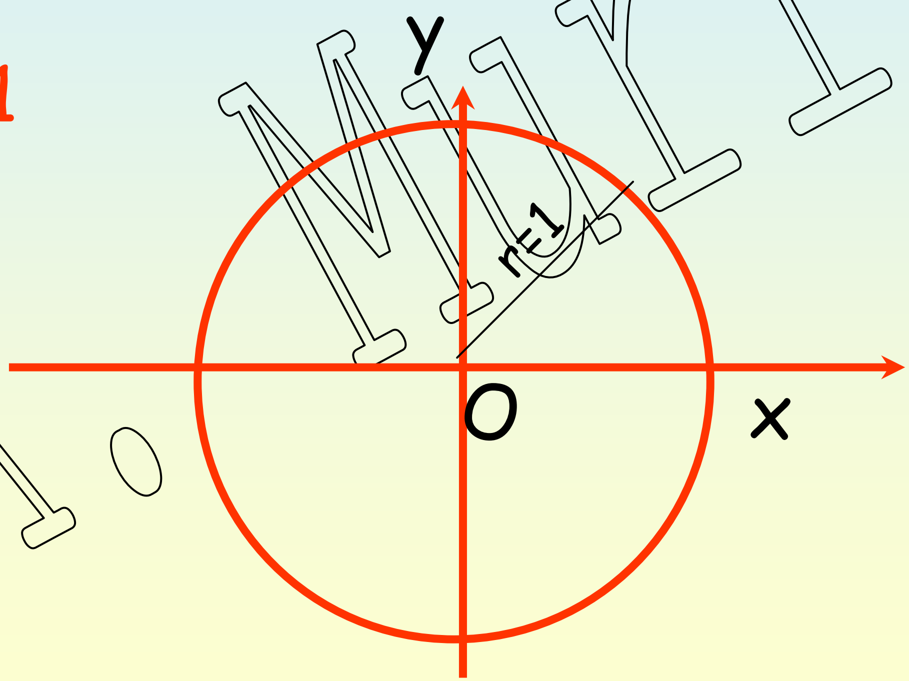
Le funzioni trigonometriche
e
l' esponenziale complesso

Sia xOy un sistema di riferimento cartesiano ortonormale

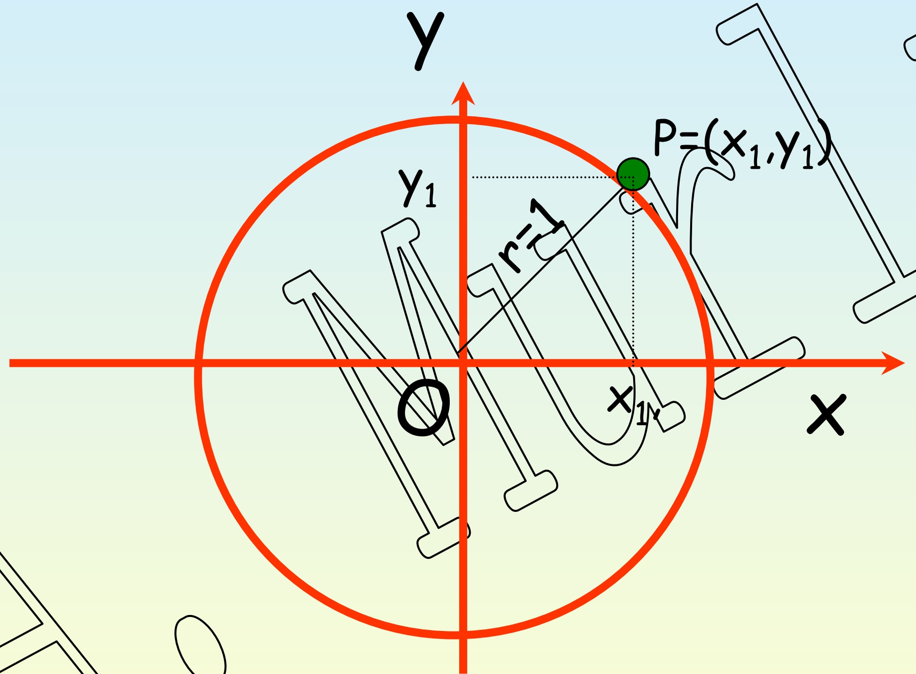
Una circonferenza che:

1. ha centro l'origine O degli assi
2. ha raggio r=1



E' una circonferenza GONIOMETRICA

In generale un punto P è individuato dalle proprie coordinate cartesiane (x_1,y_1)

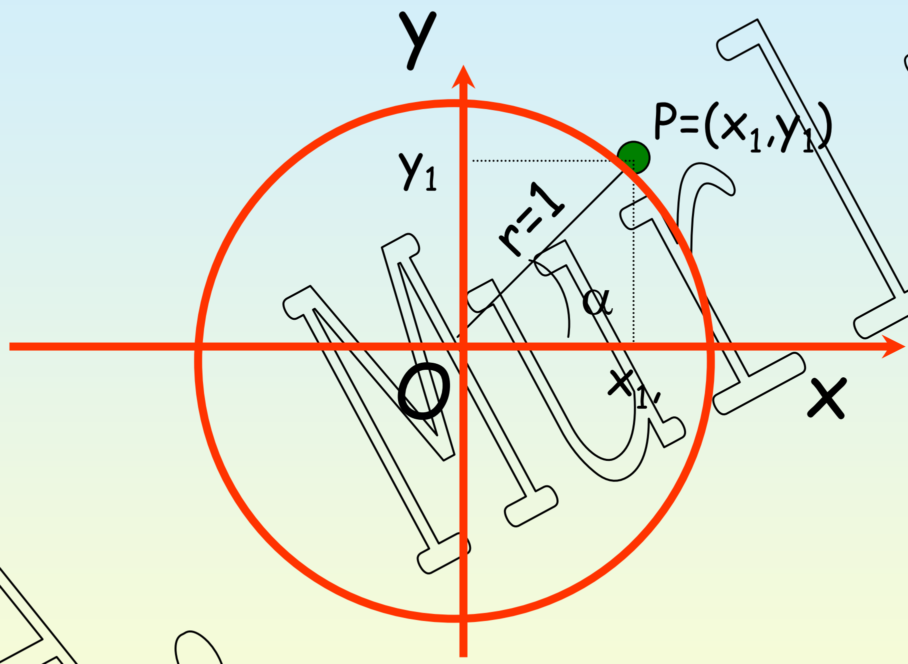


Come è possibile sfruttare la proprietà di appartenere

ad una circonferenza GONIOMETRICA

?

P è univocamente determinato dall'angolo α descritto dal raggio r….

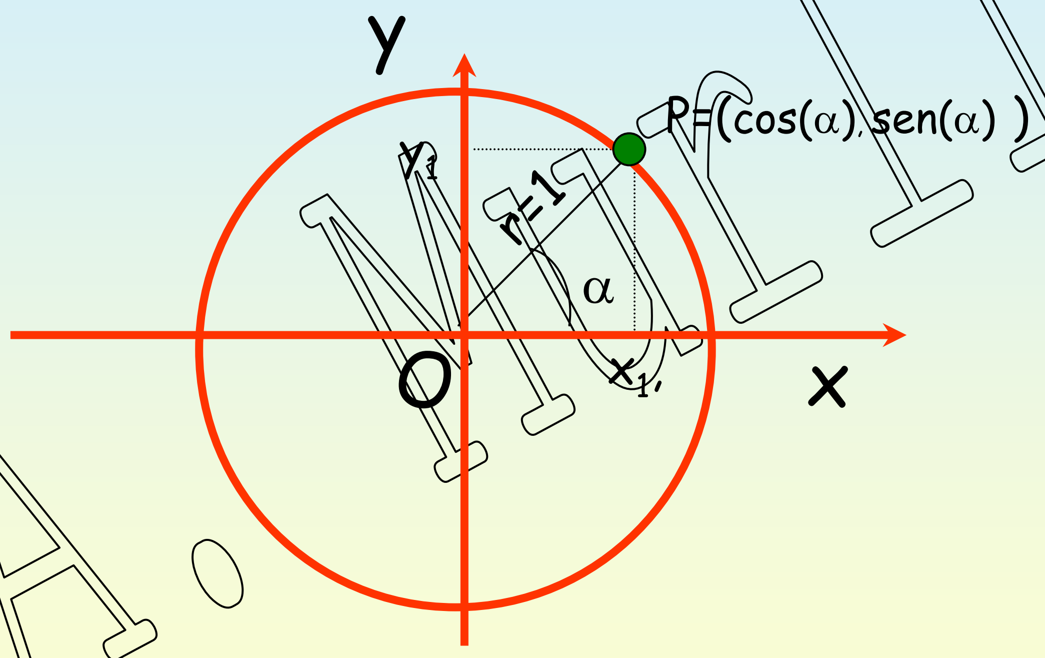


Come definire le coordinate cartesiane di P (x_1,y_1) in funzione dell'angolo α ?

Poniamo per definizione:

Ascissa del punto P
$x_1=\cos(\alpha)$

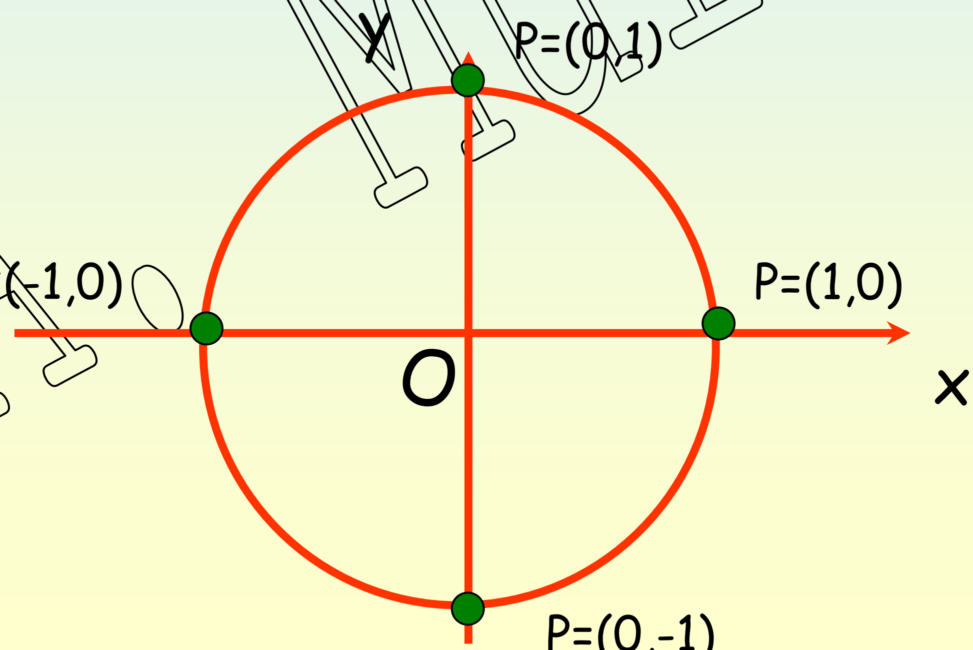
Ordinata del punto P
$y_1=\text{sen}(\alpha)$



Noto α si possono calcolare le coordinate di P e viceversa !

Esempio:

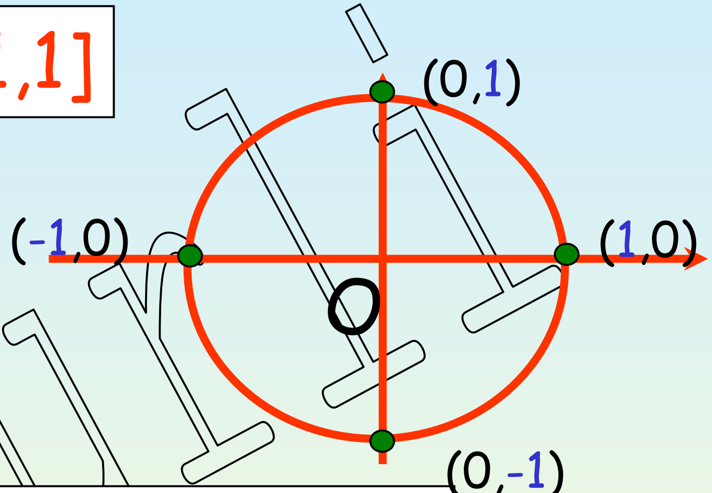
$\alpha=0$	$\cos(0)=1$	$\text{sen}(0)=0$
$\alpha=\pi/2$	$\cos(\pi/2)=0$	$\text{sen}(\pi/2)=1$
$\alpha=\pi$	$\cos(\pi)=-1$	$\text{sen}(\pi)=0$
$\alpha=3\pi/2$	$\cos(3\pi/2)=0$	$\text{sen}(3\pi/2)=-1$



Le funzioni :

$\boxed{\cos(\alpha)}$ $\boxed{\mathrm{sen}(\alpha)}$

⇒ sono assumono valori in [-1,1]



$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$

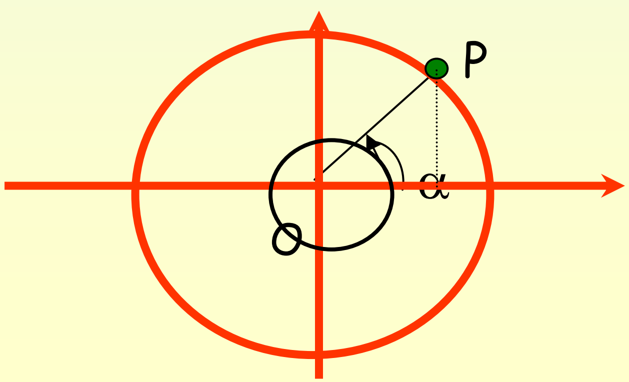
$-1 \leq \mathrm{sen}(\alpha) \leq 1$

⇒ sono periodiche di periodo 2 π ovvero:

$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$

$\mathrm{sen}\,(\alpha + 2k\pi) = \mathrm{sen}(\alpha)$

Es. Partendo da α si effettua un giro α+2π si ritrova il punto P

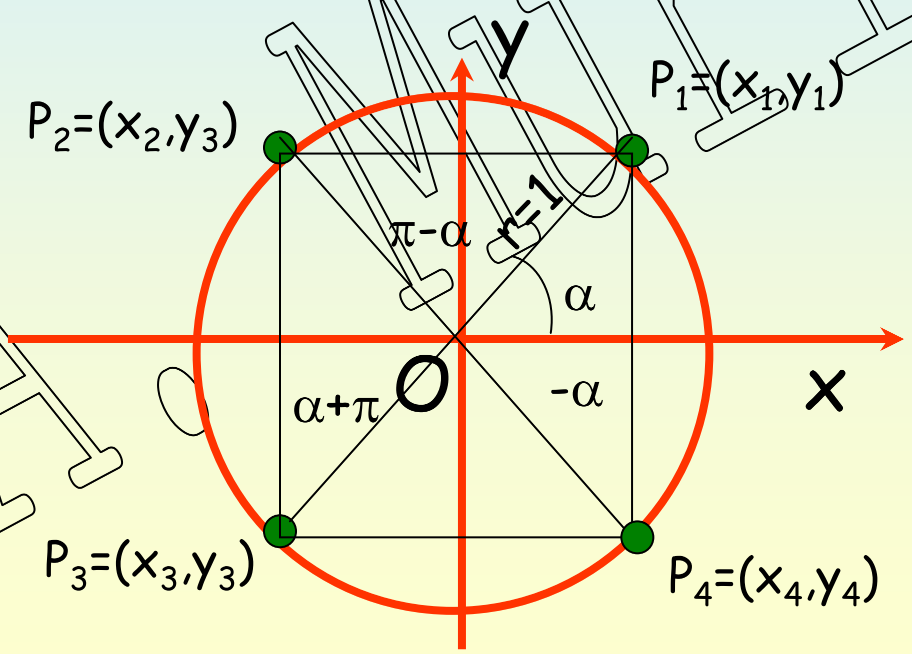


⇒ inoltre sfruttando le simmetrie del cerchio:

$x_1 = -x_2 \Rightarrow \cos(\alpha) = -\cos(\pi-\alpha)$
$y_1 = y_2 \Rightarrow \mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\pi-\alpha)$

$x_1 = x_4 \Rightarrow \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
$y_1 = -y_4 \Rightarrow \mathrm{sen}(\alpha) = -\mathrm{sen}(-\alpha)$

$x_1 = -x_3 \Rightarrow \cos(\alpha) = -\cos(\pi+\alpha)$
$y_1 = -y_3 \Rightarrow \mathrm{sen}(\alpha) = -\mathrm{sen}(\pi+\alpha)$



Proprietà degli archi associati

I numeri complessi
e
l' esponenziale complesso

Esempio 1

Risolviamo l'equazione

$$\boxed{x^2=-1}$$

la soluzione non esiste nell'insieme dei
Numeri Reali $\Re$

ma posto ➡ $$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

la soluzione e' data da:

$$\boxed{\pm\, i}$$

i viene detta unità immaginaria

i è un numero complesso

L'unità immaginaria i gode delle proprietà

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\boxed{i^3 = i^2 \cdot i = -i}$$

$$\boxed{i^4 = i^3 \cdot i = 1}$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

...

Le potenze dell'unità immaginaria sono cicliche (hanno periodo 4)

Esempio 2

Risolviamo l'equazione

$$\boxed{x^2=-4}$$

la soluzione è $\boxed{\pm 2i}$

2i è un numero complesso

(immaginario puro)

In generale un numero complesso e' del tipo

$$z=x+iy$$

con x,y numeri reali

Esempi

$\boxed{z=2-3i}$ $\boxed{z=1+7i}$ $\boxed{z=6+9i}$

L'insieme:

$$\boxed{C : \{z = x + iy : x, y \ \text{reali}\}}$$

si chiama insieme dei numeri complessi.

Assegnato un numero complesso

$z = x + iy$

$Re(z)=x$
si chiama parte reale

$Im(z)=y$
si chiama parte immaginaria

Esempio

$z = 3 + i5$

$Re(z)=3$ è la parte reale
$Im(z)=i5$ è la parte immaginaria

Come si sommano (o sottraggono)
due numeri complessi
?

Esempio

$z_1 = 3 + i5$

$z_2 = 4 - i2$

quanto vale $z = z_1 + z_2$?

$z = (3 + i5) + (4 - i2) = (3+4) + i(5-2) = 7 + 3i$

Si sommano separatamente le parti reali e quelle immaginarie

In generale...

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$$z = z_1 + z_2 = (a+c) + i(d+b)$$

Come si moltiplicano
due numeri complessi
?

Esempio

$z_1 = 3 + i5$

$z_2 = 4 - i2$

quanto vale $z = z_1 z_2$?

$z = (3 + i5)(4 - i2) = 12 - i6 + i20 - i^2 10 =$

$= 12 + i(-6+20) + 10 = 22 + i14$

Si moltiplicano algebricamente i numeri complessi
e si sfruttano le proprietà
dell'unità immaginaria

In generale...

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$z = z_1 z_2$

$= (a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + i^2 bd.$

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)}$$

Quanto costa computazionalmente effettuare una somma o una moltiplicazione complessa ?

- 1 somma complessa

$$z = z_1 + z_2 = (a+c) + i(d+b)$$

richiede 2 op. fl.p. (ovvero due somme f.p.)

- 1 moltiplicazione complessa

$$z = z_1 z_2 = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

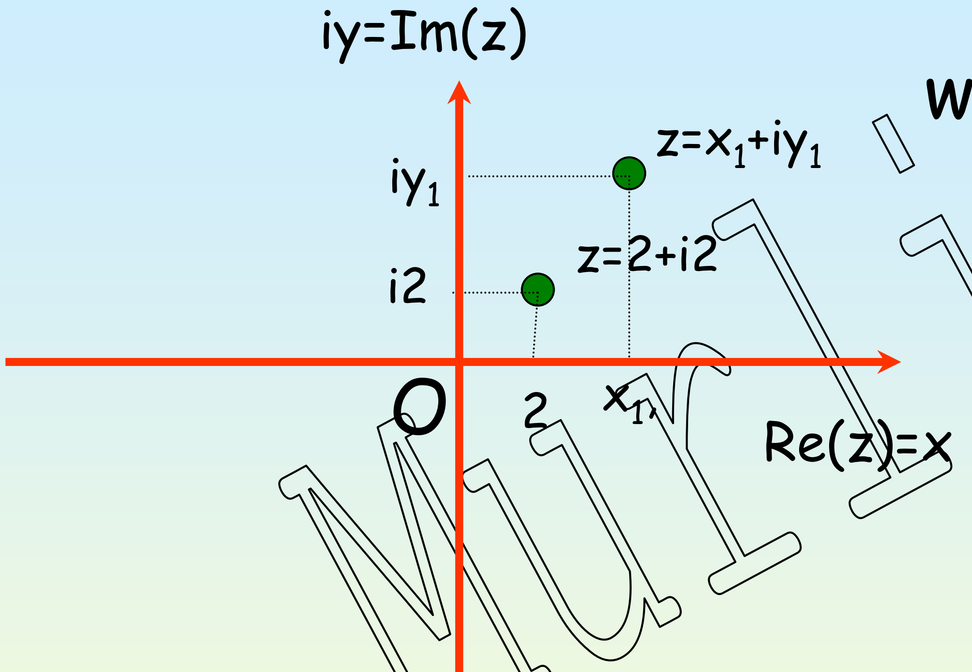
richiede 6 op. fl.p. (ovvero 4 prodotti f.p. 2. somme)

Le operazioni complesse hanno un costo maggiore
rispetto a quelle reali !!

Come è possibile rappresentare graficamente i numeri complessi

?

Considеriamo un piano cartesiano del tipo



Esempio

$z=2+i2$

E' possibile rappresentare un numero complesso su un piano w detto piano complesso
sull'asse x ci sono tutti i <u>numeri reali</u>
sull'asse iy gli <u>immaginari puri</u>

Esempio

Consideriamo il numero immaginario puro

$z = i\pi$ quanto vale l'esponenziale $e^{i\pi}$?

Sfruttando l'identità di Eulero

$$e^{iy} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)$$

Si ottiene

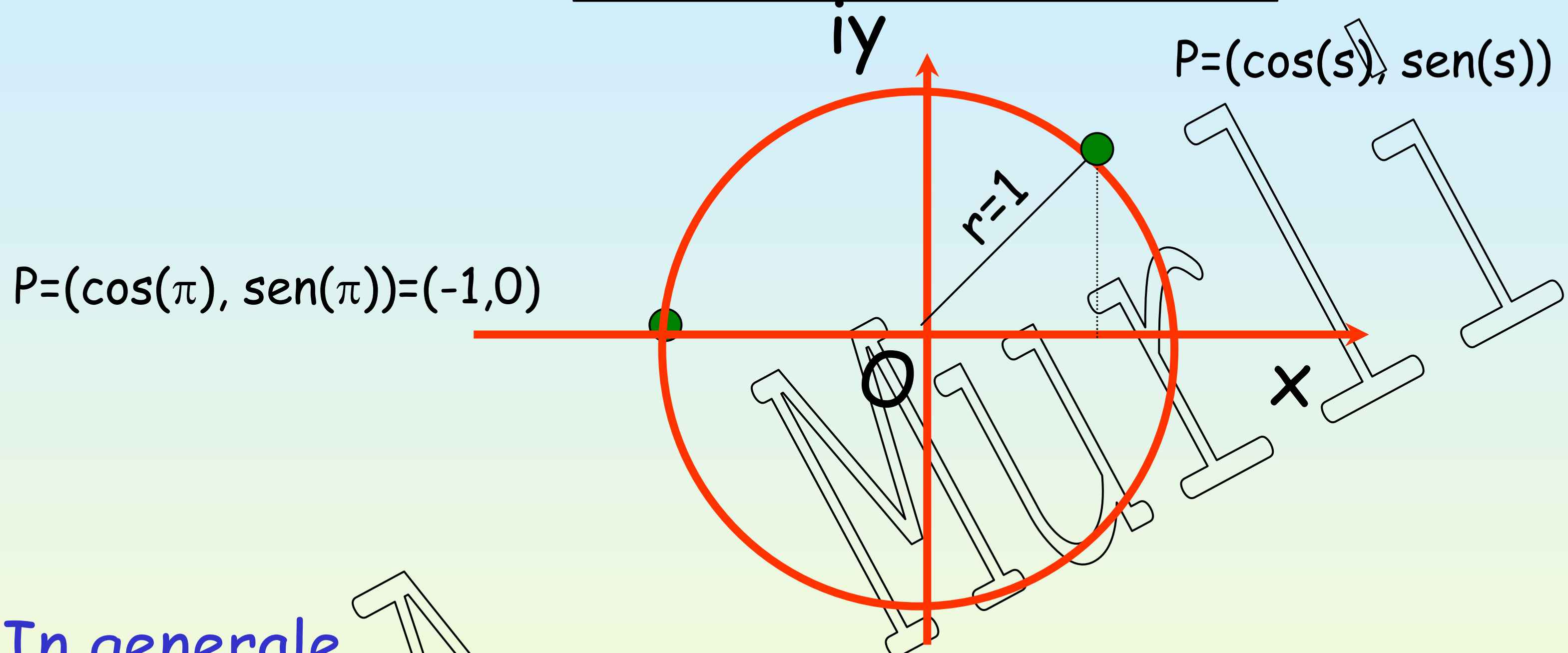
$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1$$

$$e^{iy} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)$$

Nell'esponenziale complesso di un immaginario puro
intervengono le funzioni trigonometriche
e' possibile rappresentarlo opportunamente
nel piano complesso w
?

Utilizzando la circonferenza goniometrica

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi) = -1$$

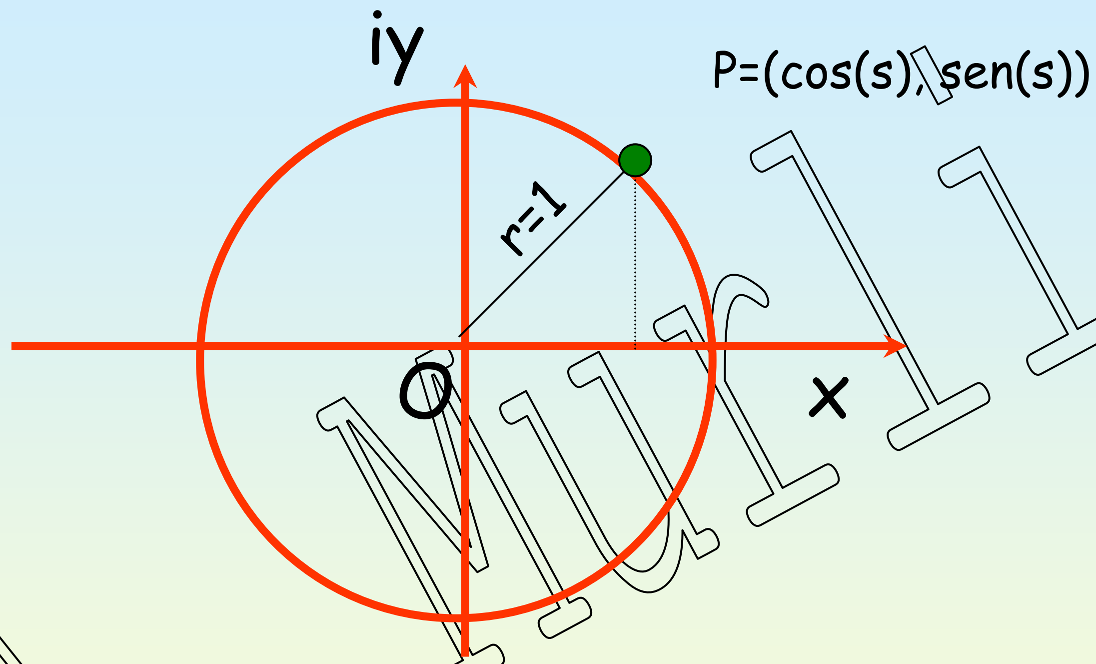


In generale

$$e^{is} = \cos(s) + i\,\text{sen}(s)$$

L'esponenziale complesso e^{is} rappresenta il punto della circonferenza goniometrica sul piano complesso individuato dall'angolo s

$$e^{is} = \cos(s) + i\,\mathrm{sen}(s)$$



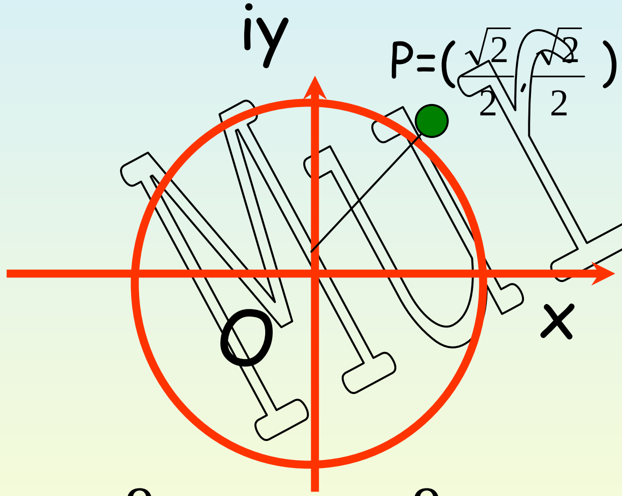
Esiste uno stretto legame tra l'esponenziale complesso di un immaginario puro e le funzioni trigonometriche $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$

Esempio

Consideriamo il numero complesso

$$\boxed{z_1 = e^{i\pi/4}}$$

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Calcoliamo z_1^9

$$z^9{}_1 = (e^{i\pi/4})^9 = e^{i\pi 9/4} = \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{9\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = z_1$$

Per le proprietà di periodicità delle funzione trigonometriche!!

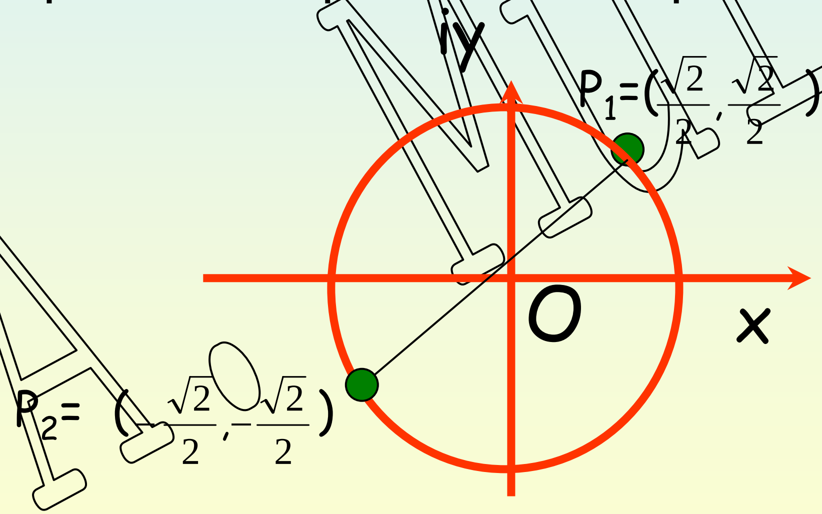
Esempio

Consideriamo i numeri complesso

$z_1 = e^{i\pi/4}$ $\qquad$ $z_2 = e^{i5\pi/4}$

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = e^{i5\pi/4} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$z_1 = - z_2$

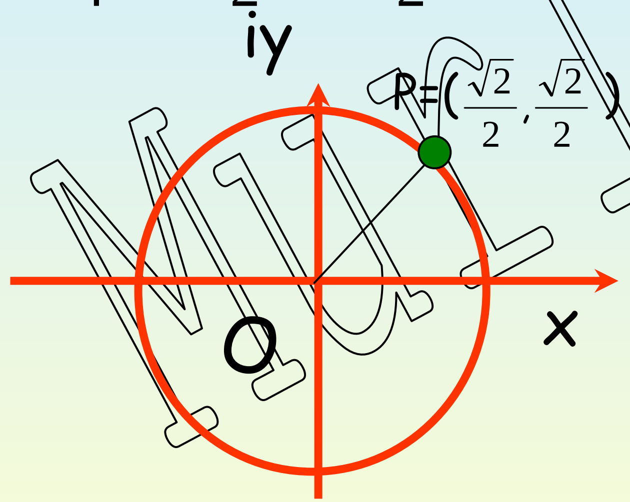
Per le proprietà degli archi associati delle funzione trigonometriche!!

Esempio

Consideriamo il numero complesso

$$\boxed{z_1 = e^{i\pi/4}}$$

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Calcoliamo $z_1{}^4$

$$z^8{}_1 = (e^{i\pi/4})^8 = e^{i\pi 8/4} = \cos\left(\frac{8\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos(2\pi) + i\,\text{sen}(2\pi) = 1$$

z_1 si dice radice ottava dell'unità!!

DEFINIZIONE

$z = e^{i s}$ è una radice N-ma dell'unità

def

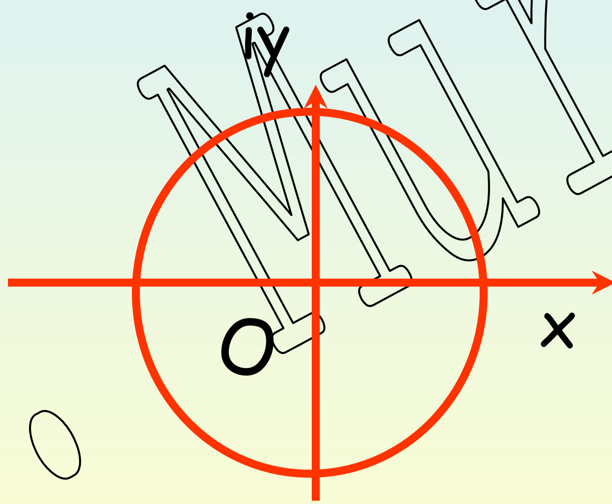
$$z^N = 1$$

Esempio

Consideriamo l'esponenziale complesso

$$\boxed{w_N = e^{-i2\pi/N}}$$

$$w_N = e^{-i2\pi/n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$



Cosa rappresentano le potenze di questi numeri sulla circonferenza goniometrica

?

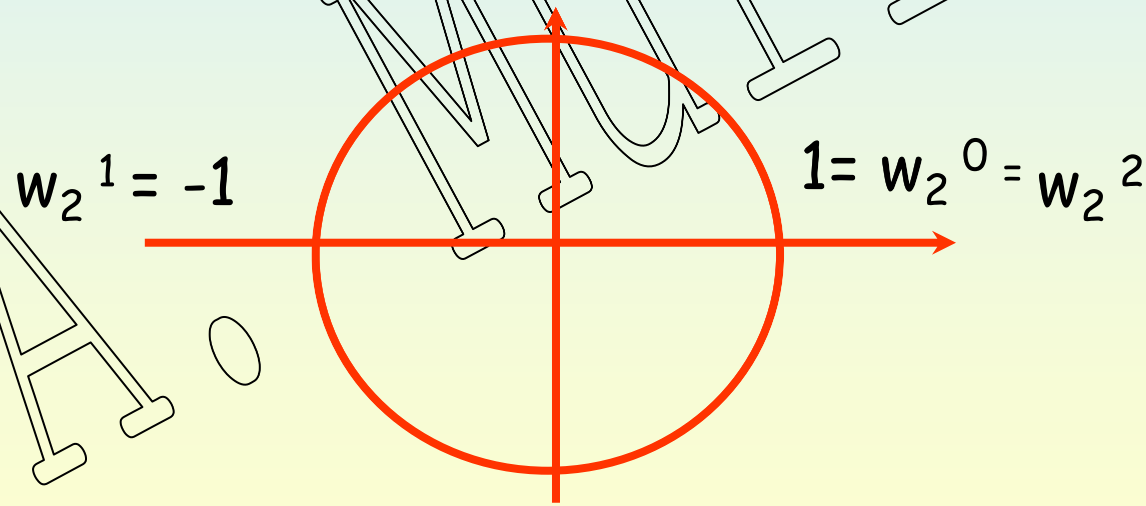
Esempio: N=2

$w_2 = e^{-i\,2\pi/2}$

s=0 $\quad w_2^0 = e^{-i\,2\pi/2\;0} = \cos\left(\frac{2\pi}{2}0\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{2}0\right) = 1$

s=1 $\quad w_2^1 = e^{-i\,2\pi/2\;1} = \cos\left(\frac{2\pi}{2}1\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{2}1\right) = -1$

s=2 $\quad w_2^2 = e^{-i\,2\pi/2\;2} = \cos\left(\frac{2\pi}{2}2\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{2}2\right) = 1$



$w_N^{\,s}$ $(s = 0,\dots,N-1)$ = sono le radici primitive dell'unità

= twiddle factor

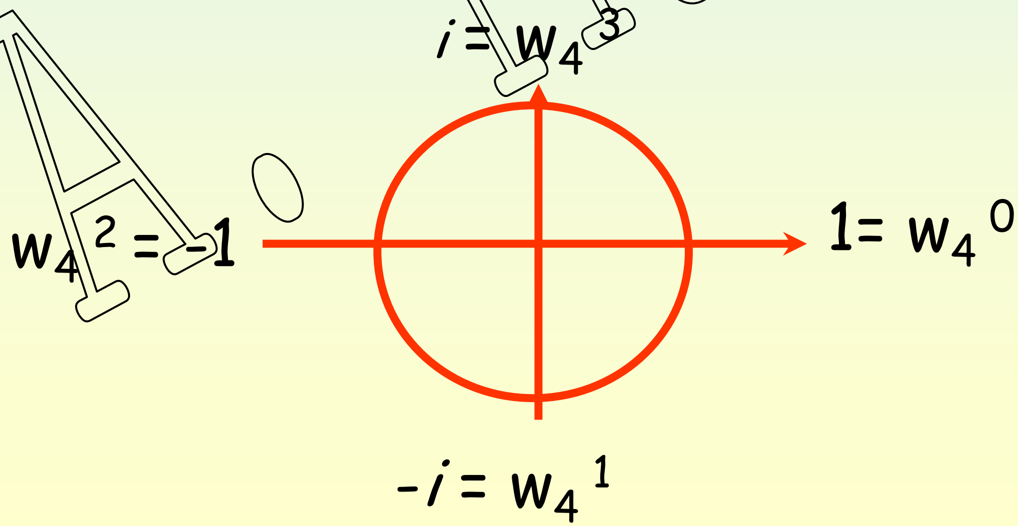
Esempio: N=4 $\quad w_4 = e^{-i\,2\pi/4}$

s=0 $\quad w_4^0 = e^{-i\,2\pi/4\;0} = \cos\left(\frac{2\pi}{4}0\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}0\right) = 1$

s=1 $\quad w_4^1 = e^{-i\,2\pi/4\;1} = \cos\left(\frac{2\pi}{4}1\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}1\right) = -i$

s=2 $\quad w_4^2 = e^{-i\,2\pi/4\;2} = \cos\left(\frac{2\pi}{4}2\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}2\right) = -1$

s=3 $\quad w_4^3 = e^{-i\,2\pi/4\;3} = \cos\left(\frac{2\pi}{4}3\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}3\right) = i$



Esempio: N=4

$w_4 = e^{-i\,2\,\pi/4}$

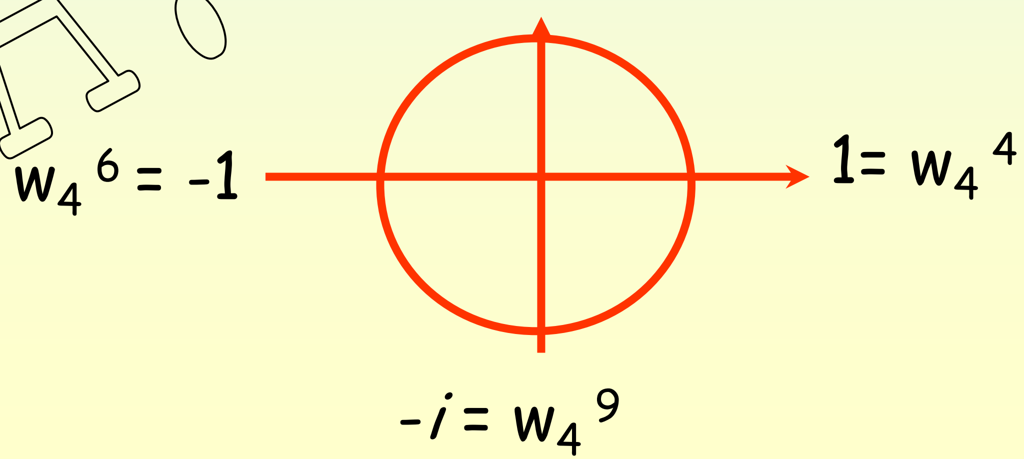
s=4 $\quad w_4^4 = e^{-i\,2\pi/4\;4} = \cos(\frac{2\pi}{4}4) - i\,sen(\frac{2\pi}{4}4) = 1$

s=6 $\quad w_4^6 = e^{-i\,2\pi/4\;6} = \cos(\frac{2\pi}{4}6) - i\,sen(\frac{2\pi}{4}6) = -1$

$\cos(3\pi) - i\,sen(3\pi) = \cos(2\pi + \pi) - i\,sen(2\pi + \pi)$

s=9 $\quad w_4^9 = e^{-i\,2\pi/4\;9} = \cos(\frac{2\pi}{4}9) - i\,sen(\frac{2\pi}{4}9) = -i$

$\cos(\frac{9}{2}\pi) - i\,sen(\frac{9}{2}\pi) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) - i\,sen(2\pi + \frac{\pi}{2})$



Definizione

Assegnati N numeri complessi

$f_0 , f_1 ,\ldots, f_{N-1}$

posto

$w_N = e^{-i\,2\pi/N} = \cos(2\pi/N) - i \sin(2\pi/N)$

il vettore $\underline{F} = (F_0 , F_1 \ldots, F_{N-1})$ con

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{jk} \qquad k = 0,\ldots N-1$$

è detto **Trasformata Discreta di Fourier (DFT)**

del vettore $\underline{f} = (f_0 , f_1 \ldots, f_{N-1})$

FINE LEZIONE !!