Proprietà dell'operatore DFT

Calcolo della DFT di 2 vettori reali

$$\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in R^N \qquad \underline{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1}) \in R^N$$

$$DFT[\underline{x}] = \underline{X} \in C^N \qquad DFT[\underline{y}] = \underline{Y} \in C^N$$

2 DFT (N) complesse ...

...anche se x e y sono vettori reali

MA …..

Applicando le proprietà dell'operatore DFT
si riesce a ridurre il numero di operazioni
per il calcolo di 2 DFT di vettori reali
da 2 DFT complesse a
1 DFT complessa

Proprietà di linearità

$$DFT(c\,\underline{f}+d\,\underline{g}) = c\cdot DFT(\underline{f}) + d\cdot DFT(\underline{g})$$

$$\left(\mathcal{F}\left[c\,\underline{f}+d\,\underline{g}\right]\right)_k = \sum_{j=0}^{N-1}\left(c\,f_j + d\,g_j\right) w_N^{-jk} =$$

$$= c\sum_{j=0}^{N-1} f_j\, w_N^{-jk} + d\sum_{j=0}^{N-1} g_j\, w_N^{-jk} = c\left(\mathbf{F}\left[\underline{f}\right]\right)_k + d\left(\mathbf{F}\left[\underline{g}\right]\right)_k$$

$\mathbf{F}$ è un operatore lineare

Proprietà di simmetria

Sia $\underline{F} = DFT\left[\underline{f}\right]$ $\qquad \overline{\overline{f}} = \left(f_N \,, f_{N-1} \,, \ldots., f_{N/2} \,, \ldots, f_1 \,, f_0 \right)$

$$\frac{1}{N} DFT\left[DFT\left[\underline{f}\right]\right] = \overline{\overline{f}}$$

$$\frac{1}{N}\left(DFT[\underline{F}]\right)_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F_j w_N^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F_j w_N^{(N-k)j} = f_{N-K}$$

poiché

$$w_N^{(N-k)j} = \underbrace{\boxed{e^{\frac{2\pi i N j}{N}}}}_{1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{N}(-kj)} = w_N^{-kj}$$

Osservazione

Per dare significato alla proprietà di simmetria il vettore f e la sua DFT, F, sono prolungati aggiungendo l' (n+1) – mo elemento f_n e F_n in modo che:

$$f_n = f_o$$

$$F_n = F_o$$

ESEMPIO

$\underline{f}$=(8+i, 5-3i, 2, 4-i, 6+2i)

"completiamo" il vettore $(f_j)_{J=0,N-1}$
aggiungendo l'(n+1) - simo elemento $f_n=f_0$

$\underline{f}$=(8+i, 5-3i, 2, 4-i, 6+2i, 8+i) con n=5

$$\underline{F} = DFT\left[\underline{f}\right] = (25 - i\,, 2.3776 + 3.6266\,i\,, -2.9351 + 0.1857\,i\,, 4.8449 + 2.8143\,i\,, 10.7126 - 0.6266\,i\,, 25 - i\,)$$

$$\frac{1}{5}\ \mathrm{DFT}\ \left[\underline{F}\right] = \left(8 + i\,, 6 + 2i\,, 4 - i\,, 2\,, 5 - 3\,i\,, 8 + i\right)$$

Proprietà di parità

$\underline{f}$ *reale* $\Rightarrow DFT[\underline{f}]$ *hermitiano simmetrico*

$\underline{f}$ *immag.* $\Rightarrow DFT[f]$ *hermitiano antismmetrico*

$\underline{f}$ *hermitiano simmetrico* $\Rightarrow \underline{DFT[f]}$ *reale*

$\underline{f}$ *hermitiano antisimmetrico* $\Rightarrow DFT[f]$ *immaginario*

RICORDIAMO CHE:

se $\underline{h}$ è un vettore di lunghezza N,

$\underline{h}$ hermitiano simmetrico se $h_j = \overline{h}_{N-j}$

Ad esempio (1+3i, -4, 5-i, -8-2i, -8+2i, 5+i, -4, 1-3i)

$\underline{h}$ hermitiano antisimmetrico se $h_j = -\overline{h}_{N-j}$

Ad esempio (1+3i, -4, 5-i, -8-2i, 8-2i, -5-i, 4, -1+3i)

Proprietà di parità

$$\underline{f}\ \textit{reale} \Rightarrow \mathrm{DFT}[\underline{f}]\ \textit{hermitiano simmetrico}$$

$$\underline{f}\ \textit{immag.} \Rightarrow DFT[f]\ \textit{hermitiano antismmetrico}$$

$$\underline{f}\ \textit{hermitiano simmetrico} \Rightarrow \underline{DFT[f]}\ \textit{reale}$$

$$\underline{f}\ \textit{hermitiano antisimmetrico} \Rightarrow DFT[f]\ \textit{immaginario}$$

Proprietà di parità

$\underline{f}$ *reale* $\Rightarrow$ DFT$[\underline{f}]$ *hermitiano simmetrico*

$\underline{f}$ *immag.* $\Rightarrow$ $\underline{F}$ *hermit. antismm.*

Dim:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{-2\pi i}{N} jk} e^{\frac{2\pi i}{N} Nj} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi i}{N}(N-k)j} = \boxed{\overline{F}_{N-k}}$$

k=0,….,N/2

Coniugato di F_{N-k}

Calcolo delle DFT di due sequenze reali

Siano

$$DFT[\underline{x}] = \underline{X} \in C^N, \quad \underline{x} = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in R^N$$

$$DFT[\underline{y}] = \underline{Y} \in C^N, \quad \underline{y} = (y_0, \dots, y_{N-1}) \in R^N$$

1. **PASSO 1: costruiamo la sequenza complessa**

$$\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y} \quad \Rightarrow \quad \underline{z} = (z_0, \dots, z_{N-1}) \in C^N$$

esempio

x=(5, 2, 1, -1, 3)

y=(-2, 4, 1, 7, 3)

z=(5-2i, 2+4i, 1+i, -1+7i, 3+3i)

2. **PASSO 2**: Calcoliamo la DFT di z:

$$DFT[\underline{z}] = \underline{Z}, \qquad \underline{z} = (z_0, \dots, z_{N-1}) \in C^N$$

La DFT è un operatore lineare:

$$DFT[\underline{z}] = \underline{Z} = DFT[\underline{x}] + i\,DFT[\underline{y}] = \underline{X} + i\underline{Y}$$

Poiché: $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sequenze reali ⇒ $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ hermitiane e simmetriche

Cioè:

$$X_k = \overline{X}_{N-k} \quad e \quad \overline{X}_k = X_{N-k}$$

$$Y_k = \overline{Y}_{N-k} \quad e \quad \overline{Y}_k = Y_{N-k}$$

$$\underline{Z}_k = \underline{X}_k + i\,\underline{Y}_k$$

Posso sostituire k con N-k
e passare ai coniugati

$$Z_k = \overline{Z}_{N-k}$$

$$\overline{Z}_{N-k} = X_{N-k} - iY_{N-k} = \overline{X}_k - i\overline{Y}_k$$

k=0,…,N/2

$$Z_k = X_k + i\,Y_k$$

$$\overline{Z}_{N-k} = \overline{X}_k - i\,\overline{Y}_k$$

k=0,...,N/2

$$X_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} + Z_k\right]$$

$$Y_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} - Z_k\right]$$

k=0,...,N/2

2 DFT di 2 sequenze reali di **lunghezza N**

1 DFT di 1 sequenza complessa di lunghezza **N**.

Esempio:

$\underline{x}=(5, 2, 1, -1, 3) \in R^5$ $\underline{y}=(-2, 4, 1, 7, 3) \in R^5$

calcoliamo le 2 DFT dei due vettori

Calcolo di 2 DFT di lunghezza 5

$\underline{X}$=(10, 6.5451-0.2245i, 0.9549+2.4899i, 0.9549-2.4899i, 6.5451+0.2245i)

$\underline{Y}$=(13,-6.309+2.5757i, -5.191-6.2941i,-5.1910+6.2941i, -6.309-2.5757i)

Applicando le proprietà della DFT..

1. **Costruiamo il vettore z=(x+iy)**

$\underline{z} = (5-2i,\ 2+4i,\ 1+i,\ -1+7i,\ 3+3i) \in C^5$

2. **Calcoliamo la DFT del vettore complesso z:**

Calcolo di 1 DFT

$\underline{Z} = (10+13i,\ 3.9694-6.5335i,\ 7.249-2.7011i,\ -5.3392-7.6809i,\ 9.1207-6.0845i)$

X=DFT(x) ed Y= DFT(y) si possono calcolare a partire da Z

$$X_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} + Z_k\right]$$

k=0,…,N/2

$$Y_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} - Z_k\right]$$

$\underline{Z}$ = (10+13i, 3.9694-6.5335i, 7.249-2.7011i, -5.3392-7.6809i, 9.1207-6.0845i)

X_1=1/2*[9.1207+6.0845i + 3.9694-6.5335i] = 6.5451-0.2245i

Y_1=i/2*[9.1207+6.0845i -3.9694+6.5335i] = -6.309+2.5757i

X_2=1/2*[-5.3392+7.6809i+ 7.249-2.7011i] = 0.9549+2.4899i

Y_2=i/2*[-5.3392+7.6809i- 7.249+2.7011i] = -5.191-6.2941i

…

Calcolo DFT di 2 vettori reali x , y: ALGORITMO:

1. **Costruiamo il vettore z=(x+iy)**
2. **Calcoliamo la DFT del vettore complesso z**
3. **Ricavare la DFT(x) e la DFT(y) a partire dalla DFT(z)**

Calcolo DFT di un vettore reale di lunghezza 2N

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{2N-1}) \in R^{2N}$$

2 DFT di 2 vettori reali di lunghezza N

Dalla proprietà 1

1 DFT di 1 vettore complesso di lunghezza N

ALGORITMO:

Sia

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{2N-1}) \in \mathbb{R}^{2N}$$

k=0,…,N-1

STEP 1: costruiamo due vettori $\underline{h}$ e $\underline{g} \in \mathbb{R}^N$ con

$$h_k = x_{2k} \qquad g_k = x_{2k+1}$$

$$\underline{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}) \qquad \underline{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})$$

$$\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2N-2}, x_{2N-1})$$

STEP 2: effettuiamo la DFT di $\underline{h}$ e $\underline{g} \in R^N$

$$X_k = \sum_{j=0}^{2N-1} x_j e^{-2\pi ijk/2N} = \qquad k= 0,\dots, N-1$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} x_{2j} e^{-2\pi ijk/N} + e^{-i\pi k/N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{2j+1} e^{-2\pi ijk/N} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{-2\pi ijk/N}}_{H_k} + e^{-i\pi k/N} \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-2\pi ijk/N}}_{G_k} =$$

$$= H_k + e^{-i\pi k/N} G_k$$

$$DFT_N[\underline{h}] = \underline{H} \qquad DFT_N[\underline{g}] = \underline{G}$$

$$X_k = H_k + e^{-i\pi k/N} G_k \qquad k=0,\dots,N-1$$

Calcolo DFT di un vettore reale di lunghezza 2: ALGORITMO:

•STEP 1:

costruiamo i vettori h, g ed y tali che

$$h(j)=x(2j)$$
$$g(j)=x(2j+1)$$
$$y(j)=h(j)+ig(j)$$

•STEP 2:

calcolare la DFT del vettore complesso y

•STEP 3:

calcoliamo le DFT di h e g, a partire da Y

$$H_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Y}(N-k) + Y(k)\right]$$

$$G_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Y}(N-k) - Y(k)\right]$$

•STEP 4:

calcoliamo le DFT di x, a partire da quella di h e g

$$X_k = H_k + e^{\frac{-ik\pi}{N}} G_k$$

$$X_{N+k} = \overline{X_k}$$

Esempio: calcolare la DFT del vettore

$$\underline{x}=(2,\,-5,\,8,\,-3,\,-2,\,4)\in R^6$$

- **Primo Passo**: costruiamo i vettori $\underline{h}$, $\underline{g}$ ed $\underline{y}$ tali che

```
h(j)=x(2j)
g(j)=x(2j+1)
y(j)=h(j)+ig(j)
```

$\underline{h} = (2,\,8,\,-2)\in R^3$

$\underline{g} = (-5,\,-3,\,4)\in R^3$

$\underline{y} = (2-5i,\,8-3i,\,-2+4i)\in C^3$

•**Secondo Passo**: calcolare la DFT $\underline{Y}$ del vettore complesso $\underline{y}$:

$$DFT_N[\underline{y}] = \underline{Y}$$

$$\underline{Y} = (8-4i, -7.0622-14.1603i, 5.0622+3.1603i)$$

•**Terzo Passo:** calcoliamo le DFT di $\underline{h}$ e $\underline{g}$, a partire da $\underline{Y}$

$$H_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Y}(N-k) + Y(k)\right]$$

$$G_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Y}(N-k) - Y(k)\right]$$

$$\underline{H} = (8, -1-8.6603i, -1+8.6603i)$$

$$\underline{G} = (-4, -5.5+6.0622i, -5.5-6.0622i)$$

•Quarto Passo

$$X_k = H_k + e^{\frac{-ik\pi}{N}} G_k$$
$$X_{N+k} = \overline{X_k}$$

k=0,…,N/2

$$\underline{X} = DFT[\underline{x}] = (4, 1.5-0.866i, -3.5+16.4545i, 12, -3.5-16.4545i, 1.5+0.866i)$$

Applicazione della DFT

alle

MATRICI CIRCOLANTI

Dato un vettore $\underline{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ la matrice

$$C(v) = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_0 \end{bmatrix}$$

Il vettore riga k-mo è ottenuto dal vettore $\underline{v}$ traslato verso destra di k posizioni

MATRICE CIRCOLANTE

$$C(\underline{v}) = F^{-1}\Sigma F$$

$$\begin{bmatrix} F_0 & & & \\ & F_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & w_N^1 & \dots & w_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Σ = diag (DFT($\underline{v}$)) F matrice di Fourier

$C(v)\cdot\underline{x}=\underline{y}$ $\Rightarrow$ $(F^{-1}\Sigma F)\underline{x} = \underline{y} \Leftrightarrow F(F^{-1}\Sigma F)\underline{x} = F\underline{y}$

$\Rightarrow$ $\Sigma F\underline{x} = F\underline{y} \Leftrightarrow FFT(\underline{v})\cdot FFT(\underline{x}) = FFT(\underline{y})$

CALCOLO del prodotto matrice-vettore,

$C(\underline{v})\,\underline{x} = \underline{y}$

1. $\mathrm{FFT}(\underline{x}) = \underline{\tilde{x}}$
2. $\mathrm{FFT}(\underline{v}) = \underline{\tilde{v}}$
3. $\boxed{\underline{\tilde{v}}.*\underline{\tilde{x}}} = \underline{z}$ — Prodotto puntuale
4. $\mathrm{IFFT}(\underline{z}) = \underline{y}$

3 DFT e 1 prodotto puntuale tra vettori

complessità $O(n \log n)$

Matrici di Toeplitz, $T \in R^{nxn}$,

$$T = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} \\ r_{-1} & r_0 & \cdots & r_{n-3} & r_{n-2} \\ r_{-2} & r_{-1} & \cdots & r_{n-4} & r_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ r_{-(n-1)} & r_{-(n-2)} & \cdots & r_{-1} & r_0 \end{pmatrix}$$

per n=4

$$T = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_{-2} & r_{-1} & r_0 & r_1 \\ r_{-3} & r_{-2} & r_{-1} & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Le matrici di Toeplitz possono essere “immerse” in Matrici Circolanti.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow C(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 & 9 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 9 & 0 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 \\ 6 & 9 & 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 9 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

di ordine 7x7 con $\underline{v}$= (3, 1, 7, 6, 9, 0, 4)

Il vettore $\underline{v}$ = (3, 1, 7, 6, 9, 0, 4) che genera la matrice circolante $C(\underline{v})$ è :

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 7 \quad 6} \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Prima riga della matrice di Toeplitz.

Prima colonna della matrice di Toeplitz, tranne il primo elemento, presa in ordine inverso.

In generale

$$T \in R^{n \times n} \Rightarrow C(\underline{v}) \in R^{(2n-1) x (2n-1)}$$

$T\,\underline{x} = \underline{y}$

prodotto matrice-vettore,
con matrice di Toeplitz T di ordine n

$C(\underline{v})\,\underline{x}' = \underline{y}$

prodotto matrice-vettore,
con matrice circolante di ordine 2n-1

C(v) è la matrice circolante "costruita intorno" alla matrice T, e $\underline{x}'$ è il vettore $\underline{x}$ a cui sono stati aggiunti n-1 zeri.

Teorema di convoluzione

Siano $\underline{f}, \underline{g} \in C^N$. Si ha

$$DFT\,[\,\underbrace{\underline{f} * \underline{g}}\,] = \underbrace{\underline{F} \otimes \underline{G}}$$

Convoluzione di due vettori:

$$\underline{f} * \underline{g} = \underline{t}\ ;\ t_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, g_{j-k}$$

j=0,1,…,N-1

Prodotto componente per componente:

$$\underline{F} \otimes \underline{G} = \underline{t}\ ;\ t_j = F_j G_j$$

La DFT della convoluzione di due vettori è il prodotto puntuale delle DFT dei vettori

Prodotto di due polinomi:

Siano

$$a(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x^k = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

Il loro prodotto è un polinomio c di grado 2n-2 :

$$c(x) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} x^{2n-2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2N-2} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j k_{k-j} \right) x^k$$

$$c(x) = a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} \boxed{\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right)} x^k$$

$$c(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k$$

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Convoluzione di due vettori

Se scrivo i due vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ come

$$\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in C^{2N-1}$$

$$\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in C^{2N-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{c} = \underline{a} * \underline{b} = \mathcal{F}^{-1}_{2N-1}\left[\mathcal{F}_{2N-1}(\underline{a}) \otimes \mathcal{F}_{2N-1}(\underline{b})\right] \in C^{2N-1}$$

Esempio:

Moltiplichiamo i due polinomi

coefficienti

$a(x) = 1 + 5x + 17x^2$ $\quad \underline{a} = (1, 5, 17) \quad \in C^3$

$b(x) = 11 + 6x - 4x^2$ $\quad \underline{b} = (11, 6, -4) \quad \in C^3$

$\underline{a} = (1, 5, 17) \rightarrow \underline{a} = (1, 5, 17, 0, 0)$

$\underline{b} = (11, 6, -4) \rightarrow \underline{b} = (11, 6, -4, 0, 0)$

Di dimensioni 2*3-1=5

A = DFT [a]

$$= (23, -11.2082 - 14.7476i, 2.2082 + 13.229i, 2.2082 - 13.229i, -11.2082 + 14.7476i)$$

B = DFT [$\underline{b}$]

$$= (13, 16.0902 - 3.3552i, 4.9098 - 7.3309i, 4.9098 + 7.3309i, 16.0902 + 3.3552i)$$

Il prodotto puntuale tra le due DFT è

$A \otimes B$=(299, -229.82-199.69i, 107.82+48.76i, 107.82-48.76i, -229.82+199.69i)

La IDFT del vettore ottenuto è il prodotto di convoluzione dei vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$:

$\underline{a} * \underline{b}$=(11, 61, 213, 82, -68)

La
Trasformata di Fourier (FT)
e la
Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Sia f(t) una funzione per cui esiste la

Trasformata di Fourier F(u):

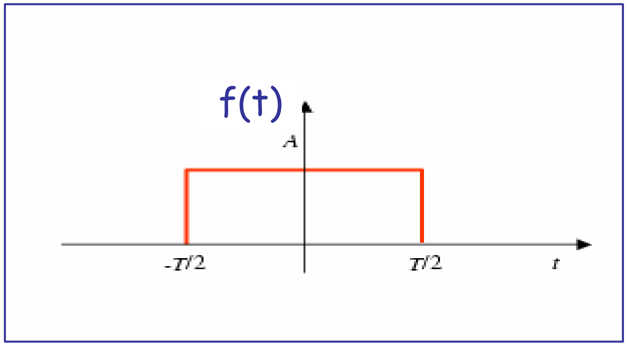
$$F(u) = \mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$

$u \in (-\infty, +\infty)$

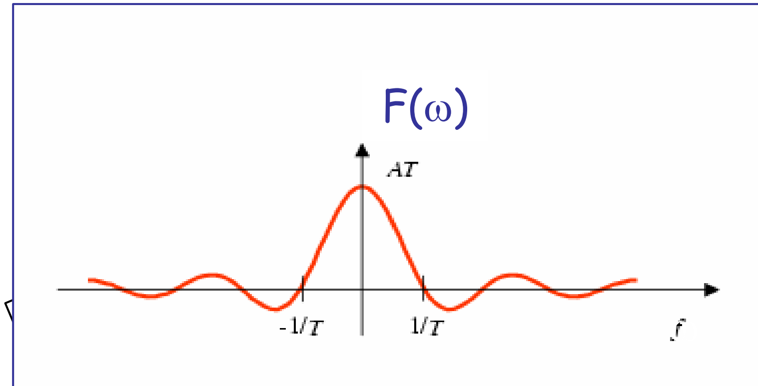
Esempi…

Funzione rettangolo:

$$F(\omega) = AT\frac{\sin \pi\omega T}{\pi\omega T}$$

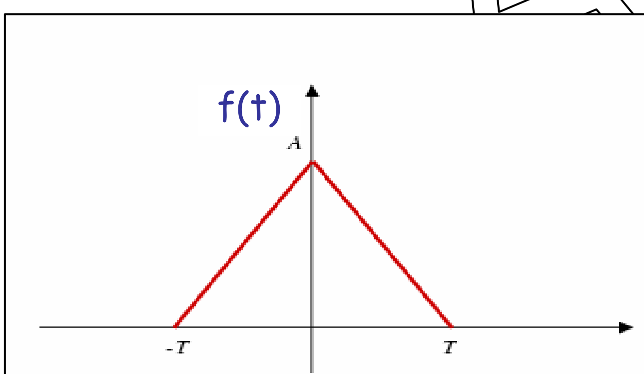


$\xrightarrow{\mathcal{F}}$

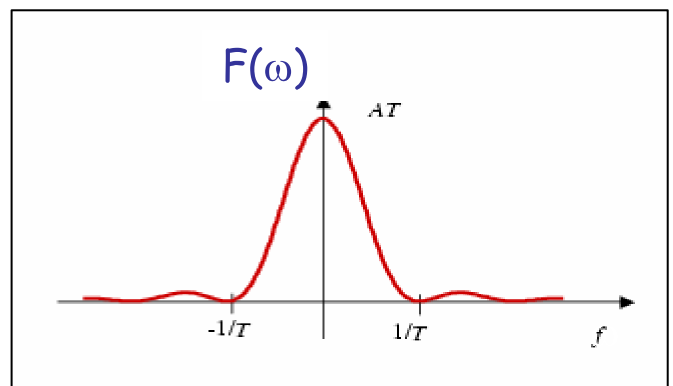


Funzione triangolo:

$$F(\omega) = AT\left(\frac{\sin \pi\omega T}{\pi\omega T}\right)^2$$



$\xrightarrow{\mathcal{F}}$

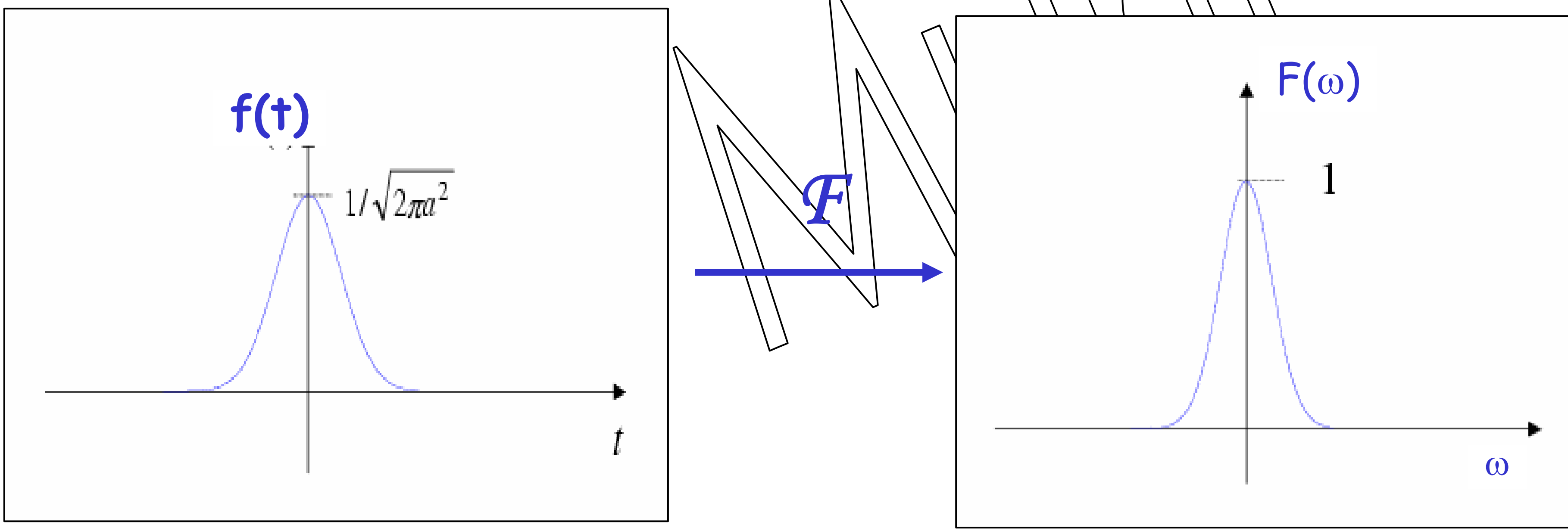


Esempi…

Funzione gaussiana:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(\omega) = e^{-2\omega^2\pi^2\sigma^2}$$



Come calcolare una trasformata di FOURIER ?

1. Tronchiamo l'integrale

da [-∞,+∞] all'intervallo [-τ,+τ], di ampiezza T=2τ, con

τ "sufficientemente" grande.

$$F(u) = \int_{\cancel{-\infty}}^{\cancel{+\infty}} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$

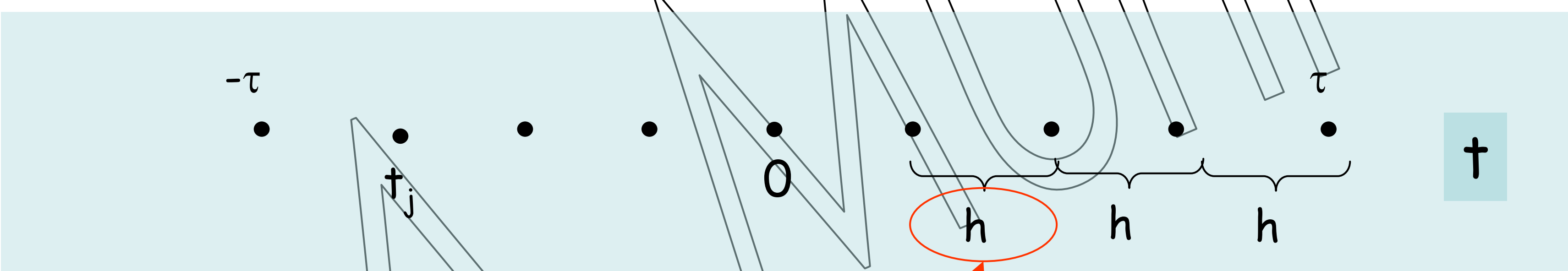
$$F(u) = \int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$

2. Discretizziamo l'integrale

mediante la formula di quadratura trapezoidale composita

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)}$$

su N+1 nodi (N=2m) $\qquad t_j = j\,h \qquad j=-m,\dots,0,\dots m$



dove il passo h è

$$h = \frac{2\tau}{N} = \frac{T}{N} = \frac{\tau}{m}$$

Da:

$$F(u) = \int_{-\tau}^{+\tau} f(t) e^{-2\pi i u t} dt$$

$$\tilde{F}(u) = \frac{h}{2}\left[f(t_{-m}) e^{-2\pi i u t_{-m}} + f(t_m) e^{-2\pi i u t_m} \right] +$$

$$+ h \sum_{j=-m+1}^{m-1} f(t_j) e^{-2\pi i u t_j}$$

3. Valutazione di $\tilde{F}$ nei punti

$$u_k = k\Delta u = \frac{k}{2\tau} = k\frac{1}{T}$$

k=-m,…0,…,m

$$u_k v_j = \frac{k}{2\tau}\frac{2\tau j}{N} = \frac{kj}{N}$$

$$e^{-2\pi i u_k v_j} = e^{\frac{-2\pi i}{N}kj} = w_N^{-kj}$$

$$\tilde{F}(u_k) = \frac{h}{2}\left[f(\overset{-\tau}{t_{-m}})\, \overset{w^{-km}}{e^{-2\pi i u_k t_{-m}}} + f(\overset{\tau}{t_m})\, \overset{w^{km}}{e^{-2\pi i u_k t_m}} \right] +$$

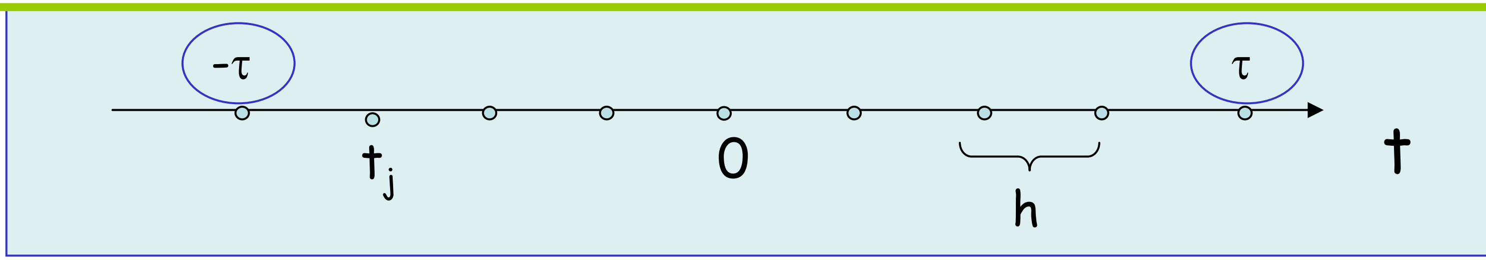
$$+ h \sum_{j=-m+1}^{m-1} f(t_j)\, w_N^{-kj}$$

Poiché $w^{-km} = w^{km}$

(sono esponenziali complessi i cui esponenti differiscono per un multiplo intero di $2\pi i$)

$$\boxed{\tilde{F}(u_k) = h\left\{ \frac{1}{2}\left[f(-\tau) + f(\tau) \right] w_N^{-kj} + \sum_{j=-m+1}^{m-1} f(t_j)\, w_N^{-kj} \right\}}$$

4. Periodicizzazione di f nei punti estremi t = ±τ



poniamo $$f(t_{-m}) = f(t_m) = \frac{1}{2}[f(-\tau) + f(\tau)]$$

$$\boxed{\tilde{F}(u_k) = \frac{T}{N} \sum_{j=-m}^{m} f(t_j)\, w_N^{-kj}}$$

k=-m,…0,…,m

= DFT del vettore <u>f</u> , $f_j = f(v_j)$

Qual è l'errore che si commette approssimando la trasformata di Fourier con la DFT ?

Cosa abbiamo fatto ?

1. sostituzione dell'integrale infinito con uno su un intervallo finito

Errore di troncamento

2. Discretizzazione con formula di quadratura trapezoidale

Errore di discretizzazione

Errore di troncamento

dovuto alla sostituzione dell'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ con l'integrale tra $-\tau$ e $+\tau$

Errore di discretizzazione

dovuto alla formula di quadratura che approssima l'integrale

Teorema

Se F è la FT di f(t): $$F(u) = \mathcal{F}[f(v)]$$

posto Ω=2/T

$$\boxed{F_{\Omega}(u) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(u + l\Omega)}$$

$$\boxed{f_T(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(t + lT)}$$

si ha

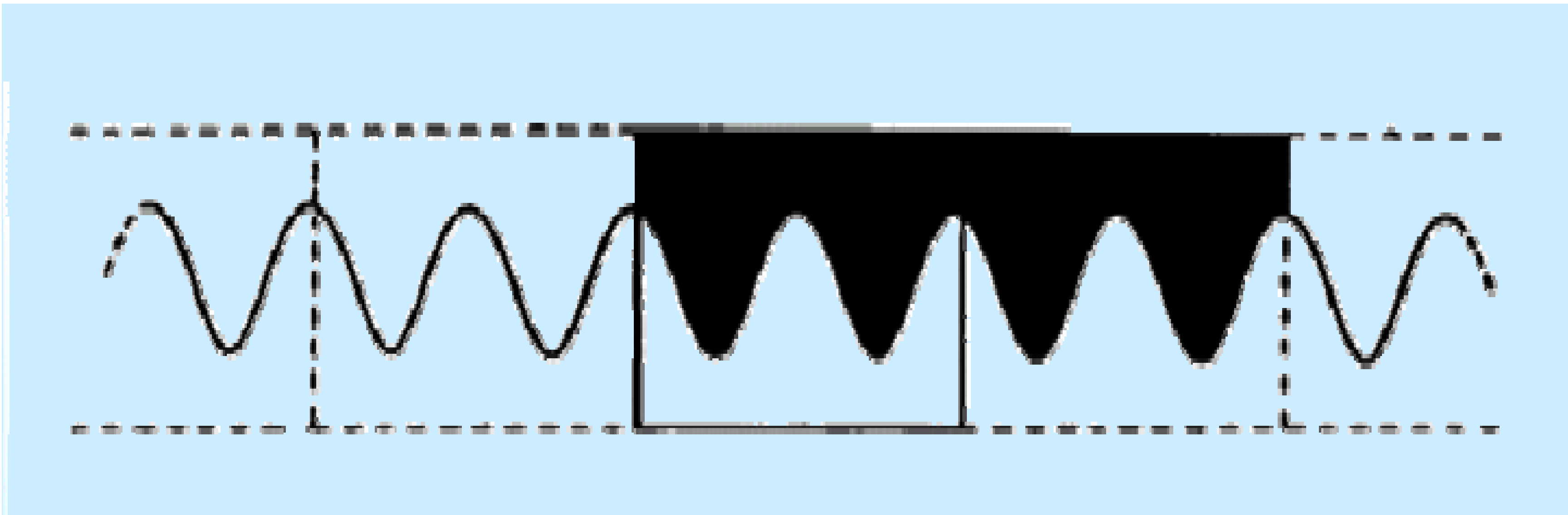
$$F_{\Omega}(k\Delta u) = DFT(f_T(jh))$$

ovvero

j,k= 0,1,…,N-1

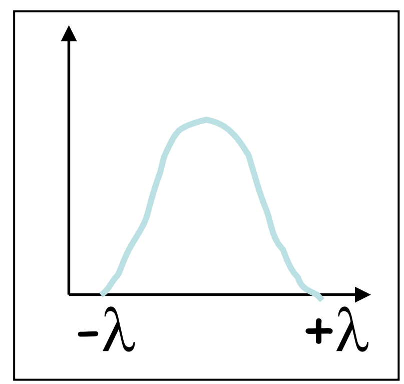
$$F_{\Omega}(u_k) = DFT(f_T(t_j))$$

$f_T(t)$ è la ripetizione periodica di periodo T della restrizione di f(t) all'intervallo $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$



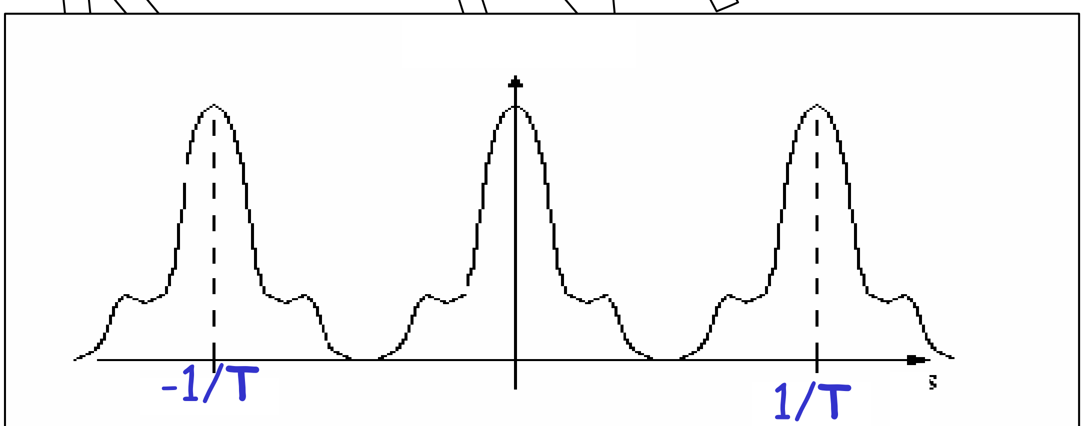
Se *f(t)* è a tempo limitato

$$\boxed{f_T = f}$$



$F_{\Omega}(u)$ è la ripetizione periodica della restrizione di F all'intervallo $\left[-\frac{\Omega}{2},\frac{\Omega}{2}\right]=\left[-\frac{1}{T},\frac{1}{T}\right]$

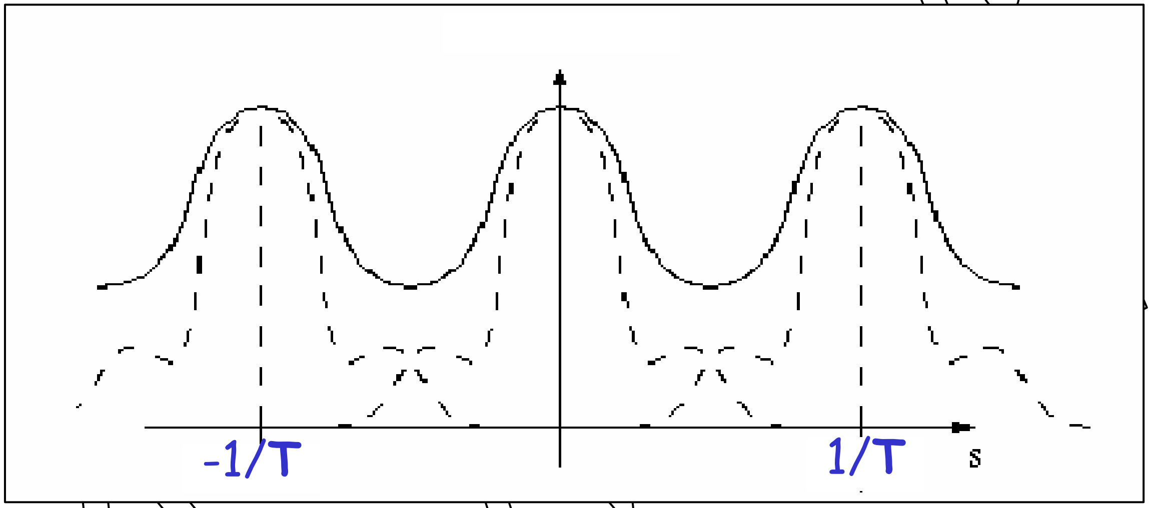
Se la trasformata è nulla al di fuori dell'intervallo [-Ω/2,Ω/2], la periodicizzazione di F non crea sovrapposizioni e distorsioni



altrimenti,

le frequenze si sommano :"ALIASING"

(dal latino "alias" = "copia").



Se $T \rightarrow 0$ (è sufficientemente piccolo), $1/T$ sarà grande abbastanza, tale che $[-1/T, 1/T] \supseteq [-\Omega/2, \Omega/2]$

$T \leq 2/\Omega$

(frequenza di Nyquist).

In tale situazione, l'aliasing non può verificarsi, perché la trasformata viene replicata esattamente laddove termina la precedente funzione.

In particolare …

Se f è una funzione tale che

la sua trasformata di fourier è

A supporto nell'intervallo [-ω_c, ω_c],

(f a banda limitata)

non si ha l'ALIASING!

basta scegliere

$$1/T > 2\omega_c$$

Esempi di aliasing: