

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 GIUGNO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

—————→ *giustificando pienamente tutte le risposte.* ←————

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (i) È vero che vale la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto alla differenza simmetrica? Se sì, dimostrarlo; se no, fornire un controesempio.

(ii) È vero che vale la proprietà distributiva dell'unione rispetto alla differenza simmetrica? Se sì, dimostrarlo; se no, fornire un controesempio.

(iii) Sia S un insieme e sia definita la seguente operazione binaria interna su $\mathcal{P}(S)$

$$\bar{\Delta} : (a, b) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \mapsto (a \cap b) \cup ((S \setminus a) \cap (S \setminus b)) \in \mathcal{P}(S).$$

Dare la definizione di anello booleano e stabilire se la terna $(\mathcal{P}(S), \bar{\Delta}, \cup)$ è o meno un anello booleano.

(iv) $(\mathcal{P}(S), \cap, \Delta)$ è un anello booleano? Se sì, a partire da questo, costruire un'algebra di Boole dopo averne dato la definizione.

Esercizio 2. Sia $T = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e si consideri l'applicazione $f : T \rightarrow \mathbb{N}$ che ad ogni $a \in T$ associa il massimo degli esponenti nella decomposizione di a come prodotto di primi distinti, cioè il numero $f(a)$ così definito: scritto a come $\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$, dove $t \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_1, p_2, \dots, p_t$ sono interi primi positivi a due a due distinti e $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, poniamo $f(a) = \max \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$.

(i) Determinare $\vec{f}(\{0\})$, $\vec{f}(\{3\})$, $\vec{f}(\{3\})$;

(ii) f è iniettiva? f è suriettiva? f è biiettiva?

Si consideri la relazione d'ordine σ definita in T da:

$$\forall a, b \in T \quad (a \sigma b \iff (a = b \vee f(a) < f(b))).$$

(iii) Determinare eventuali minimo, massimo, elementi minimali e massimali in (T, σ) ;

(iv) determinare, se esistono, minoranti ed estremo inferiore in (T, σ) di ciascuno degli insiemi $R = \{8\}$, $S = \{54\}$ e $U = \{8, 54\}$;

(v) posto $L = \{12, 16, 18, 70, 243, 10000\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (L, σ) e decidere se (L, σ) e $(L \setminus \{12\}, \sigma)$ sono o non sono reticoli.

Esercizio 3. In $\mathbb{Z}_{10}$, si consideri l'operazione binaria $*$ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{10} \quad (a * b = \bar{5}ab + a + b)$. Dando per noto che $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ è un semigrupp commutativo,

(i) $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ ha elemento neutro?

(ii) Determinare, se ne esistono, tutti gli elementi b di $\mathbb{Z}_{10}$ tali che $\bar{3} * b = \bar{5}$.

(iii) Determinare gli elementi idempotenti in $(\mathbb{Z}_{10}, *)$.

Esercizio 4. Dopo aver calcolato i quadrati degli elementi di $\mathbb{Z}_{11}$,

(i) determinare gli insiemi $A = \{a \in \mathbb{Z}_{11} \mid x^2 - a \text{ è irriducibile in } \mathbb{Z}_{11}[x]\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Z}_{11} \mid x^2 - b \text{ è riducibile in } \mathbb{Z}_{11}[x]\}$;

(ii) determinare le coppie di elementi $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ tali che, in $\mathbb{Z}_{11}[x]$, il polinomio $g_{a,b} = (x^2 - a)(x^2 - b) \dots$

(a) ... sia irriducibile;

(b) ... sia riducibile;

(c) ... sia il prodotto di un polinomio di primo grado per uno di terzo grado;

(d) ... sia il prodotto di quattro polinomi di primo grado;

(iii) decomporre il polinomio $x^4 - \bar{7}x^2 - \bar{1}$ nel prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

Esercizio 5. Sia E l'insieme delle relazioni di equivalenza in $\mathbb{N}$. Vero o falso (e, come sempre, perché?):

(i) $\forall \alpha \in E (\forall n \in \mathbb{N} (\exists c \in (\mathbb{N}/\alpha) (n \in c)))$.

(ii) $\forall \alpha \in E (\forall c \in (\mathbb{N}/\alpha) (\exists n \in \mathbb{N} (n \in c)))$.

(iii) $\forall \alpha \in E (\forall n \in \mathbb{N} (\exists! c \in (\mathbb{N}/\alpha) (n \in c)))$.

(iv) $\forall \alpha \in E (\forall c \in (\mathbb{N}/\alpha) (\exists! n \in \mathbb{N} (n \in c)))$.

(v) $\forall \alpha, \beta \in E (\exists c \in (\mathbb{N}/\alpha) ((\exists d \in (\mathbb{N}/\beta) (c \cap d \neq \emptyset)))$.