0.625	0.0132
4	0.5	0.625	0.5625	0.259×10^{-4}
5	0.5	0.5625	0.5312	-0.366×10^{-2}
...
8	0.5546	0.5625	0.5546	-0.52×10^{-3}
9	0.5585	0.5625	0.5585	-0.25×10^{-3}
10	0.56054	0.5625	0.560546	-0.11×10^{-3}

Tabella 7.20: 10 iterazioni del Metodo di Bisezione applicato alla funzione in Fig. 7.26

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	0.5	7.9×10^{-1}
2	0.5	1	0.75	6.5×10^{-1}
3	0.75	1	0.875	5.4×10^{-1}
4	0.875	1	0.937	4.5×10^{-1}
5	0.937	1	0.968	3.7×10^{-1}
...
8	0.998	1	0.992	2.0×10^{-1}
9	0.992	1	0.996	1.6×10^{-1}
10	0.9902	1	0.9902	1.26×10^{-1}

Tabella 7.21: 10 iterazioni del Metodo di Bisezione applicato alla funzione in Fig. 7.25

1. $|f(x_k)| < \epsilon_f = 10^{-3}$;
2. $\frac{b_k - a_k}{2|a_k|} \leq \epsilon_x = 10^{-3}$.

Dai valori della Tabella 7.21, si osserva che dopo 10 iterazioni del Metodo di Bisezione,

1. $|f(x_{10})| = |f(0.9902)| \approx 1.26 \times 10^{-1} > \epsilon_f = 10^{-3}$;
2. $\frac{b_{10} - a_{10}}{2|a_{10}|} = \frac{1 - 0.9902}{2(0.9902)} \approx 4.88 \times 10^{-4} < \epsilon_x = 10^{-3}$.

per cui il Metodo di Bisezione si arresta, in questo caso, per il verificarsi della condizione 2. ♣

Per il Metodo di Newton invece è possibile stimare la quantità $|x_n - x^*|$ a partire da considerazioni di tipo analitico. Si osservi, infatti, che

$$x^* - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} \quad \xi_n \in [x_n, x^*].$$

n	$f(x_n)$	$ x_n - x^* $	$ x_n - x_{n+1} $
1	.250D+00	.499D+00	.500D+00
2	.625D-01	.249D+00	.250D+00
3	.156D-01	.124D+00	.125D+00
4	.391D-02	.615D-01	.625D-01
5	.976D-03	.303D-01	.312D-01
6	.244D-03	.146D-01	.156D-01
7	.607D-04	.686D-02	.779D-02
8	.149D-04	.299D-02	.386D-02
9	.350D-05	.112D-02	.187D-02
10	.680D-06	.296D-03	.825D-03

Tabella 7.22: Metodo di Newton applicato alla risoluzione dell'equazione $x^2 - 10^{-6} = 0$ con $x_0 = 1$. ($x^* = 0.001$)

Se assumiamo $f'(x_n) \simeq f'(\xi_n)$ (assunzione ragionevole se la successione è convergente e x_n sia in un intorno sufficientemente piccolo della soluzione) allora si ha:

$$x^* - x_n \simeq -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n \tag{7.51}$$

Una stima dell'errore relativo è invece data da

$$\frac{x^* - x_n}{x_{n+1}} \simeq \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

♣ **Esempio 7.34.** Applichiamo la stima calcolabile dell'errore (7.51) per il Metodo di Newton applicato alla risoluzione dell'equazione:

$$x^2 - 10^{-6} = 0$$

la Tabella 7.22 riporta il confronto tra l'errore (noto in quanto tale è la soluzione) e stima dell'errore stesso. ♣

Infine, le condizioni da utilizzare per stabilire quando terminare il processo iterativo, devono

3. considerare un controllo sul numero di iterazioni eseguite; ciò può essere fatto ponendo un limite massimo di iterazioni sul numero da eseguire:

$$k > ITMAX \tag{7.52}$$

La convergenza di un metodo iterativo ad una soluzione di $f(x) = 0$ deve essere controllata utilizzando in modo combinato la condizione al punto 1) ed una di quelle al punto 2).

È importante una corretta interpretazione e gestione delle condizioni di arresto. Ad esempio il verificarsi della condizione (7.52) può essere sintomo sia di non convergenza sia di convergenza lenta; discernere fra i due casi è di importanza fondamentale, ma non facile.

Si osserva infine che le condizioni di arresto ai punti 1. e 2. potrebbero essere, in generale, non soddisfacenti, per ogni metodo iterativo. Una condizione di arresto valida deve infatti consentire di gestire eventualità differenti:

- (α) *Raggiungimento della soluzione* Nella iterata corrente, x_n , il valore della funzione è piccolo. Ciò, ad esempio, può essere verificato con una condizione del tipo

$$|f(x_n)| < \epsilon_f \quad (7.53)$$

con tolleranza prefissata, ϵ_f , sul valore della funzione. Si noti che una condizione *assoluta* del tipo (7.53) potrebbe essere fuorviante essendo dipendente dall'ordine di grandezza della funzione.

Una condizione *relativa*, più soddisfacente della (7.53), in quanto indipendente dall'ordine di grandezza della funzione di cui si vogliono determinare le radici è la seguente:

$$|f(x_n)| < \epsilon_f \|f\| \quad (7.54)$$

dove $\|\cdot\|$ è una qualsiasi norma; si osservi che una condizione di questo tipo, in generale più valida della (7.53), è

$$|f(x_n)| < \epsilon_f |f(x_0)| \quad (7.55)$$

Il vantaggio di (7.55) rispetto a (7.54) è quello di non richiedere il calcolo di alcuna norma; tuttavia, (7.55) può essere non praticabile in alcuni casi (ad es. quando x_0 è già una buona stima della soluzione).

- (β) *La successione x_n si è numericamente arrestata* ovvero si verifica una condizione del tipo:

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_x \quad (7.56)$$

con ϵ_x tolleranza prefissata. Il criterio (7.56), essendo assoluto (indipendente cioè dall'ordine di grandezza delle quantità in gioco), è in genere sconsigliabile. Più affidabile è, ad esempio, il seguente:

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon |x_{n-1}| \quad (7.57)$$

È possibile considerare un criterio ulteriore per stabilire la convergenza della successione $\{x_n\}$, dipendente dal sistema aritmetico floating point a precisione finita utilizzato. Infatti si potrebbe verificare che:

$$x_{n-1} \oplus (x_n \ominus x_{n-1}) \equiv x_{n-1} \tag{7.58}$$

che esprime il fatto che la quantità $(x_n - x_{n-1})$ nel sistema aritmetico non dá contributo alla somma con x_{n-1} . La (7.58), però, è una condizione troppo forte e quindi non utilizzabile in pratica.

Siamo ora in grado di modificare gli algoritmi dei metodi di Bisezione, Newton e Dekker-Brent. Di seguito, riportiamo l'algoritmo di Bisezione con il criterio di arresto descritto e l'algoritmo di Newton. Per quest'ultimo si osservi come non si sia tenuto conto di problemi legati alla precisione della macchina; si è comunque prevista l'eventualità che si verifichi $f'(x_n) \simeq 0$. Inoltre, contrariamente a quanto avviene con il Metodo di Bisezione, il controllo sul massimo numero di iterazioni eseguite è qui utilizzato anche per verificare la convergenza o meno del metodo.

```

procedure fxbis(input:  $a, b, f, \epsilon_f, MAXIT$ , out:  $c, fc$ )
  /* SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /* di una funzione mediante il Metodo di Bisezione
  /* SPECIFICHE PARAMETRI:
  var: a      : reale      {primo estremo dell'intervallo di ricerca}
  var: b      : reale      {secondo estremo dell'intervallo di ricerca}
  var: f      : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var:  $\epsilon_f$  : reale      {accuratezza richiesta}
  var: MAXIT  : reale      {numero massimo di iterazioni}
  var: c      : reale      {approssimazione dello zero}
  var: fc     : reale      {valore di f in c}

  /* INIZIO ISTRUZIONI:
    fa := f(a);
    fb := f(b);
    repeat
  /* calcolo del punto medio e del valore della funzione
      c := (a + b)/2;
      fc := f(c);
      if (fc * fa ≤ 0) then {test sul segno di f}
        b := c;
        fb := fc;
      else
        a := c;
        fa := fc;
      endif

```

Procedura 7.5: Algoritmo di Bisezione (seconda versione) - continua


```
     $k := k + 1;$   
until(( $(b - a)/2 \leq \epsilon_{mac} a$ ) or ( $fc < \epsilon_f$ )) or  $k > MAXIT$ ) {criterio di arresto}  
end fxbis
```

Procedura 7.5: Algoritmo di Bisezione (seconda versione) - fine

```

procedure newton(input:  $x_0, f, f', ftol, xtol, itmax$ , out:  $x_{new}, fx_{new}$ )
  /# SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /# di una funzione mediante il Metodo di Newton
  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  var:  $x_0$       : reale           {approssimazione iniziale dello zero}
  var:  $f$         : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var:  $f'$        : funzione esterna {derivata di f}
  var:  $ftol$      : funzione esterna {accuratezza valutazione}
  var:  $xtol$      : reale           {accuratezza soluzione}
  var:  $itmax$     : reale           {numero massimo di iterazioni}
  var:  $x_{new}$     : reale           {approssimazione dello zero}
  var:  $fx_{new}$    : reale           {valore di f in  $x_{new}$ }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
   $k := 0$ 
   $oldx := x_0$ 
  /# generazione della successione delle approssimazioni
  repeat
    if  $f'(oldx) = 0$  then
       $rapx := 0$ 
    else
       $rapx := f(oldx)/f'(oldx)$ 
    endif

```

Procedura 7.6: Algoritmo per il calcolo degli zeri di una funzione con il Metodo di Newton
- continua

```
xnew := oldx - rapx  
err := |rapx|  
relerr := err/|xnew|  
oldx := xnew  
k := k + 1  
until ( (|fxnew| ≥ ftol) and (relerr ≥ xtol) and (k < itmax) )  
end newton
```

Procedura 7.6: Algoritmo per il calcolo degli zeri di una funzione con il Metodo di Newton
- fine

```

procedure DB(input:  $x_0, f, itmax$ , out:  $x_{db}, f_{xdb}$ )
  /# SCOPO: calcolo di un'approssimazione dello zero
  /#      di una funzione mediante il Metodo di Dekker-Brent
  /# SPECIFICHE PARAMETRI:
  var:  $x_0$       : reale           {approssimazione iniziale dello zero}
  var:  $f$         : funzione esterna {funzione di cui si cerca lo zero}
  var:  $itmax$     : reale           {numero massimo di iterazioni}
  var:  $x_{db}$      : reale           {approssimazione dello zero}
  var:  $f_{xdb}$    : reale           {valore di f in  $x_{db}$ }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:
   $y_1 := x_0$ 
   $y_0 := y_1 + 1$ 
   $y_{-1} := y_0$ 
   $f_0 := f(x_0)$ 
   $f_1 := f(x_1)$ 
   $k := 1$ 
  while ( $|x_1 - y_1| > \epsilon_x |x_1|$  and  $|f_1| > \epsilon_f$  and  $k < itmax$ )
    if  $y_1 \neq y_{-1}$  then
       $d := f_1(x_1 - x_0) / (f_1 - f_0)$ 
      if ( $d(x_1 - y_1) < 0$  or  $|d| > |x_1 - y_1|$ ) then
         $d := (x_1 - y_1) / 2$ 
      endif
    else
       $d := (x_1 - y_1) / 2$ 
    endif

```

Procedura 7.7: Metodo di Dekker-Brent - continua

```
 $x_0 := x_1; f_0 := f_1; x_1 := x_1 - d$   
 $f_1 := f(x_1); y_{-1} := y_0; y_0 := y_1$   
if  $f_0 f_1 < 0$  then  
     $y_1 := x_0$   
endif  
     $k := k + 1$   
endwhile  
 $x_{db} := y_1;$   
 $f_{xdb} := f_1;$   
end DB
```

Procedura 7.7: Metodo di Dekker-Brent - fine

A. Murli