Calcolo Scientifico: III lezione

Risoluzione di sistemi lineari con *matrici a blocchi*

Luisa D'Amore

a.a. 2005-2006

Esempio 1

A matrice 6x6 *simmetrica*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 110 & 76 & 78 & 90 & 52 & -16 \\ 76 & 146 & 124 & 72 & 90 & 52 \\ 78 & 124 & 210 & 116 & 72 & 90 \\ \hline 90 & 72 & 116 & 210 & 124 & 78 \\ 52 & 90 & 72 & 124 & 146 & 76 \\ -16 & 52 & 90 & 78 & 76 & 110 \end{array}\right)$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A matrice a blocchi

Esempio 2

A matrice quadrata 6x6

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

A matrice diagonale a blocchi

Esempio 2

A matrice a banda di ampiezza *7*

p=3

q=3

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 2x2 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

A matrice Tridiagonale a blocchi

Esempio 3

A matrice a banda di ampiezza *7*

p=3, q=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 8 & -1 \\ \hline -1 & 8 & 6 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A matrice Tridiagonale **a blocchi**

se raggruppiamo i coefficienti di *A* in blocchi e riguardiamo ciascun blocco come un coefficiente

Decomposizione di una matrice in blocchi

Perché **partizionare** una matrice **in blocchi** ?

Sviluppo di algoritmi *ad hoc*

Esempio 1 (cont)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 110 & 76 & 78 & 90 & 52 & -16 \\ 76 & 146 & 124 & 72 & 90 & 52 \\ 78 & 124 & 210 & 116 & 72 & 90 \\ \hline 90 & 72 & 116 & 210 & 124 & 78 \\ 52 & 90 & 72 & 124 & 146 & 76 \\ -16 & 52 & 90 & 78 & 76 & 110 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11} e A_{22} simmetriche ottenute l'una da una rotazione dell'altra

A_{12} e A_{22} Toeplitz ottenute l'una da una rotazione dell'altra

Esempio 2 (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Partizionando in blocchi} \quad A = \begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_1 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_2 & D_3 \end{pmatrix}$$

A **non** è diagonale
MA
alcuni suoi blocchi lo sono
(D_1, D_2, D_3, E_2, F_2).

A **non** è simmetrica
MA
alcuni suoi blocchi lo sono
(F_1, E_1).

Esempio 3 (cont)

p=3

q=3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 8 & -1 \\ -1 & 8 & 6 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Partizionando in blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = A_{22}$ simmetrica

$A_{21} = A_{12}^{T}$ triangolare

Case study: la fattorizzazione LU di una matrice partizionata a blocchi

Ricordiamo che…

A matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

$w = p + q + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

La fattorizzazione LU conduce alle matrici bidiagonali

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix}$$

$w = p + 1 = 1 + 1 = 2$

$w = q + 1 = 1 + 1 = 2$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

come si trasformano le matrici L e U nel caso di A tridiagonale a blocchi ?

A. MURLI

in analogia al caso scalare

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

A è una matrice **tridiagonale a blocchi**

A. MURLI

Applicando ad A la fattorizzazione LU, si verifica che:

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

L matrice **bidiagonale a blocchi**

U matrice **bidiagonale a blocchi**

... in analogia al caso scalare

Fattorizzando $A=LU$

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

A $\qquad L \qquad U$

A. MURLI

Gli elementi di U e di A appartenenti alla banda superiore coincidono.

Gli elementi di L da determinare sono: L_2 , L_3

Gli elementi di U da determinare sono le matrici diagonali: U_1 , U_2, U_3

Dall'uguaglianza A = LU

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

A $\qquad L \qquad U$

otteniamo

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= U_1 \\ E_2 &= L_2 U_1 \\ D_2 &= L_2 F_1 + U_2 \\ E_3 &= L_3 U_2 \\ D_3 &= L_3 F_2 + U_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} U_1 &:= D_1 \\ L_2 &:= E_2\, U_1^{-1} \\ U_2 &:= D_2 - L_2 F_1 \\ L_3 &:= E_3\, U_2^{-1} \\ U_3 &:= D_3 - L_3 F_2 \end{aligned}$$

A. MURLI

IN GENERALE: Fattorizzazione LU di matrici Tridiagonali a blocchi

$$p=1,\quad q=1$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & \cdots & & 0 \\ E_2 & D_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & D_{n-1} & F_{n-1} \\ & & \cdots & E_n & D_n \end{pmatrix}$$

matrice
tridiagonale **a blocchi**

$w = p + q + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

La fattorizzazione LU produce

$$q=1 \quad \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & & 0 \\ L_2 & I & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & I & 0 \\ & & \cdots & L_n & I \end{pmatrix} \qquad p=1 \quad \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & U_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & U_{n-1} & F_{n-1} \\ & & \cdots & 0 & U_n \end{pmatrix}$$

Matrice bidiagonale
inferiore **a blocchi**

$w = q + 1 = 1 + 1 = 2$

matrice bidiagonale
superiore **a blocchi**

$w = p + 1 = 1 + 1 = 2$

Eseguendo il prodotto $L\ U$ e ricavando L_i e U_i si ottiene:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & \cdots & & 0 \\ E_2 & D_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & D_{n-1} & F_{n-1} \\ & & \cdots & E_n & D_n \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & & 0 \\ \boxed{L_2} & I & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & I & 0 \\ & & \cdots & \boxed{L_n} & I \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{U_1} & F_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \boxed{U_2} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \boxed{U_{n-1}} & F_{n-1} \\ & & \cdots & 0 & \boxed{U_n} \end{pmatrix}}_{U}$$

$U_1 := D_1$
$L_2 := E_2 U_1^{-1}$
$U_2 := D_2 - L_2 F_1$
$\cdots$
$L_n := E_n U_{n-1}^{-1}$
$U_n := D_n - L_n F_{n-1}$

Come si specializzano gli algoritmi di Forward e back substitution per matrici bidiagonali a blocchi ?

La fattorizzazione LU a blocchi

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{pmatrix}$$

x_i, y_i, z_i sono vettori di lung. n

risoluzione di 2 sistemi bidiagonali a blocchi

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix}$$

Risoluzione di Lz=y

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{y}_1 = \underline{z}_1$;

$\underline{y}_2 = L_2\underline{z}_1 + \underline{z}_2$;

$\underline{y}_3 = L_3\underline{z}_2 + \underline{z}_3$;

$\underline{z}_1 := \underline{y}_1$;

$\underline{z}_2 := \underline{y}_2 - L_2\underline{z}_1$;

$\underline{z}_3 := \underline{y}_3 - L_3\underline{z}_2$;

Risoluzione di Ux=z

$$\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{z}_3 = U_3\underline{x}_3$;

$\underline{z}_2 = F_2\underline{x}_3 + U_2\underline{x}_2$;

$\underline{z}_1 = F_1\underline{x}_2 + U_1\underline{x}_1$;

$\underline{x}_3 := (U_3)^{-1}\,\underline{z}_3$;

$\underline{x}_2 := (U_2)^{-1}\,(\underline{z}_2 - F_2\,\underline{x}_3)$;

$\underline{x}_1 := (U_1)^{-1}\,(\underline{z}_1 - F_1\,\underline{x}_2)$;

In generale

Risoluzione di un sistema con matrice tridiagonale a blocchi…

Risoluzione del sistema $L\,y = b$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_n & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

$y_1 = b_1$;

$y_2 = b_2 - L_2 y_1$;

…

$y_n = b_n - L_n y_{n-1}$;

Risoluzione del sistema $U\,x = y$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_n \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}$$

$x_n = (U_n)^{-1} y_n$;

$x_{n-1} = (U_{n-1})^{-1}(y_{n-1} - F_{n-1}\,x_n)$;

…

$x_1 = (U_1)^{-1}(y_1 - F_1\,x_2)$;

Algoritmi di forward e back substitution per matrici bidiagonali a blocchi

```
for i = 1 to n do
    y_i = b_i - L_i y_{i-1}
endfor
              (L_1 y_0 = 0)
```

forward substitution

```
for i = n to 1 do
    U_i x_i = y_i - F_i y_{i+1}
endfor
              (F_n x_{n+1} = 0)
```

back substitution

Nella scelta dell'algoritmo di risoluzione del sistema quando conviene riguardare una matrice **tridiagonale a blocchi** come **matrice a banda** ?

$$A=\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow ? \quad A=\begin{pmatrix} 3&3&4&1&0&0\\ 1&3&2&4&0&0\\ 5&6&3&1&4&1\\ 3&1&4&4&3&2\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&2&2&9&7 \end{pmatrix}$$

complessità computazionale

$$A=\begin{pmatrix} 2&0&1&2&0&0\\ 0&5&2&3&0&0\\ 1&2&7&0&5&0\\ 2&1&0&3&0&6\\ 0&0&3&0&2&0\\ 0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Algoritmo scalare
di fattorizzazione LU
per matrici a banda
+
Risoluzione dei sistemi
Lz=y e Ux=z

Algoritmo a blocchi
di fattorizzazione LU
per matrici tridiagonali
+
Risoluzione dei sistemi a blocchi
Lz=y e Ux=z

In generale

La scelta di riguardare A
come matrice **tridiagonale a blocchi**
o come **matrice a banda**
dipende principalmente dalla possibilità di poter partizionare la matrice in blocchi che godono di opportune caratteristiche:

- la sparsità
- la simmetria
- …

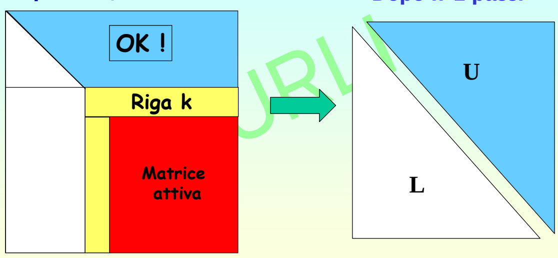
Tali caratteristiche permettono una riformulazione degli algoritmi con *notevole guadagno in termini di costo computazionale*.

$$A=\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 3&3&4&1&0&0\\ 1&3&2&4&0&0\\ 5&6&3&1&4&1\\ 3&1&4&4&3&2\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&2&2&9&7 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LU di una matrice a blocchi

Al passo k, con $k \le n-1$:

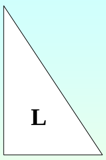
Dopo n-1 passi



Quali sono le operazioni di base?

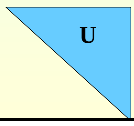
- **Calcolo dei moltiplicatori**

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}$$



- **modifica matrice attiva**

$$a_{i,j} = a_{i,j} - l_{i,k}\, a_{k,j}$$



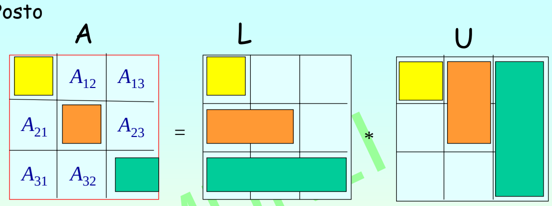
Quali sono le operazioni di base nella versione a blocchi della fattorizzazione LU?

Se A è una matrice quadrata partizionata in 9=3x3 blocchi

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

L'obiettivo è fattorizzare A nel prodotto di L e U con L e U matrici a blocchi rispettivamente triangolare inferiore e superiore a blocchi

Posto



effettuando il prodotto L x U ricaviamo le espressioni di ciascun blocco di A

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $\quad$ $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $\quad$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\quad$ $A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\quad$ $A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\quad$ $A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

...A partire da queste espressioni ricaviamo il calcolo dei blocchi di L e di U

$\boxed{A_{11} = L_{11}U_{11}}$ $\quad$ $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $\quad$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\quad$ $A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\quad$ $A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\quad$ $A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$\boxed{L_{11}\, U_{11} = A_{11}}$

cioè L_{11} e U_{11} sono ottenuti calcolando la fattorizzazione LU del blocco A_{11}

ricaviamo le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $\quad$ $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $\quad$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

$\boxed{A_{21} = L_{21}U_{11}}$ $\quad$ $A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\quad$ $A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\quad$ $A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$\boxed{L_{21}\, U_{11} = A_{21}}$

cioè L_{21} e U_{11} sono ottenuti calcolando la fattorizzazione LU del blocco A_{21}

ricaviamo le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $\quad A_{12} = L_{11}U_{12}$ $\quad A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\quad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$\boxed{A_{31} = L_{31}U_{11}}$ $\quad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\quad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$\boxed{L_{31}\, U_{11} = A_{31}}$

cioè L_{31} e U_{11} sono ottenuti calcolando la fattorizzazione LU del blocco A_{31}

OVVERO

$A_{11} = L_{11}U_{11}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$

fattorizzazione LU del "pannello verticale di colonne"

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} \\ L_{21}U_{11} \\ L_{31}U_{11} \end{pmatrix}$$

moltiplicatori

Calcolo dei blocchi $L_{11}, L_{21}, L_{31}, U_{11}$

ricaviamo le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $\quad \boxed{A_{12} = L_{11}U_{12}}$ $\quad A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\quad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\quad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\quad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$\boxed{U_{12} = L_{11}^{-1} A_{12}}$

ricaviamo le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $\quad A_{12} = L_{11}U_{12}$ $\quad \boxed{A_{13} = L_{11}U_{13}}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\quad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\quad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\quad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$\boxed{U_{13} = L_{11}^{-1} A_{13}}$

OVVERO, da $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

➢ Calcolo del pannello orizzontale di U

$U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$, $U_{13} = L_{11}^{-1}A_{13}$

Analogamente, a partire da .....

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\boxed{A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}}$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$$L_{22}\, U_{22} = A_{22} - L_{21}\, U_{12}$$

cioè L_{22} e U_{22} si ottengono calcolando la fattorizzazione LU di $A_{22} - L_{21}U_{12}$

ricaviamo le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\boxed{A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}}$ $A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$$L_{32}\, U_{22} = A_{32} - L_{31}\, U_{12}$$

cioè L_{32} e U_{22} si ottengono calcolando la fattorizzazione LU di $A_{32} - L_{31}U_{12}$

ricaviamo le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $A_{12} = L_{11}U_{12}$ $A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $\boxed{A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}}$

$$L_{33}\, U_{33} = A_{33} - L_{31}\, U_{13} - L_{32}\, U_{23}$$

cioè L_{33} e U_{33} si ottengono calcolando la fattorizzazione LU di $A_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23}$

OVVERO

$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$ $A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

➤ Aggiornamento della matrice attiva

$$\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} = A_{22} - L_{21}U_{12} & \bar{A}_{23} = A_{23} - L_{21}U_{13} \\ \bar{A}_{32} = A_{32} - L_{31}U_{12} & \bar{A}_{33} = A_{33} - L_{31}U_{13} \end{pmatrix}$$

Alla fine del passo 1 abbiamo calcolato

$$\begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{pmatrix}$$

- Il primo pannello verticale di L

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \end{pmatrix}$$

- Il primo pannello orizzontale di U

II PASSO:

OK!

$L_{11}U_{11}$ U_{12} U_{13}

$L_{21}U_{11}$

$L_{31}U_{11}$

OK!

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{22} = A_{22} - L_{21}U_{12} & \bar{A}_{23} = A_{23} - L_{21}U_{13} \\ \bar{A}_{32} = A_{32} - L_{31}U_{12} & \bar{A}_{33} = A_{33} - L_{31}U_{13} \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che

$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$

$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$

Dobbiamo calcolare i Blocchi L_{22}, U_{22}, L_{32}

OK!

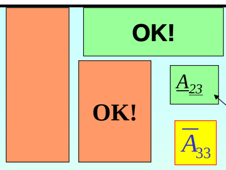
OK!

Matrice attiva

➤ fattorizzazione LU del pannello di colonne

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{22} \\ \bar{A}_{32} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{22}U_{22} \\ L_{32}U_{22} \end{pmatrix}$$

Calcolo dei blocchi L_{22}, L_{32}, U_{22}



Passo 2:

- Calcolo del blocco orizzontale di U

Poiché
deve essere $\underline{A}_{23} = L_{22}\, U_{23}$ ⟹ $U_{23} = L_{22}^{-1} \underline{A}_{23}$

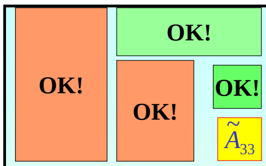
- Aggiornamento della matrice attiva

$$\left(\bar{A}_{33}\right) \rightarrow \left(\tilde{A}_{33} = \bar{A}_{33} - L_{32} U_{23}\right)$$

Alla fine del passo 2 abbiamo calcolato

$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & \boxed{L_{22}} & \\ L_{31} & L_{32} & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & \boxed{U_{22} \quad U_{23}} & \\ & & \end{pmatrix}$$

- Il secondo pannello verticale di L
- Il secondo pannello orizzontale di U

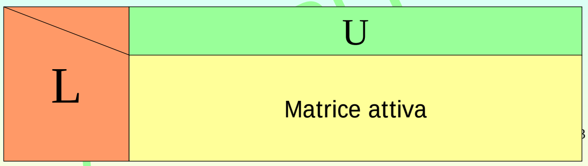


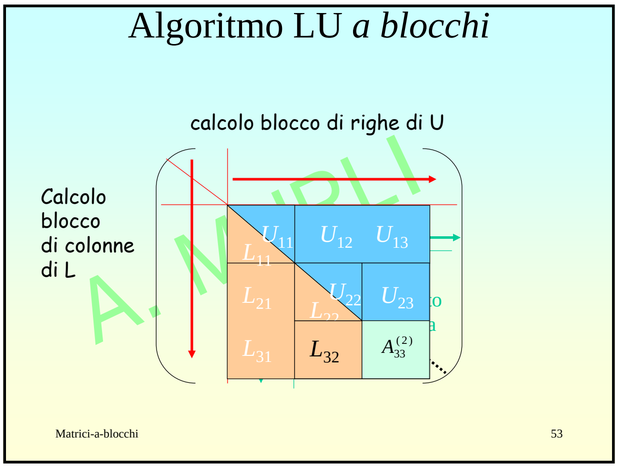
- fattorizzazione LU del blocco $\left(\tilde{A}_{33}\right) = \left(L_{33} U_{33}\right)$

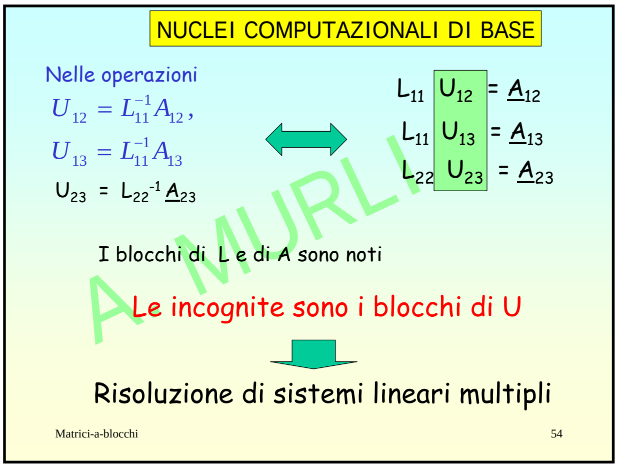
Alla fine del passo 3 abbiamo

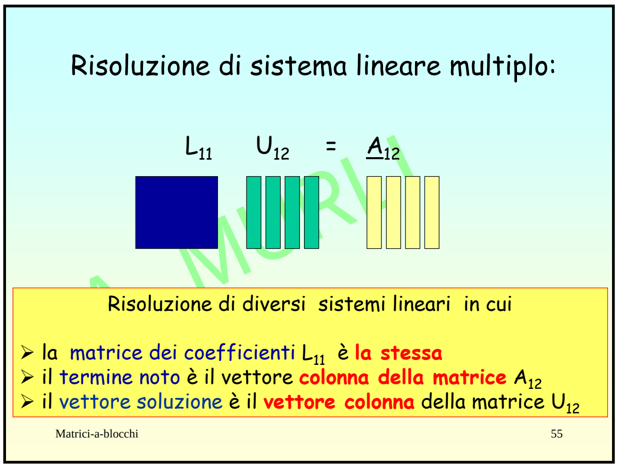
$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & U_{22} & U_{23} \\ & & U_{33} \end{pmatrix}$$

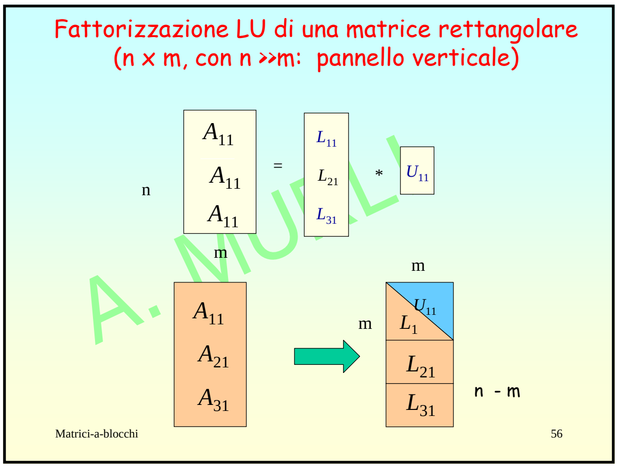
la fattorizzazione LU a blocchi procede allo stesso modo di quella scalare




Algoritmo LU a blocchi
calcolo blocco di righe di U
Calcolo blocco di colonne di L
U_{11} U_{12} U_{13}
L_{11}
L_{21} U_{22} U_{23}
L_{22}
L_{31} L_{32} $A_{33}^{(2)}$
Matrici-a-blocchi
53


NUCLEI COMPUTAZIONALI DI BASE
Nelle operazioni
$U_{12} = L_{11}^{-1} A_{12}$,
$U_{13} = L_{11}^{-1} A_{13}$
$U_{23} = L_{22}^{-1} A_{23}$
$L_{11}\ U_{12} = A_{12}$
$L_{11}\ U_{13} = A_{13}$
$L_{22}\ U_{23} = A_{23}$
I blocchi di L e di A sono noti
Le incognite sono i blocchi di U
Risoluzione di sistemi lineari multipli
Matrici-a-blocchi
54


Risoluzione di sistema lineare multiplo:
L_{11} U_{12} = A_{12}
Risoluzione di diversi sistemi lineari in cui
➢ la matrice dei coefficienti L_{11} è la stessa
➢ il termine noto è il vettore colonna della matrice A_{12}
➢ il vettore soluzione è il vettore colonna della matrice U_{12}
Matrici-a-blocchi
55


Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare
(n x m, con n >>m: pannello verticale)
A_{11} A_{11} A_{11} = L_{11} L_{21} L_{31} * U_{11}
n
m
A_{11} A_{21} A_{31}
m
U_{11} L_1 L_{21} L_{31}
m
n - m
Matrici-a-blocchi
56

Nuclei computazionali fondamentali

Ad ogni passo:

- Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare
- Risoluzione di sistemi triangolari inferiori a termine noto multiplo :

$$A\,X = B \Longrightarrow \begin{cases} A\,x_1 = b_1 \\ A\,x_2 = b_2 \\ \vdots \\ A\,x_n = b_n \end{cases} \text{ con } \begin{matrix} B = [b_1\ b_2\ \dots\ b_n] \\ X = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n] \end{matrix} \text{ e } x_i, b_i \in \Re^n$$

$$A, B, X \in \Re^{n \times n}$$

- Prodotto matrice-matrice