CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II , RECUPERO)
21 MAGGIO 2013

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Si dia la definizione di anello *booleano*. Tra $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}$ (con le consuete operazioni) e $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \triangle, \cap)$ quali sono e quali non sono anelli booleani?

Esercizio 2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si indichi con $\mathrm{uc}(n)$ l'ultima cifra nella scrittura decimale di n (ad esempio, $\mathrm{uc}(234) = 4$, $\mathrm{uc}(76) = 6$).

(*i*) Si trovi un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathrm{uc}(n+1) \neq \mathrm{uc}(n) + 1$.

Si considerino le applicazioni

$$f \colon n \in \mathbb{N} \mapsto \mathrm{rest}(\mathrm{uc}(n), 7) \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad g \colon n \in \mathbb{N} \mapsto \mathrm{rest}(\mathrm{uc}(n), 13) \in \mathbb{N}.$$

(*ii*) Qual è il numero $|\operatorname{im} f|$ degli elementi dell'immagine di f?

(*iii*) Qual è il numero $|\operatorname{im} g|$ degli elementi dell'immagine di g?

(*iv*) Detti $\mathcal{R}_f$ e $\mathcal{R}_g$ rispettivamente i nuclei di equivalenza di f e g, indicare $|\mathbb{N}/\mathcal{R}_f|$ e $|\mathbb{N}/\mathcal{R}_g|$.

(*v*) Descrivere nel modo più esplicito possibile $[1]_{\mathcal{R}_f}$, $[4]_{\mathcal{R}_f}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[n]_{\mathcal{R}_g}$.

Sia ora ρ la relazione d'ordine definita in $S := \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ ponendo, per ogni $a, b \in S$:

$$a \mathrel{\rho} b \iff \big(a = b \vee (\, f(a) < f(b) \wedge g(a) < g(b)\,)\big).$$

(*vi*) Disegnare il diagramma di Hasse di (S, ρ).

(*vii*) (S, ρ) è un reticolo?

(*viii*) Descrivere in (S, ρ) l'insieme dei minoranti di $\{4, 8\}$ e quello dei maggioranti di $\{3, 7\}$.

Esercizio 3. Definiamo un grafo G sull'insieme di vertici $V = \{9, 10, 15, 20, 28, 10!\}$, dichiarando due elementi distinti a, b di V adiacenti se e solo se l'equazione congruenziale $ax \equiv_b 6$ ha soluzioni.

(*i*) Disegnare il grafo G.

(*ii*) G è connesso? G è un albero?

(*iii*) Quanti lati è necessario cancellare da G per ottenere una foresta (senza modificare l'insieme dei vertici)?

Esercizio 4. Sia K un campo. Per ogni polinomio non nullo $f \in K[x]$ indichiamo con $m(f)$ il polinomio monico associato ad f in $K[x]$, e poniamo anche $m(0) = 0$. Definamo l'operazione $*$ in $K[x]$ ponendo $f * g = m(fg)$ per ogni $f, g \in K[x]$.

(*i*) $*$ è associativa?, è commutativa?, ammette elemento neutro?

Per arbitrari $f, g \in K[x]$:

(*ii*) qualunque sia K, cosa possiamo dire sul massimo comun divisore, nell'anello $K[x]$, tra f e $f * g$?

(*iii*) se $K = \mathbb{Q}$, è vero che $(f + f) * g = f * g$?

(*iv*) se $K = \mathbb{Q}$, $(K[x], +, *)$ è un anello?

Nel caso in cui $K = \mathbb{Z}_7$, trovare, se esiste, un polinomio monico $f \in K[x]$ tale che

$$f * (\bar{3}x + \bar{2}) = x^3 + x + \bar{2}.$$