Cognome:

Nome:

Matricola:

Corso di laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Prof.ssa L. D'Amore

12 Dicembre 2008

Esercizi di riepilogo tipo prova d'esame

1. Si consideri il sistema aritmetico f. p. a precisione finita:

$$\Im : \quad \beta = 10, \quad t = 5, \quad e_{min} = -9 \quad e_{max} = 9.$$

   (a) Calcolare, in $\Im$, nell'ipotesi in cui $\Im$ sia caratterizzato dalla tecnica dell'arrotondamento, i numeri seguenti:
      i. l'epsilon macchina, ϵ;
      ii. la massima accuratezza relativa u;
      iii. $\epsilon_x \in F$, epsilon macchina relativo a $x = 0.326718 \times 10^2$.

   (b) Illustrare, brevemente, il significato di ciascuna grandezza, in un sistema aritmetico a precisione finita.

2. Si supponga assegnata una matrice T, quadrata, di dimensione n, *tridiagonale*.

   (a) Qual è la complessità di tempo *asintotica*, richiesta da un algoritmo che esegue la fattorizzazione LU, senza pivoting, sfruttando la particolare struttura della matrice?

   (b) Quale sarebbe la complessità di tempo *asintotica* per la risoluzione di un sistema lineare avente T come matrice dei coefficienti?

   (c) Quale sarebbe la complessità di tempo *asintotica* per il calcolo dell'inversa di T?

3. Sia assegnato l'insieme di dati:

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,n} \tag{1}$$

   (a) Qual è il grado dell'unico polinomio di Lagrange, interpolante gli n nodi?

   (b) Si consideri la formula di Newton per la costruzione del polinomio interpolante di Lagrange. Si descriva, brevemente, almeno uno schema di costruzione per la **Tavola delle differenze divise**.

   (c) Quali posizioni occupano, nella tavola, i coefficienti del polinomio interpolante?

   (d) Calcolare la complessità di tempo richiesta dall'algoritmo per il calcolo dei coefficienti.

   (e) Descrivere una strategia implementativa efficiente, in termini di complessità di spazio, per la memorizzazione dei coefficienti del polinomio interpolante.

(f) Se si aggiunge un nodo all'insieme dei dati, come si rappresenta la formula di Newton per il polinomio di Lagrange, interpolante gli $n+1$ nodi, in funzione del polinomio interpolante gli n nodi?

---

4. Calcolare l'indice di condizionamento relativo, $C(f,x)$, della funzione f:

$$f(x) = ln(x) \quad x > 0,$$

e specificare se il problema della valutazione di f in $x = 1.05$ risulta ben condizionato.

---

5. Considerato un sistema aritmetico a precisione finita:

$$\Im: \quad \beta = 10, \quad t = 4, \quad e_{min} = -12 \quad e_{max} = 12$$

- eseguire la sottrazione f.p. tra i due numeri seguenti:

$$0.1234 \times 10^3 \quad \text{e} \quad 0.1233 \times 10^3$$

- Quante cifre significative presenta il risultato, ovvero quante se ne perdono nella rappresentazione del risultato?
- Si spieghi, brevemente, il fenomeno della cancellazione.

---

6. Sia assegnato l'integrale definito:

$$\int_0^1 x^2 \, dx \tag{2}$$

(a) Si fornisca la definizione di **formula di quadratura** e di **formula di quadratura composita**; si descriva, in particolare, come si rappresenta la **formula trapezoidale composita** su 4 sottointervalli dell'intervallo $[0,1]$, specificando il passo ed i punti di discretizzazione dell'intervallo.

(b) Descrivere brevemente la strategia adattativa *locale*, specificando, in particolare, in che ordine avverrebbe la memorizzazione degli intervalli, in una struttura dati di tipo pila, in base al valore che la stima dell'errore può assumere in ciascun sottointervallo.

(c) Illustrare un opportuno criterio di arresto per l'implementazione della strategia descritta, motivando la scelta delle condizioni coinvolte (efficienza, accuratezza, ...).

(d) Implementare una strategia di tipo adattativo. In particolare, se si implementa una strategia adattativa locale, assegnando, in input, una tolleranza $tol = 10^{-5}$ ed un massimo numero di valutazioni uguale a 1000, riportare nella tabella seguente gli estremi dei primi 5 intervalli esaminati ed i corrispondenti valori numerici dell'errore di discretizzazione $E[f]$ e della tolleranza locale. Rappresentare i risultati arrotondati alle prime 5 cifre significative.

intervallo	$E[f]$	*tolleranza locale*

7. Si consideri assegnato l'insieme

$$K = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}\}$$

con i nodi x_i, $i = 1, \ldots, n$ appartenenti all'asse reale, $x_0 = -\infty$ e $x_{n+1} = +\infty$.

   (a) Quali sono le caratteristiche di cui deve godere una funzione s, definita su tutto l'asse reale, perché soddisfi la definizione di **spline cubica**?

   (b) Sotto quali condizioni una spline cubica acquisisce l'attributo di **naturale**?

   (c) Quali condizioni deve soddisfare perché sia **interpolante** i punti

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,n}\,?$$

8. Assegnata la seguente matrice quadrata U *triangolare superiore*:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sfruttando elementi di software eventualmente già realizzati,

- calcolare l'inversa U^{-1}di U e scrivere il risultato.
- Descrivere brevemente l'algoritmo implementato al passo precedente, per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata, di dimensione n, *triangolare superiore*. Stimare la complessità computazionale dell'algoritmo implementato.
- Calcolare, specificando se si utilizza `Matlab` o un elemento di software sviluppato in laboratorio, l'indice di condizionamento di U, $\mu_\infty(U)$.
- Si consideri un sistema di equazioni lineari avente U come matrice dei coefficienti; supponendo che il vettore dei termini noti, b, sia perturbato e che la sua approssimazione sia corretta a p cifre significative, ovvero

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \simeq 10^{1-p} \tag{3}$$

  supponendo, inoltre, che i coefficienti della matrice U siano affetti da errore trascurabile ($\Rightarrow \triangle U = 0$),

  – rappresentare $\mu_\infty(U)$ in notazione floating point normalizzata, in un sistema aritmetico a precisione finita caratterizzato dai parametri seguenti:

$$F = (\beta = 10, t = 4, emin = -4, emax = 4)$$

  – esprimere l'errore relativo

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

  in funzione di $\mu_\infty(U)$ e della (3) e stimare il numero di cifre significative corrette nell'approssimazione della soluzione del sistema.

9. Si consideri l'integrale definito:

$$\mathtt{I[f]} = \int_0^2 (\mathtt{x} - 1)^2 \, \mathtt{dx} \tag{4}$$

(a) Scrivere l'espressione della formula trapezoidale composita su $m = 2$ e $m = 4$ sottointervalli, per il calcolo numerico dell'integrale $I[f]$.

(b) Fornire una stima calcolabile dell'errore di discretizzazione della formula $T_4[f]$, $E_4[f]$, sull'intervallo $[0, 2]$.

(c) Le formule di quadratura $T_2[f]$ e $T_4[f]$ sono di tipo innestato? Quale vantaggio computazionale offre l'utilizzo di formule di tipo innestato?

---

10. Sia assegnato l'insieme di dati:

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,5} \tag{5}$$

- Rappresentare la spline cubica naturale interpolante i dati (5), in un intervallo del tipo

$$[x_i, x_{i+1}], \qquad i = 1, \ldots, 4$$

utilizzando la formula di Newton per il polinomio interpolante di Hermite, e negli intervalli $(-\infty, x_1]$, $[x_n, +\infty)$.

- Se

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,5} = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}, \tag{6}$$

calcolare i coefficienti della spline cubica naturale interpolante, in almeno 2 intervalli, del tipo $[x_i, x_{i+1}]$, sfruttando i risultati forniti da un elemento di software matematico già sviluppato in laboratorio.

- Indicare, sul grafico riportato in Fig. 1, i valori della spline assunti in corrispondenza dei punti:

$$z_1 = -1.5, \quad z_2 = -0.5 \quad z_3 = 0.5 \quad z_4 = 1.5$$

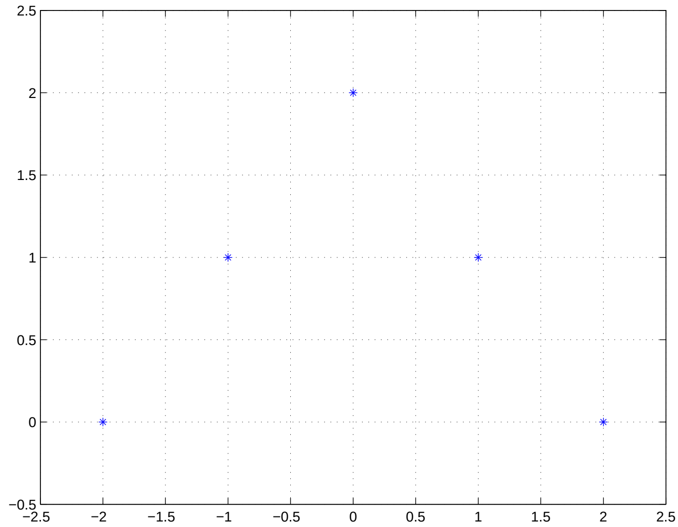

Figura 1:

- Rappresentare, in Fig. 1, l'andamento della spline costruita nell'intervallo $[-2, 2]$.

---

11. Sviluppare un elemento di software matematico, che implementi il metodo di Archimede, per il calcolo di π.

- Assegnato n, con 2^n numero di lati del poligono, stimare l'errore di troncamento analitico commesso nell'approssimazione di π.
- Calcolare l'errore relativo commesso nell'approssimazione di π, confrontando il valore restituito dall'elemento di software elaborato con quello ottenuto utilizzando la funzione *built-in* `atan`, calcolando π come:

$$\pi = 4 * \texttt{atan}(1.)$$

- Descrivere la formula ricorrente con cui si calcola l'approssimazione di π mediante il metodo di Archimede.
- L'algoritmo descritto può ritenersi stabile? Motivare la risposta fornendo una stima del fattore di amplificazione dell'errore presente sul dato, dopo 13 iterazioni.

---

12. Assegnati i campioni:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	13	16	19	22	25	28

si supponga che le ordinate siano generate da una funzione di cui non sia nota l'espressione analitica e che tali valutazioni siano acquisite mediante uno strumento per cui risultino affette da errore, diventando, così:

```
>> ynoise=y+randn(1,length(x))
```

(a) Assumendo che i dati siano le coppie

$$(\texttt{x(i)}, \texttt{ynoise(i)})_{i=1,\dots,8}$$

i. calcolare i coefficienti della parabola p, *di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati*, specificando la funzione `matlab` utilizzata;

ii. calcolare i coefficienti dell'unico polinomio di Lagrange, q, *interpolante i nodi assegnati*, specificandone il grado e la funzione `matlab` utilizzata.

iii. calcolare, utilizzando un elemento di software matematico già sviluppato, i coefficienti della spline s *cubica naturale interpolante* i nodi assegnati. Descrivere, brevemente l'algoritmo implementato.

(b) Valutare, in corrispondenza delle ascisse, i tre modelli definiti a partire dai dati perturbati, specificando, in particolare, l'algoritmo di valutazione o le funzioni `matlab` utilizzate.

(c) Calcolare, utilizzando `matlab`, gli errori relativi, in norma infinito, commessi nell'approssimazione delle ordinate $\underline{y} = (y_i)_{i=1,\dots,8}$, non affette da errore, mediante i due modelli:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\|\underline{p} - \underline{y}\|_\infty}{\|\underline{y}\|_\infty} \\ E_2 &= \frac{\|\underline{q} - \underline{y}\|_\infty}{\|\underline{y}\|_\infty} \\ E_3 &= \frac{\|\underline{s} - \underline{y}\|_\infty}{\|\underline{y}\|_\infty} \end{aligned}$$

con $\underline{p} = (p(x_i))_{i=1,\dots,7}$, $\underline{q} = (q(x_i))_{i=1,\dots,7}$, $\underline{s} = (s(x_i))_{i=1,\dots,7}$.

(d) Confrontando gli errori calcolati al punto precedente, quale dei tre modelli risulta più attendibile, per il *fitting* dei dati, ovvero per l'approssimazione della funzione che li ha generati? Questo risultato vale in generale?

(e) **Facoltativo** Valutando, in corrispondenza dei punti

$$t = 0 : 0.1 : 10$$

i tre modelli, tracciarne il grafico riportando, in figura, anche le coppie $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$.

13. Sia assegnata la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 12 & 15 \\ 2 & 47 & 18 & -10 \\ 12 & 18 & 25 & 21 \\ 15 & -10 & 21 & 47 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che la matrice A è *definita positiva*, applicando il **criterio di Sylvester**. Enunciare il criterio e specificare se la verifica è eseguita utilizzando funzioni del `matlab` o un elemento di software già sviluppato.

(b) Descrivere l'algoritmo *più efficiente* per fattorizzare la matrice nel prodotto di due matrici triangolari, illustrando, in particolare, in che modo si sfrutta la struttura della matrice sia nelle operazioni che lo costituiscono che nella strategia di memorizzazione di A e delle due matrici che costituiranno i fattori di A.

14. Sia assegnata la matrice *a banda*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con ampiezza di banda inferiore $p = 2$ e superiore $q = 1$:

(a) Applicare l'algoritmo di fattorizzazione LU con pivoting parziale alla matrice A. Descrivere le matrici risultanti dalla fattorizzazione ed il vettore contenente le informazioni sugli eventuali scambi eseguiti, applicando la strategia del pivoting.

(b) Se la matrice è a banda, cosa si può dire sulla struttura delle matrici L ed U risultanti dalla fattorizzazione LU con pivoting? Quale sarebbe la struttura delle due matrici, se si applicasse l'algoritmo di fattorizzazione LU *senza pivoting parziale*?

(c) Descrivere brevemente la strategia del pivoting parziale e come incide, tale strategia, sulla stabilità dell'algoritmo per la fattorizzazione LU.