

Appendice A

Il calcolo numerico di π

Il problema del calcolo delle cifre di π è stato oggetto di studio sin dall'antichità. Il valore di π ha attirato l'attenzione di molti matematici, dai tempi di Archimede ai nostri giorni e sono state utilizzate diverse metodologie che hanno condotto ad approssimazioni sempre più accurate del numero π ¹.

Di seguito riportiamo alcuni risultati classici, poiché riteniamo utile, dal punto di vista didattico, evidenziare come risultino ancora attuali alcune questioni di calcolo numerico dell'antichità.

Uno dei primi risultati significativi è dovuto ad Archimede (250 a.c.) che riuscì a dimostrare che:

$$3.140845704225352112\dots = \frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.142857142857142857\dots$$

approssimando la lunghezza della circonferenza con raggio unitario con il perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti, arrivando ad utilizzare poligoni fino a 96 lati.

A partire da Leibniz (1688 d.c), il calcolo delle cifre di π si basa sull'approssimazione della funzione arcotangente. Attualmente, negli algoritmi numerici, il modo più accurato per calcolare un'approssimazione di π secondo la precisione del sistema è

$$\pi = 4 \cdot \arctg(1)$$

¹L'interesse che accomuna i matematici antichi e quelli moderni, nei confronti del calcolo dei decimali di π , è legato sia all'uso che ne hanno fatto le civiltà nel corso dei secoli (basti pensare che già i costruttori egizi stabilirono l'inclinazione delle pareti della piramide di Cheope in modo tale che il rapporto tra l'altezza e la larghezza della base corrispondesse a quello esistente tra il raggio e la circonferenza di un cerchio), che a quello che se ne fa attualmente in numerosi campi, tra i quali, ad esempio, la crittografia; d'altra parte, lo stimolo a determinare sempre più cifre di quello sviluppo infinito che rappresenta lo stesso π , è legato anche alle problematiche ancora aperte, che riguardano l'espressione e la sequenza dei decimali del numero. Ci si chiede, ad esempio, se ciascuna delle cifre 0, 1, 2, ..., 9, si ripete infinitamente spesso, o se π è *semplicemente normale in base 10*, nel senso che ogni sua cifra appare ugualmente spesso, in senso asintotico, nel suo sviluppo decimale, oppure se è *normale in base 10*, cioè se ogni blocco di cifre di una fissata lunghezza appare ugualmente spesso, in senso asintotico, nel suo sviluppo decimale, o anche se π è *normale*, intendendo con ciò, che ogni blocco di cifre di una fissata lunghezza appare ugualmente spesso, in senso asintotico, nella sua rappresentazione in una qualsiasi base.

che fa uso dell'approssimazione della funzione arcotangente, considerata come funzione elementare (*built-in*) del compilatore.

Nella tabella seguente riportiamo una breve sintesi dello **sviluppo storico** del calcolo delle cifre di π :

Autore	Anno	Risultato	Cifre corrette
Re Salomone	975 a.c	3.0	1
Archimede	250 a.c.	3.14	3
Aryabhata	499 d.c.	3.1416	4
Fibonacci	1220	3.141818	4
Viète	1593	3.141592653	9
Newton	1665	3.1415926535897932	16
Sharp	1699	3.(72 cifre)	71
Machin	1706	3.(100 cifre)	100
Eulero	1755	3.(20 cifre)	20
Vega	1789	3.(140 cifre)	126
Vega	1794	3.(137 cifre)	136
Ferguson	1946	3.(700 cifre)	620

Tra gli autori indicati in tabella vale la pena evidenziare Eulero, che adottò per primo la lettera greca π e che ottenne il risultato in solo un'ora di calcoli!

Il valore ottenuto da Ferguson nel Luglio del 1946 rappresenta l'ultimo calcolo delle cifre di π eseguito senza usare il calcolatore.

Nella tabella seguente si riportano, invece, alcuni dei risultati ottenuti mediante l'uso del calcolatore.

Autore	Anno	Cifre corrette	Macchina
Ferguson	1947	710	Desk calculator
Ferguson e Wrench	1947	808	Desk calculator
Shants e Wrench Jr	1961	100 265	IBM 7090
Guilloud e Filliatre	1966	250 000	IBM 7030
Guilloud e Dichampt	1967	500 000	CDC 6600
Kanada e Ushiro	1983	10 013 395	Hitachi S-810/20
Kanada et al.	1987	134 214 700	NEC SX-2
Kanada e Takahashi	1999	206 158 430 000	Hitachi SR8000
Kanada et al.	2002	1 241 100 000 000	Hitachi SR8000/MP

In particolare il risultato raggiunto da Y. Kanada e Y. Ushiro nel 1983 è il primo ottenuto mediante *supercalcolatore*. Dal 1980 Yasumasa Kanada è uno dei maggiori esponenti, tra gli interessati al calcolo di π con un elevato numero di cifre. La maggior parte dei suoi calcoli è stata realizzata utilizzando supercalcolatori e basata su moderni

algoritmi iterativi.

Le prime 151 cifre del numero π calcolate su un elaboratore IBM 704 sono riportate qui di seguito²:

$$\pi = 3.1415926535897932385626433832279$$
$$592307816406286208998628034825$$
$$342117067982148086513282306647$$
$$093844609550582231725359408128 \dots$$

²L'ultimo risultato relativo al calcolo delle cifre di π risale al Settembre 2002, quando il Prof. Yasumasa Kanada dell'Università di Tokyo, *Information Technology Center*, insieme ad altri nove collaboratori, realizzò il calcolo di π con 1.241.100.000.000 cifre decimali, superando di più di sei volte il numero delle cifre del loro stesso *Guinness World Record*, costituito da 206.158.430.000 cifre decimali e raggiunto nel 1999. Il calcolo richiese circa 602 ore e fu realizzato con un supercomputer Hitachi (Hitachi SR8000).

A.1 Metodo I - Archimede 240 a.C.

Si consideri una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Detta A_n l'area del poligono regolare con 2^n lati inscritto nella circonferenza, si ha:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

essendo π l'area della cerchio. Il metodo proposto da Archimede è quello di approssimare il valore di π utilizzando l'area del poligono regolare di 2^n lati inscritto nella circonferenza.

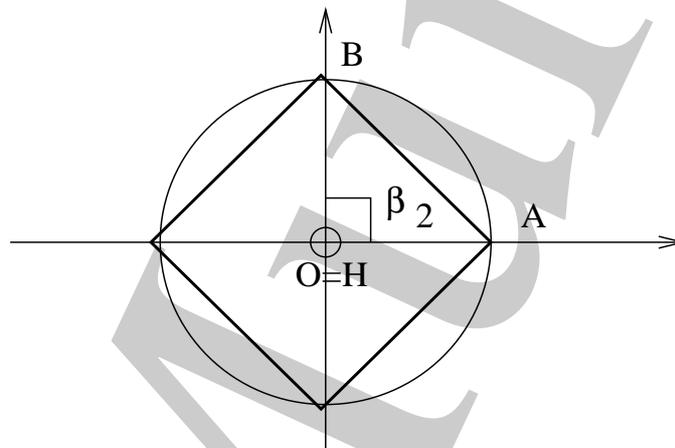


Figura A.1: Quadrato inscritto nella circonferenza di raggio unitario e centro l'origine. L'area del quadrato è $A_2 = 4 \cdot \frac{AO \cdot OB}{2}$.

Come si può anche notare dalla figura A.1, per $n = 2$, A_2 , l'area del quadrato inscritto nella circonferenza può essere calcolata come 4 volte l'area del triangolo AOB .

Quindi:

$$A_2 = 4 \cdot \frac{AO \cdot BH}{2} = 2^2 \cdot \frac{\sin(\beta_2)}{2}$$

essendo $AO = 1$ perchè raggio di una circonferenza unitaria e $BO = BH = \sin(\beta_2)$.

Per $n = 3$, A_3 , l'area dell'ottagono inscritto nella circonferenza, A_3 può essere calcolata come 8 volte l'area del triangolo AOB , come illustrato in figura A.2.

Quindi:

$$A_3 = 8 \cdot \frac{AO \cdot BH}{2} = 2^3 \cdot \frac{1 \cdot \sin(\beta_3)}{2} \quad (AO = 1)$$

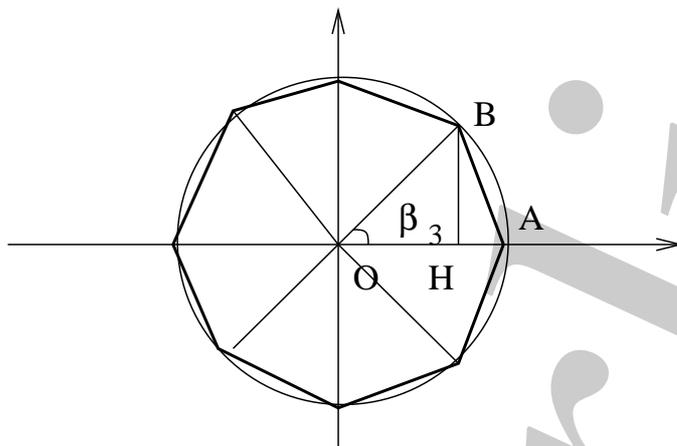


Figura A.2: Per $n = 3$ si ottiene un ottagono inscritto nella circonferenza. L'area dell'ottagono è $A_3 = 8 \cdot \frac{AO \cdot BH}{2}$.

In generale, per un fissato n , l'area del poligono con 2^n lati, A_n , è 2^n volte l'area dei triangoli che lo compongono, e quindi:

$$A_n = \frac{2^n AO \cdot BH}{2} = 2^{n-1} \text{sen}(\beta_n) \quad (\text{A.1})$$

Posto:

$$b_n = 2^{n-1} \quad (\text{A.2})$$

la (1) diventa:

$$A_n = b_n \cdot \text{sen}(\beta_n) \quad (\text{A.3})$$

Il problema del calcolo di A_n è ricondotto al calcolo di $\text{sen}(\beta_n)$.

Nel metodo proposto da Archimede, il valore di $\text{sen}(\beta_n)$ viene calcolato a partire da quello di $\text{sen}(2\beta_n)$ attraverso la formula di bisezione degli angoli:

$$\text{sen}(\beta_n) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\beta_n)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2(2\beta_n)}}{2}} \quad (\text{A.4})$$

dove $0 \leq \beta_n < \pi/2$. Posto $s_n = \text{sen}(\beta_n)$ si ha:

$$s_2 = \text{sen}(\beta_2) = 1$$

e, in generale:

$$\text{sen}(2\beta_n) = \text{sen}\left(2\frac{2\pi}{2^n}\right) = \text{sen}(\beta_{n-1}) = s_{n-1}$$

essendo $\beta_n = \frac{2\pi}{2^n}$. Dalla (4) si ottiene la formula ricorrente:

$$s_2 = 1, \quad s_n = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_{n-1}^2}}{2}}, \quad n > 2$$

Inoltre:

$$b_2 = 2, \quad b_i = 2 \times b_{i-1}, \quad i > 2$$

pertanto la (3), diventa:

$$A_n = b_n \cdot s_n = 2 \cdot b_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_{n-1}^2}}{2}}$$

In conclusione, una stima di π si ottiene attraverso approssimazioni successive ottenute dallo schema iterativo seguente:

$$(5) \quad \begin{cases} b_2 = 2, & s_2 = 1 \\ b_i = 2 \cdot b_{i-1} \\ s_i = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_{i-1}^2}}{2}}, & i > 2 \\ A_i = b_i \cdot s_i, & i > 2 \end{cases}$$

A.1.1 Analisi della stabilità dell'algoritmo

Volendo implementare lo schema iterativo descritto dalla (5) in un sistema aritmetico a precisione finita \mathfrak{S} , bisogna tenere conto della propagazione dell'errore di *round-off*. Consideriamo, quindi, i primi i passi dell'algoritmo di Archimede:

$$\begin{aligned} A_2 &= b_2 \cdot s_2 = 2 \cdot 1 = 2 \\ A_3 &= b_3 \cdot s_3 = 2b_2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_2^2}}{2}} = 2^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \\ A_4 &= b_4 s_4 = 2b_3 s_4 = 2^3 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_3^2}}{2}} = 2^3 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{2}} = 2^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ A_5 &= b_5 s_5 = 2b_4 s_5 = 2^4 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_4^2}}{2}} = 2^3 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}}}{2}} = 2^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \\ &\vdots \\ A_i &= b_i \cdot s_i = 2b_{i-1} \cdot s_i = 2^{i-1} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_{i-1}^2}}{2}} = 2^{i-2} \cdot \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots - \sqrt{2}}}}_{i-2 \text{ radicali innestati}}, \quad i > 2 \end{aligned}$$

Si osserva che al passo i -esimo si moltiplica il termine precedente per $\mu = 2^{i-2}$ che è, quindi, anche il fattore di amplificazione dell'errore di round-off. Lo stesso fattore, in base 10, è:

$$\mu \simeq 10^{0.301 \cdot (i-2)}$$

Segue, allora, che l'algoritmo descritto è **instabile**.

A.1.2 Analisi dell'errore di troncamento analitico

Per dare una stima dell'errore di troncamento che si commette arrestando al passo n il processo iterativo descritto, si utilizza lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione $\text{sen}(x)$.

Lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione $\text{sen}(x)$ è dato da :

$$(6) \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ricordando la (1) si ha:

$$A_n = 2^{n-1} \text{sen} \frac{\pi}{2^{n-1}}$$

e quindi:

$$A_n = 2^{n-1} \left[\frac{\pi}{2^{n-1}} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{8^{n-1}} + \frac{1}{120} \frac{\pi^5}{32^{n-1}} - \dots \right] = \pi - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{4^{n-1}} + \frac{1}{120} \frac{\pi^5}{16^{n-1}} - \dots$$

per l'errore di troncamento analitico si ha:

$$|e_n| = \mathcal{O} \left(\left| \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right| \right) = \mathcal{O} \left(\left| \frac{2}{3} \pi^3 \cdot \frac{1}{4^n} \right| \right) \approx \mathcal{O} \left(21 \cdot \frac{1}{4^n} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{4^n} \right)$$

e:

$$e_{n+1} < \frac{1}{4} e_n$$

A.2 Metodo II - Viete 1593

Si consideri una circonferenza C di centro l'origine e raggio unitario. Indicata con $l(C)$ la lunghezza della circonferenza C , si ha:

$$l(C) = 2 \cdot \pi$$

e:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{2}$$

essendo P_n il perimetro del poligono regolare con 2^n lati inscritto nella circonferenza.

Il metodo proposto da Viete è quello di approssimare il valore di π con $P_n/2$.

Per ogni fissato valore di n , si indichi con a_n la lunghezza del lato del poligono di 2^n lati e con p_n il semiperimetro dello stesso poligono, si ottiene:

$$p_n = \frac{2^n a_n}{2} = 2^{n-1} a_n \tag{A.5}$$

Ricaviamo una relazione che lega il lato a_n del poligono di 2^n lati con il lato a_{n+1} del poligono con 2^{n+1} lati.

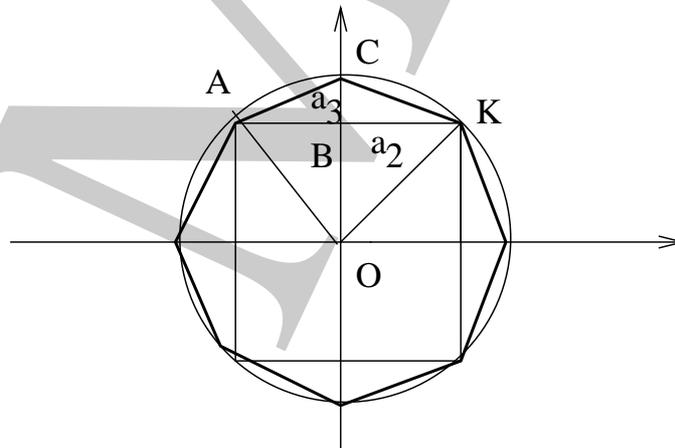


Figura A.3: Metodo di Viete per il calcolo di π . a_2 è il lato del quadrato inscritto e a_3 è il lato dell'ottagono inscritto

Per $n = 2$, consideriamo i triangoli AKC e AOB , come illustrato nella figura A.3. Gli angoli \widehat{AKC} ed \widehat{AOB} sono due angoli, rispettivamente, alla circonferenza e al centro

che insistono sullo stesso arco $(\widehat{AC})^3$ per cui:

$$A\widehat{K}C = \frac{A\widehat{O}B}{2}, \quad A\widehat{O}B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A\widehat{K}C = \frac{\pi}{8}$$

L'angolo $C\widehat{A}K$ è uguale all'angolo $A\widehat{K}C$, essendo angoli alla base di un triangolo isoscele (ACK) ; per cui se $\frac{a_2}{2}$ è un cateto del triangolo ABC , a_3 ne è l'ipotenusa, si ha:

$$a_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = a_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{a_2}{2}.$$

In generale, la relazione che lega il lato a_n del poligono di 2^n lati al lato a_{n+1} del poligono con 2^{n+1} lati è la seguente:

$$a_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{a_n}{2} \quad (\text{A.6})$$

da cui si ottiene :

$$a_n = 2 \cdot a_{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \quad (\text{A.7})$$

Posto $\beta_i = \frac{\pi}{2^i}$ si ha quindi:

$$p_i = 2^{i-1}a_i = 2^{i-1} \cdot 2 \cdot \cos(\beta_{i+1}) \cdot a_{i+1} = 2^i \cos(\beta_{i+1}) \cdot a_{i+1} = p_{i+1} \cdot \cos(\beta_{i+1}) = p_{i+1} \cdot c_{i+1}$$

da cui:

$$p_{i+1} = \frac{p_i}{c_{i+1}}$$

Riferendoci sempre alla figura A.3 il triangolo OAB è isoscele e retto in B e l'angolo $O\widehat{A}B = \frac{\pi}{4}$, per cui:

$$\frac{a_2}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

e:

$$p_2 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Ponendo $c_i = \cos(\beta_i)$ ed utilizzando la formula di bisezione per il coseno:

$$\cos(\beta_i) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\beta_i)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\beta_{i-1})}{2}}$$

$$c_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

³Ricordiamo il seguente risultato di geometria:

Teorema A.2.1. *In una circonferenza, l'angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro che insiste sullo stesso arco.*

e:

$$c_i = \sqrt{\frac{1 + c_{i-1}}{2}}, \quad i \geq 2$$

In conclusione, resta individuata la seguente formula ricorrente:

$$\begin{cases} p_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \\ c_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ p_{i+1} = \frac{p_i}{\sqrt{\frac{1+c_i}{2}}}, \quad i \geq 2 \end{cases}$$

A.2.1 Analisi della stabilità dell'algoritmo

Essendo:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < c_i = \cos\left(\frac{\pi}{2^i}\right) < 1, \quad i \geq 2$$

e quindi

$$1 < \frac{1}{c_i} < \sqrt{2}$$

cioè il fattore di amplificazione dell'errore nella formula di ricorrenza

$$p_{i+1} = \frac{p_i}{c_{i+1}}$$

è limitato e quindi il metodo di Viete per il calcolo di π è **stabile**.

A.2.2 Analisi dell'errore di troncamento analitico

Per determinare una stima dell'errore di troncamento analitico commesso ad ogni passo n si osserva che:

$$a_n = 2 \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow p_n = 2^{n-1} a_n = 2^n \text{sen} \frac{\pi}{2^n}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione seno, calcolato in $\frac{\pi}{2^n}$, si ha:

$$p_n = 2^n \left[\frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{8^n} + \frac{1}{120} \frac{\pi^5}{32^n} - \dots \right] = \pi - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{4^n} + \frac{1}{120} \frac{\pi^5}{16^n} - \dots$$

da cui:

$$|e_n| < \left| \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{4^n} + \frac{1}{120} \frac{\pi^5}{8^n} - \dots \right| = \mathcal{O} \left(\frac{1}{6} \pi^3 \cdot \frac{1}{4^n} \right) \approx \mathcal{O} \left(5.2 \cdot \frac{1}{4^n} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{4^n} \right)$$

A.3 Metodo IV - Leibniz 1688

Il valore di π è ottenuto dallo sviluppo in serie di Mc Laurin⁴ della funzione $\arctg(x)$:

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Per $x=1$, si ha infatti:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

indicata con q_i la somma parziale dei primi i addendi è possibile scrivere la formula ricorrente seguente:

$$(1) \quad q_1 = 1, \quad q_i = q_{i-1} + \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1}$$

dove $i = 2, \dots, n-1$.

A.3.1 Analisi della stabilità dell'algoritmo

In un sistema aritmetico a precisione finita \mathfrak{S} , l'errore di round-off E_n , nel calcolo di una somma di n numeri x_i , si può stimare attraverso la formula seguente:

$$|E_n| \leq (n-1)u \sum_{i=1}^n |x_i| + \mathcal{O}(u^2), \quad \text{con } u \text{ massima accuratezza}$$

e, quindi, cresce linearmente con il numero degli addendi, n .

A.3.2 Analisi dell'errore di troncamento analitico

Utilizzando la formula ricorrente espressa nella (1), si ricava che l'errore di troncamento analitico è:

$$|e_n| = \mathcal{O}((2n)^{-1})$$

⁴Al momento non siamo interessati al modo in cui è calcolata la funzione $\arctg(\cdot)$ nei compilatori dei calcolatori. Possiamo solo accennare che la sua valutazione non viene eseguita mediante sviluppo in serie di Mc Laurin. A tale proposito si veda il **Capitolo 7**.

A.4 Metodo VII - Integrazione Numerica

Il valore di π è calcolato attraverso una formula di quadratura trapezoidale. È possibile approssimare $\pi/4$ con la somma s_n delle aree dei trapezi di altezza $\frac{1}{n}$ inscritti in un quarto di circonferenza di raggio unitario.

Infatti la funzione che definisce un arco di circonferenza unitaria nel I quadrante è:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Per cui integrando numericamente $f(x)$ in $[0, 1]$ si ottiene che:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \approx \frac{\pi}{4} \quad (\text{A.8})$$

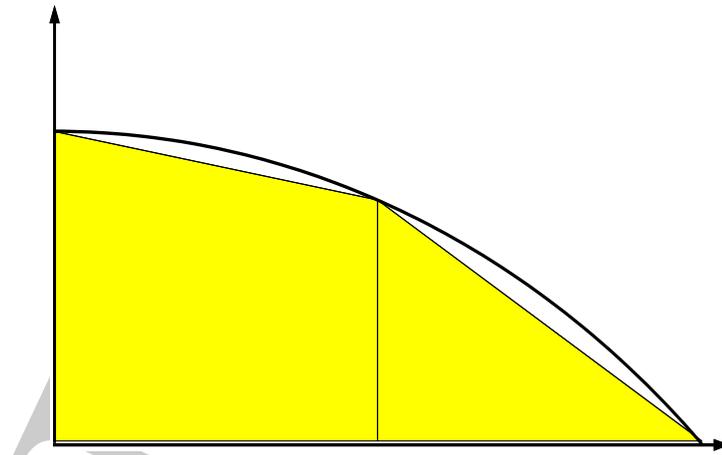


Figura A.4: Metodo di integrazione numerica

Utilizzando la formula di quadratura trapezoidale per il calcolo numerico dell'integrale (A.8) si ottiene, per s_n , l'espressione seguente:

$$s_n = \frac{1}{2n} [1 + 2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{n-1}]$$

dove:

$$b_i = \sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}$$

A.4.1 Analisi della stabilità dell'algoritmo

In un sistema aritmetico a precisione finita \mathfrak{S} , l'errore di round-off E_n , nel calcolo della somma s_n , si può stimare nel modo seguente:

$$|E_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(n-1)u \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + \mathcal{O}(u^2)$$

e, quindi, cresce linearmente con n , numero degli addendi.

A.4.2 Analisi dell'errore di troncamento analitico

L'errore di troncamento analitico che si commette è:

$$|e_n| < k \cdot n^{-3/2}$$

essendo k una costante positiva ed e_n maggiorato dalla stima asintotica dei b_n .

A.5 Algoritmi implementati in FORTRAN

Di seguito vengono proposti alcuni programmi in Fortran relativi ad i metodi descritti nel paragrafo precedente. In particolare, nei primi due, è richiesta, da parte dell'utente, l'assegnazione di n , logaritmo in base due del numero di lati del poligono inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio uno. I test eseguiti hanno l'obiettivo di mettere in evidenza gli effetti della propagazione dell'errore sul risultato finale.

Come vedremo, utilizzando il metodo di Archimede, per $n = 7$ il risultato è accurato a 5 cifre significative, ma già per $n = 15$, il risultato calcolato è completamente errato.

Ciò a causa dell'instabilità dell'algoritmo. Con il metodo di Viete, invece, l'errore introdotto si mantiene limitato, e si ottiene un valore approssimato di π corretto a 7 cifre significative approssimando la lunghezza della circonferenza unitaria con il semiperimetro del poligono con 16 lati. Infine, se si utilizza il metodo di Leibniz, sebbene l'algoritmo sia stabile, a causa della lenta velocità di convergenza dello sviluppo in serie di McLaurin, sono necessari almeno 500000 termini per raggiungere la stessa accuratezza del metodo di Viete con 16 passi.

Programma Fortran per il calcolo di π con il metodo di Archimede

```
=====
      program Calcolo Metodo I
      C Fase di dichiarazione delle variabili.
        integer n,step
        real p,bi,si,error,pi,error1,n1
      C Stampa a video del problema da risolvere
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) '      Calcolo di PI'
      write(*,*) '      (1) pi=b(i-1)s(i-1)'
      write(*,*) '      (2) s(i)=sqrt(1-sqrt(1-s(i-1)^2))/2'
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) 'Inserire n'
      read*,n
      print*,n
      C Fase di Calcolo
        bi=2.
        si=1.
        step=0
        p=0
5      continue
        p=bi*si
        bi=2*bi
        si=sqrt((1-sqrt(1-si**2))/2)
```

```

    step=step+1
C Terminazione della fase di Calcolo.
    if(step.le.n) goto 5
    n1=n
    error=4**n1
    error=21*1/error
    pi=4*atan(1.)
    error1=(pi-p)/pi
    print*, 'PI calcolato=',p
    print*, 'Errore analitico stimato < di',error
C Confronto con la funzione di libreria
    print*, 'PI mediante funzioni built-in =',pi
    print*, 'Errore relativo',error1
    stop
end

```

Prova di esecuzione

Consideriamo alcune prove di esecuzione dell'algoritmo descritto nel Metodo di Archimede.

Calcolo di PI

- (1) $pi=b(i-1)s(i-1)$
 - (2) $s(i)=\sqrt{(1-\sqrt{(1-s(i-1))^2})/2}$
-

Inserire n

7

```

PI calcolato= 3.141600132
Errore analitico stimato < di 0.00128173828
PI mediante funzione built-in= 3.14159274
Errore relativo 0.235262069E-05

```

Calcolo di PI

- (1) $pi=b(i-1)s(i-1)$
 - (2) $s(i)=\sqrt{(1-\sqrt{(1-s(i-1))^2})/2}$
-

Inserire n

13

```
PI calcolato= 2.82842708(*)  
Errore analitico stimato < di 3.12924385E-07  
PI mediante funzioni built-in= 3.14159274  
Errore relativo 0.0996837243
```

=====
(*) Il risultato della seconda esecuzione è del tutto errato. Dunque, nel sistema aritmetico del calcolatore, che esegue le operazioni in registri a doppia precisione, per $n = 13$ l'errore di *round off* è del 100% (algoritmo instabile).

Programma Fortran per il calcolo di π con il metodo di Viete

```

=====
      program Calcolo Metodo II
      C Fase di dichiarazione delle variabili.
        integer n,step
        double precision p,bi,si,error,pi,error1,n1
      C Stampa a video del problema da risolvere
      write(*,*) '
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) '      Calcolo di PI'
      write(*,*) '      (1)  pi=p(i-1)/ci'
      write(*,*) '      (2)  c(i)=sqrt(1-c(i-1))/2 )'
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) '
      write(*,*) 'Inserire n'
      read*,n
      C Fase di Calcolo
      ci=0.
      per=2.
      step=1
      p=2.

5    continue

      step=step+1
      ci=sqrt((1+ci)/2)
      p=per/ci
      per=p
      C Terminazione della fase di Calcolo.
      if(step.le.n) goto 5
      n1=n
      error=4**n1
      print*, 'errore=',error
      error=5.2*1/error
      pi=4*atan(1.)
      error1=(pi-p)/pi
      print*, 'PI calcolato=',p
      print*, 'Errore analitico stimato < di',error
      C Confronto con la funzione di libreria
      print*, 'PI mediante funzioni built-in =',pi
      print*, 'Errore relativo',error1
      stop
      end
=====

```

Prova di esecuzione

Consideriamo alcune prove di esecuzione dell'algoritmo descritto nel Metodo di Viete.

```
=====
Calcolo di PI
```

```
(1) pi=p(i-1)/ci
(2) c(i)=sqrt(1-c(i-1))/2 )
```

```
-----
Inserire n
```

```
7
```

```
PI calcolato= 3.141513586044312
Errore analitico stimato < di 3.1738281250000001E-04
PI mediante funzioni built-in = 3.141592741012573
Errore relativo 0.25195808237132019E-04
=====
```

```
-----
Calcolo di PI
```

```
(1) pi=p(i-1)/ci
(2) c(i)=sqrt(1-c(i-1))/2 )
```

```
-----
Inserire n
```

```
16
```

```
PI calcolato= 3.141592502593994
Errore analitico stimato < di 1.2107193470001221E-09
PI mediante funzioni built-in = 3.141592741012573
Errore relativo 0.75890988666060292E-07
=====
```

```
-----
Calcolo di PI
```

```
(1) pi=p(i-1)/ci
(2) c(i)=sqrt(1-c(i-1))/2 )
```

```
-----
Inserire n
```

```
30
```

```
PI calcolato= 3.141592502593994
Errore analitico stimato < di 4.5102810375396986E-18
PI mediante funzioni built-in = 3.141592741012573
Errore relativo 7.5890988666060292E-08
=====
```

Programma Fortran per il calcolo di π con il metodo di Leibniz

```

=====
      program Calcolo Metodo IV strategia 1

C Fase di dichiarazione delle variabili.

      integer z
      real p,i,error,pi,error1,n1,step,n

C Stampa a video del problema da risolvere

      write(*,*) '
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) '      Calcolo di PI
      write(*,*) '      Sviluppo in serie di Taylor di arctg(x)
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) '

      write(*,*) 'Inserire ordine dello sviluppo'
      read*,n

C Fase di Calcolo

      qi=1.
      step=1

5   continue

      step=step+1
      i=(-1)**(step-1)
      i=i/(2*step-1)
      qi=qi+i

C Terminazione della fase di Calcolo.

      if(step.le.n-1) goto 5
      p=4*qi
      n1=n
      error=1/n1
      error=2*error
      pi=4*atan(1.)
      error1=(pi-p)/pi
      print*, 'PI calcolato=',p
      print*, 'Errore analitico stimato < di',error

```

C Confronto con la funzione di libreria

```

print*, 'PI mediante funzioni built-in =',pi
print*, 'Errore relativo',error1
stop
end

```

Prova di esecuzione

Calcolo di PI

Sviluppo in serie di Taylor di arctg(x)

Inserire ordine dello sviluppo

70

PI calcolato= 3.127307177

Errore analitico stimato < di 0.2857142873E-01

PI mediante funzioni built-in = 3.141592741

Errore relativo 0.4547236487E-02

Calcolo di PI

Sviluppo in serie di Taylor di arctg(x)

Inserire ordine dello sviluppo

200

PI calcolato= 3.136592627

Errore analitico stimato < di 0.9999999776E-02

PI mediante funzioni built-in = 3.141592741

Errore relativo 0.1591585809E-02

Calcolo di PI

Sviluppo in serie di Taylor di arctg(x)

Inserire ordine dello sviluppo

700

PI calcolato= 3.140165091
Errore analitico stimato < di 0.2857142827E-02
PI mediante funzioni built-in= 3.141592741
Errore relativo 0.4544352414E-03

=====

=====

Calcolo di PI
Sviluppo in serie di Taylor di arctg(x)

Inserire ordine dello sviluppo
500000
PI calcolato= 3.141593933
Errore analitico stimato < di 0.3999999990E-05
PI mediante funzioni built-in = 3.141592741
Errore relativo 0.3794549457E-06

=====