CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I E II)
16 OTTOBRE 2017

Svolgere i seguenti esercizi,

giustificando pienamente tutte le risposte.

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola** e **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Sia F un campo. Si dica quando due polinomi non nulli f e g in $F[x]$ sono *associati*. Inoltre:

(i) Vero o falso (e perché): due polinomi non nulli in $F[x]$ sono associati se e solo se hanno lo stesso grado.
(ii) Si elenchino i polinomi associati a $\bar{2}x^2 + \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.

Esercizio 2. Vero o falso? E perché?

(i) Per ogni relazione d'ordine σ in $\mathbb{N}$ si ha: $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})(b \neq a \wedge a \,\sigma\, b)$.

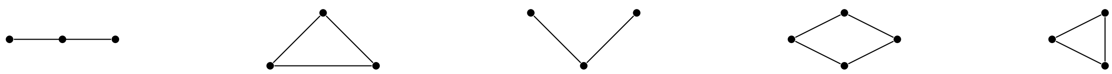
Per ogni insieme ordinato $(S, \leq)$,

(ii) se a è l'unico elemento minimale di $(S, \leq)$, allora $a = \min S$;
(iii) se $a = \min S$, allora a è l'unico elemento minimale di $(S, \leq)$;
(iv) se esiste $\inf S$, allora $\inf S = \min S$.

Se, inoltre, $(S, \leq)$ è un reticolo,

(v) esistono $\inf S$ e $\sup S$;
(vi) gli elementi di S sono a due a due confrontabili;
(vii) se $(S, \leq)$ è complementato, $(\forall x, y \in S)(x \wedge y = \min S \text{ e } x \vee y = \max S)$.

Esercizio 3. Quali tra i seguenti sono diagrammi di Hasse di un insieme ordinato? Quali tra questi rappresentano un reticolo?



(1) (2) (3) (4) (5)

Riguardate le stesse cinque figure come grafi, dire quali rappresentano alberi e individuare le coppie che rappresentano grafi tra loro isomorfi.

Esercizio 4. Considerate le applicazioni $\varphi\colon a \in \mathbb{Z}_{25} \mapsto \bar{3}a \in \mathbb{Z}_{25}$ e $\psi\colon a \in \mathbb{Z}_{25} \mapsto \overline{15}a \in \mathbb{Z}_{25}$,

(i) verificare che φ è biettiva, calcolandone l'inversa;
(ii) verificare che nessun elemento invertibile di $(\mathbb{Z}_{25}, \cdot)$ appartiene all'immagine di ψ;

Esercizio 5. Sia A un insieme. In $T := \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ si definisca l'operazione binaria $*$ ponendo, per ogni $X, Y, Z, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathcal{P}(A)$, $(X, Y, Z) * (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (X \cup \bar{X}, Y \cap \bar{Y}, Z \vartriangle \bar{Z})$.

(i) Provare (facendo uso di proprietà insiemistiche note) che $(T, *)$ è un monoide, specificandone l'elemento neutro;
(ii) determinare gli elementi invertibili di $(T, *)$;
(iii) verificare che, per ogni $X \in \mathcal{P}(A)$, $T_X := \{(X, X, Z) \mid Z \in \mathcal{P}(A)\}$ è una parte chiusa in $(T, *)$ e che $(T_X, *)$ è un gruppo.

Esercizio 6. Per quali primi positivi p il polinomio $f_p = \overline{30}x^5 + x^3 + \bar{2}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ ha grado 3?

(i) Per ciascuno di tali primi p, scrivere f_p come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.
(ii) Il polinomio $x^3 + 2x + 2$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$? Ha radici in $\mathbb{R}$?