Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Informatica - Prof. L. D'Amore

a.a. 2008/2009

Fitting di dati con `matlab`

Costruzione, valutazione e rappresentazione, mediante `matlab`, di un polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Procedimento 1 Realizzare un m-file in cui eseguire le seguenti istruzioni:

1. Scelta del **grado** del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, ad esempio $n = 1$;
2. scelta del **numero dei nodi**, ad es. $m = 10$;
3. costruzione del vettore dei **nodi**, ad es. $\mathtt{x} = [\mathtt{1:1:10}]$;
4. scelta delle **ordinate corrispondenti ai nodi**, ad es.

$$\mathtt{y} = [\mathtt{2 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 23 \quad 24 \quad 48 \quad 56}]$$

5. costruzione del vettore dei **punti di valutazione**, ad es. $\mathtt{xi} = [\mathtt{0:0.1:10}]$;
6. **costruzione** del polinomio di grado n, di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati:

$$\mathtt{c1} = \mathtt{polyfit(x,y,n)}$$

   Tale funzione restituisce i coefficienti del polinomio, memorizzati nell'array $c1$ *in ordine di potenze decrescenti*;
7. **valutazione** del polinomio nei punti xi

$$\mathtt{yi1} = \mathtt{polyval(c1,xi)};$$

8. **grafico** del polinomio costruito e confronto con le coppie $(x(k), y(k))_{k=1,\ldots,m}$

$$\mathtt{plot(x,y,'g*',xi,yi1,'bo')}$$

Procedimento 2 Realizzare uno script `matlab` in cui eseguire le seguenti istruzioni:

1. **costruzione** della **matrice** del sistema di equazioni normali, ad es.

$$\begin{aligned} \mathtt{a} &= [\mathtt{ones(m,1)} \quad \mathtt{x'}] \\ \mathtt{c} &= (\mathtt{a'}) * \mathtt{a} \end{aligned}$$

2. **costruzione** del **vettore dei termini noti**

$$\texttt{b} = (\texttt{a}') * \texttt{y}'$$

3. **risoluzione del sistema di equazioni normali**; vettore dei coefficienti:

$$\texttt{coeff} = \texttt{c} \setminus \texttt{b}$$

   Si osserva che i coefficienti sono determinati **secondo l'ordine delle potenze crescenti**;

4. **inversione dell'ordine delle componenti del vettore dei coefficienti**

$$\texttt{coeff\_fl} = \texttt{flipud}(\texttt{coeff})$$

5. **valutazione del polinomio costruito**

$$\texttt{yi2} = \texttt{polyval}(\texttt{coeff\_fl}, \texttt{xi});$$

6. **rappresentazione grafica** e **confronto** con i risultati ottenuti, mediante la funzione `polyfit` di `matlab`, nel **Procedimento 1**:

```
hold  on
plot(xi,yi2,'rx')
```

7. **Quesito**: Eserguire una serie di test al variare di n, in particolare ponendo $n = 1$, $n = 2$, $n < m - 1$, $n = m - 1$, $n > m - 1$.
   Quale modello di fitting costruisce la funzione `polyfit`, in base al grado, n, della funzione che realizza il *fitting* dei dati? (`help polyfit`)

Esercizio 1 Se il volume di un campione di gas ideale è tenuto costante allora la sua temperatura T è una funzione della sua pressione p:

$$T(p) = a + bp$$

- costruire il polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, **scegliendone opportunamente il grado in base alla dipendenza della T dalla variabile indipendente** p, a partire dalle seguenti misure:

p	65	75	85	95	105
T	-20	17	42	94	127

- Valutare l'affidabilità delle misure T_i confrontando i valori assunti dal modello di fitting nei nodi, con i valori di T in tabella.
- Motivare la scelta del modello di fitting, ovvero il *grado* del polinomio di migliore approssimazione, scelto per descrivere i campioni.

Esercizio 2 Assegnati i campioni:

x	-4	-2	-1	0	1	3	4	6
y	-35.1	15.1	15.9	8.9	.1	.1	21.1	135

si supponga che le ordinate siano generate da una funzione di cui non sia nota l'espressione analitica e che tali valutazioni siano acquisite mediante uno strumento per cui risultino affette da errore, diventando, così:

```
>> ynoise=y+6*rand(1,8)
```

(a) Assumendo che i dati siano le coppie

$$(\texttt{x(i)}, \texttt{ynoise(i)})_{\texttt{i}=1,\dots,8}$$

i. calcolare i coefficienti del polinomio p, di terzo grado, che risulti *di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati*, specificando la funzione `matlab` utilizzata;

ii. calcolare i coefficienti dell'unico polinomio di Lagrange, q, *interpolante i nodi assegnati*, specificandone il grado e la funzione `matlab` utilizzata.

(b) Valutare, in corrispondenza delle ascisse assegnate, i due modelli definiti a partire dai dati perturbati specificando la funzione `matlab` utilizzata.

(c) Calcolare, utilizzando `matlab`, gli errori relativi, in norma infinito, commessi nell'approssimazione delle ordinate $\underline{y} = (y_i)_{i=1,\dots,8}$, non affette da errore, mediante i due modelli:

$$E_1 = \frac{\|\underline{p} - \underline{y}\|_\infty}{\|\underline{y}\|_\infty}$$

$$E_2 = \frac{\|\underline{q} - \underline{y}\|_\infty}{\|\underline{y}\|_\infty}$$

con $\underline{p} = (p(x_i))_{i=1,\dots,8}$ e $\underline{q} = (q(x_i))_{i=1,\dots,8}$.

(d) Confrontando gli errori calcolati al punto precedente, quale dei due modelli risulta più attendibile, per il *fitting* dei dati, ovvero per l'approssimazione della funzione che li ha generati? Questo risultato vale in generale?

Esercizio 3 Sia assegnato un insieme di nodi x, $x = [1 : 6]$ e di valori corrispondenti: $y = [10 \quad 5.9 \quad 0.89 \quad -0.14 \quad -1.07 \quad 0.84]$. Si costruisca un array di punti di valutazione, xi, equispaziati tra 1 e 6 (utilizzare la funzione `matlab linspace`).

Attraverso le istruzioni:

```
>> plot(x,y,'o'); hold on
for i=1:6
    ... % calcolo dei coefficienti del polinomio di grado i
    ... % valutazione  in corrispondenza dei punti xi
    yi=polyval(c,xi);
    plot(xi,yi)
end
hold off
```

dedurre il grado del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati che descrive in maniera piu' attendibile i campioni. Verificare l'attendibilità dei modelli, attraverso il calcolo degli errori relativi.

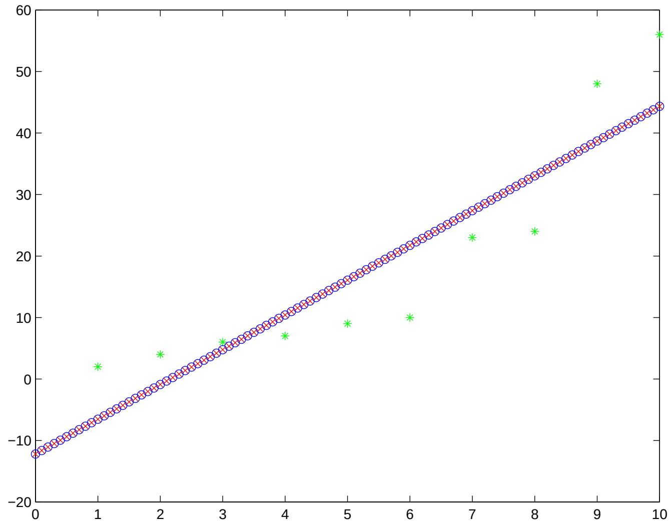

Figura 1: **Rette di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati ((o) e (+)) e confronto con le coppie** $(x(k), y(k))_{k=1,m}$ **(*)**