

Calcolo scientifico

Prodotto Matrice-Vettore a blocchi

Qual è l'algoritmo?

Algoritmo

```
for  $i=0, n-1$  do
```

```
     $y_i = 0$ 
```

```
    for  $j=0, n-1$  do
```

```
         $y_i = y_i + a_{ij}x_j$ 
```

```
    endfor
```

```
endfor
```

Prodotto **Matrice-Vettore**

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

In particolare...

Algoritmo

```
for  $i=0, n-1$  do
```

```
     $y_i = 0$ 
```

```
    for  $j=0, n-1$  do
```

```
         $y_i = y_i + a_{ij} x_j$ 
```

```
    endfor
```

```
endfor
```

il vettore y
viene "generalmente" calcolato
componente per componente
secondo un ordine prestabilito

L' i -esimo elemento di y
è il prodotto scalare della
 i -esima riga di A per il vettore x

**Partizionamento della matrice A
IN BLOCCHI**



Riformulazione dell'algoritmo "A BLOCCHI"

I STRATEGIA

Decomposizione 1

suddividiamo la
matrice A in

BLOCCHI di RIGHE

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Decomposizione della matrice A in blocchi di righe

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Suddividiamo la matrice in
2 BLOCCHI di RIGHE



blocco 1



blocco 2

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Il vettore x non viene decomposto

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



blocco 1

blocco 2

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 può calcolare
SOLO le prime tre componenti
del vettore y

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



blocco 1

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 può calcolare
SOLO le altre tre componenti
del vettore y

$$\begin{bmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

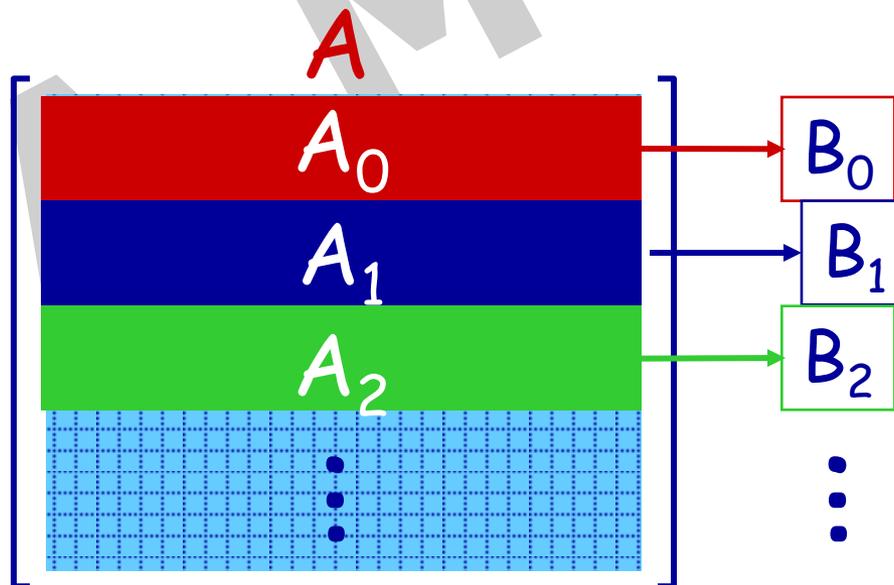


Blocco 2

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene divisa
in BLOCCHI di RIGHE



I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x non viene decomposto

A. MURRI

I STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x = y_i$$

Dal punto di vista dell'algoritmo:

```
for  $i=0, n-1$  do  
     $y(i)=0$   
    for  $j=0, n-1$  do  
         $y(i)=y(i) + A(i,j) x(j)$   
    endfor  
endfor
```

II STRATEGIA

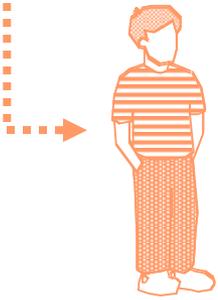
suddividiamo
la matrice A in

BLOCCHI di COLONNE

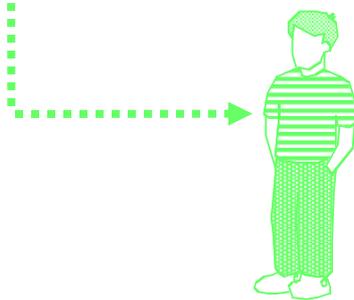
II STRATEGIA: Esempio n= 6

Decomposizione della matrice A per blocchi di colonne

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



blocco 1



blocco 2

Suddividiamo la matrice in
2 BLOCCHI di COLONNE

II STRATEGIA: Esempio n= 6

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



blocco 1



blocco 2

decomponiamo le
componenti del vettore x
In 2 blocchi

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 calcola

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

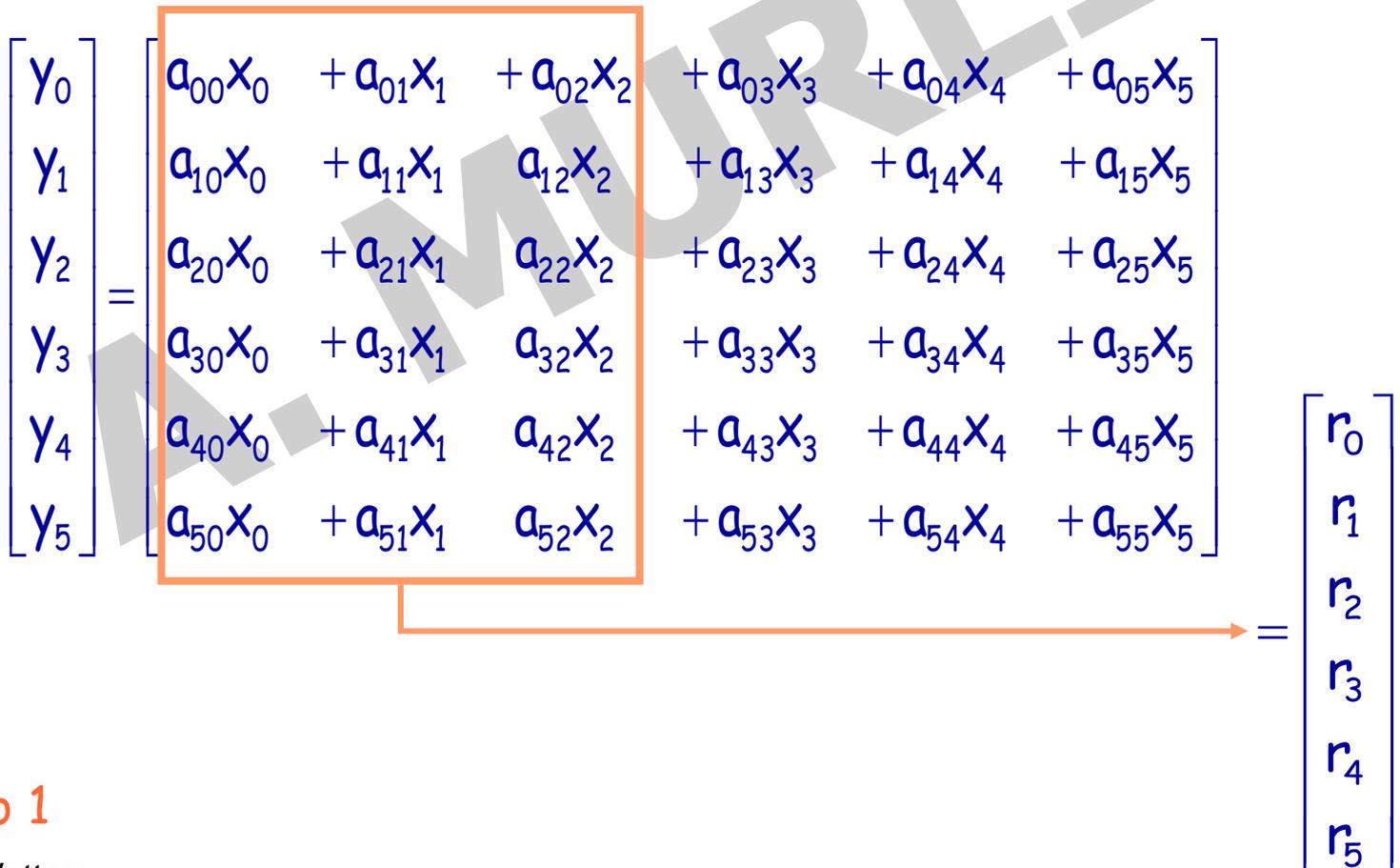


blocco 1

Ovvero...

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 calcola
"un contributo" del prodotto finale

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$




blocco 1

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 calcola

$$\begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$



blocco 2

Ovvero...

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 calcola
"un contributo" del prodotto finale

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 \end{bmatrix}$$


blocco 2



$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$

Domanda

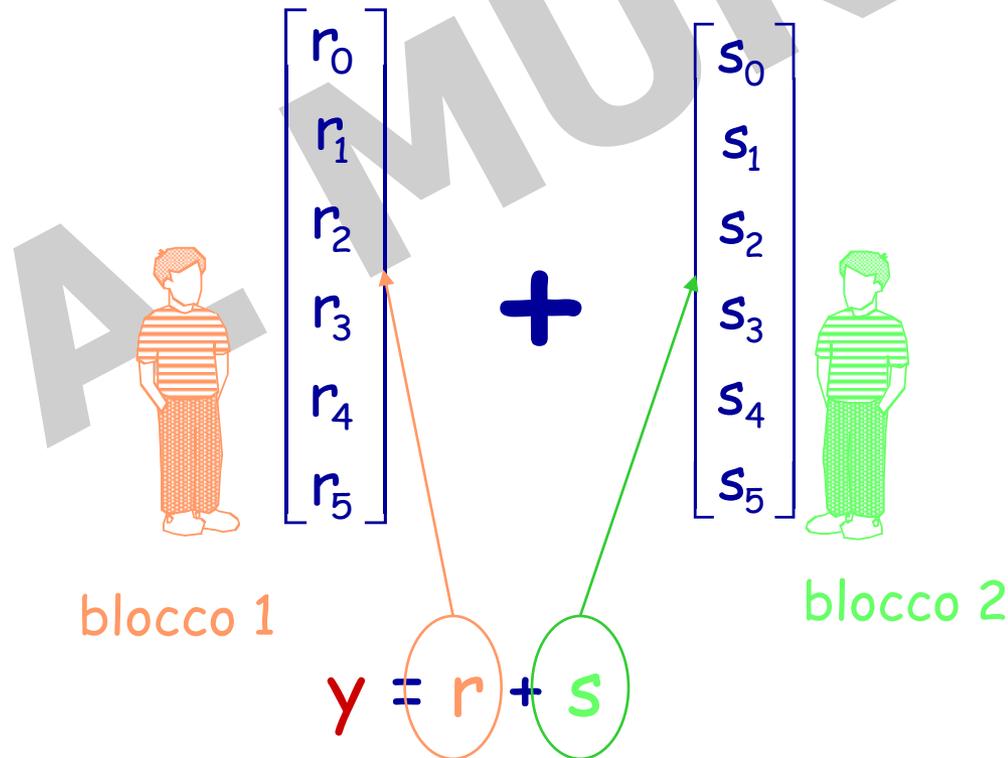
Come calcolare
il vettore

$$y = r + s$$

?

II STRATEGIA: Esempio n= 6

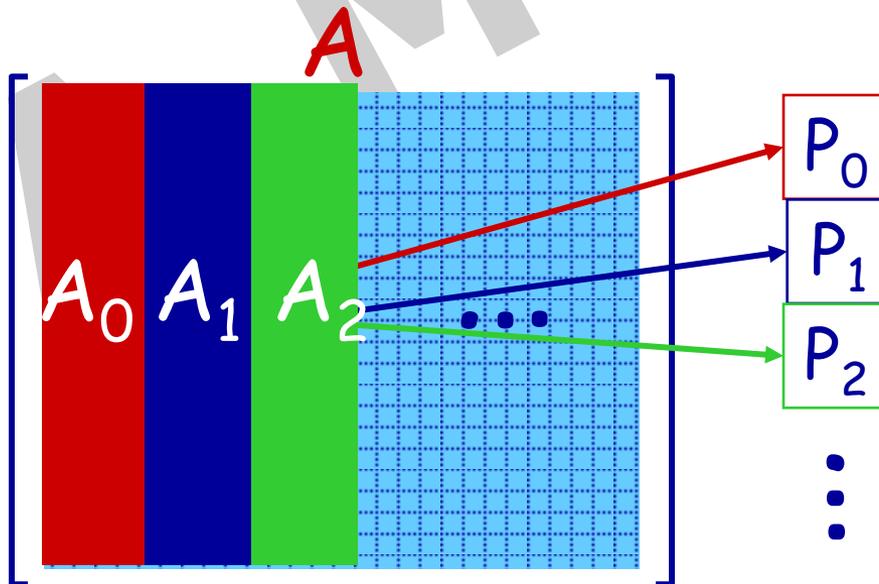
Per ottenere il vettore y
gli studenti devono "interagire"
sommando i loro risultati parziali



II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

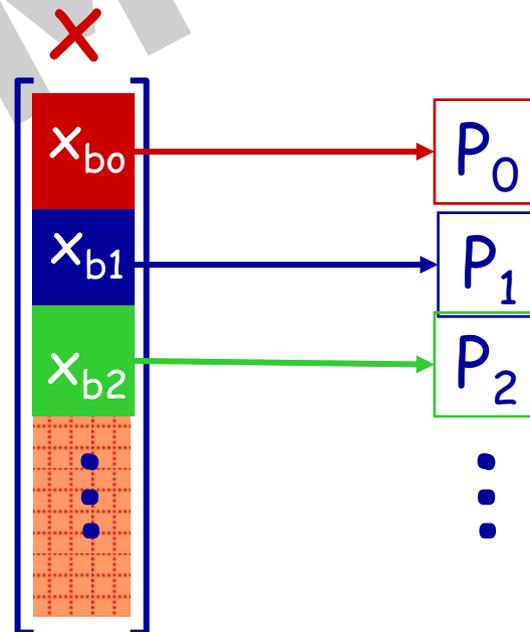
La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene distribuito
fra i p processori



II STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x_{bi} = r_i \text{ dove } y = \sum_{i=0}^{p-1} r_i$$

Modifica dell'algoritmo

```
for i=0,n-1 do
    y(i)=0
    for j=0,n-1 do
        y(i)=y(i) + A(i,j) x(j)
    endfor
endfor
```



Decomposizione 1: BLOCCHI di RIGHE

+

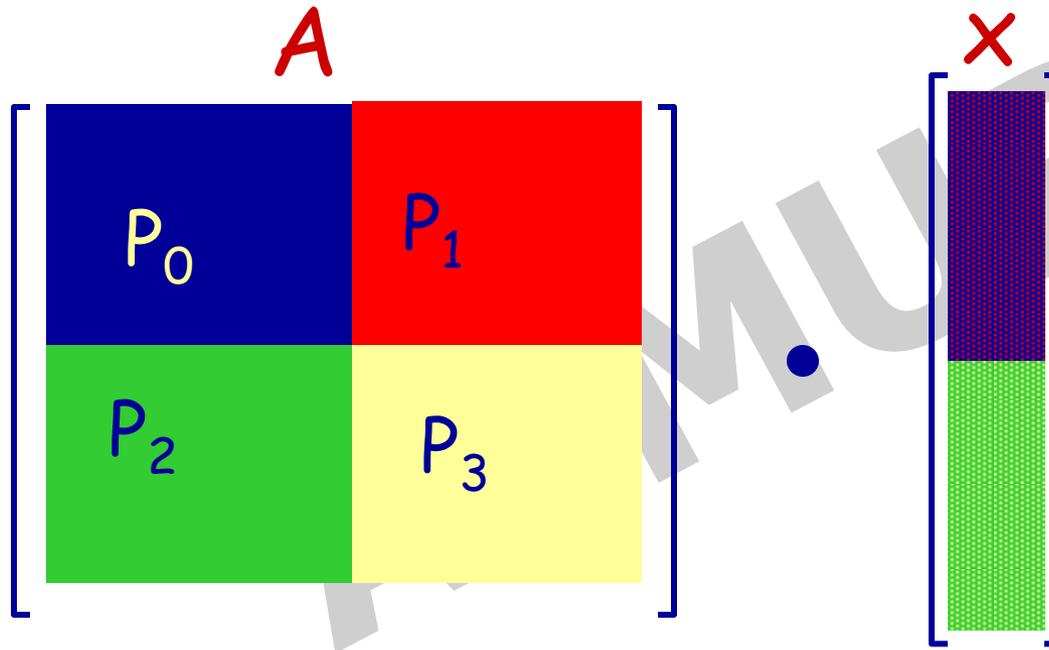
Decomposizione 2: BLOCCHI di COLONNE

=

Decomposizione 3: **BLOCCHI QUADRATI**

III Strategia: Esempio (4 processori)

decomposizione della matrice A per blocchi quadrati



decomposizione del vettore x

Esempio $N = 9$, Processori=4

B_0

$$a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{04}x_4$$

$$a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + \dots + a_{44}x_4$$

$$a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + \dots + a_{54}x_4$$

$$a_{90}x_0 + a_{91}x_1 + \dots + a_{94}x_4$$

B_2

B_1

$$a_{05}x_5 + a_{06}x_6 + \dots + a_{09}x_9$$

$$a_{45}x_5 + a_{46}x_6 + \dots + a_{49}x_9$$

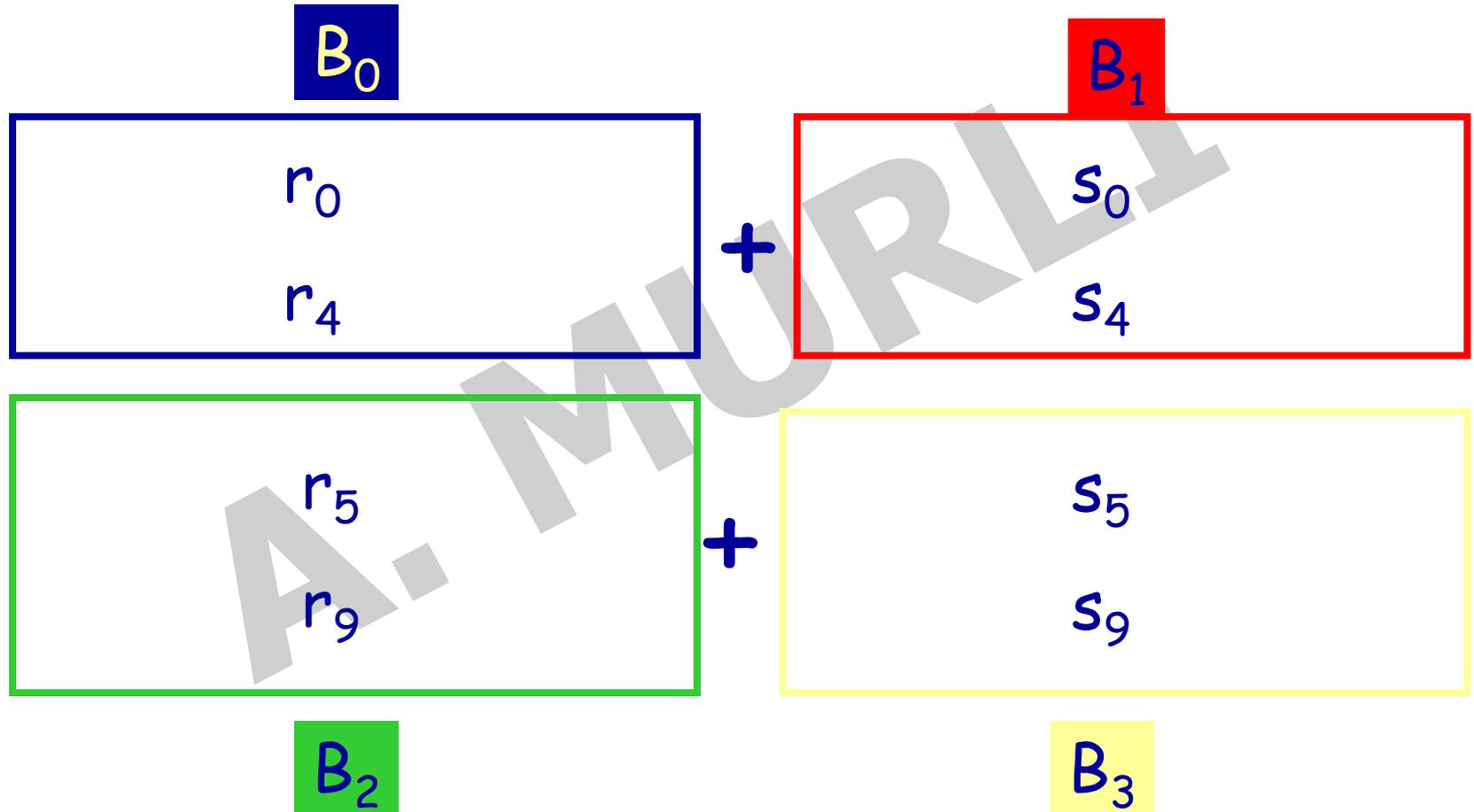
$$a_{55}x_5 + a_{56}x_6 + \dots + a_{59}x_9$$

$$a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + \dots + a_{99}x_9$$

B_3

Calcolo dei prodotti parziali

Esempio $N = 9$, $P=4$



Modifica dell'algoritmo

```
for  $i=0,n-1$  do  
     $y(i)=0$   
    for  $j=0,n-1$  do  
         $y(i)=y(i) + A(i,j) x(j)$   
    endfor  
endfor
```

A. MURLI

FINE LEZIONE