

**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA**  
**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)**  
**10 SETTEMBRE 2024**

Svolgere i seguenti esercizi,



*giustificando pienamente tutte le risposte.*



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

**Non** è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Decidere se la forma proposizionale  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \iff ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$  è una tautologia.

**Esercizio 2.** Si consideri l'operazione binaria  $*$ :  $(a, b) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \mapsto a + \bar{9}b \in \mathbb{Z}_{12}$ .

- (i) Che tipo di struttura (semigruppato, commutativo o meno, monoide, gruppo) è  $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ ?
- (ii) Determinare gli insiemi  $D$  degli elementi neutri a destra e  $S$  degli elementi neutri a sinistra in  $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ .  $D \cup S$  è una parte stabile in  $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ ?
- (iii) Sia  $T = \{\bar{3}n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .  $T$  è una parte stabile in  $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ ? Se lo è, che tipo di struttura (semigruppato, commutativo o meno, monoide, gruppo) è  $(T, *)$ ?
- (iv) Risolvere, determinando tutte le soluzioni in  $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ , le equazioni: (a):  $\bar{7} * x = \bar{1}$ ; (b):  $\bar{5} * x = \bar{1}$ .

**Esercizio 3.** Consideriamo la funzione:<sup>(†)</sup>

$$\varphi: a_0 + a_1x + \dots + a_{\deg f}x^{\deg f} \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \mapsto \prod_{i=0}^{\deg f} a_i \in \mathbb{Z}.$$

- (i)  $\varphi$  è suriettiva? È iniettiva?
- (ii) Descrivere  $\vec{\varphi}(\{1, x^5 + 1\})$ ,  $\vec{\varphi}(\{3\})$  e  $\vec{\varphi}(\{2, 4\})$ . Quanti polinomi irriducibili (in  $\mathbb{Q}[x]$ ) di grado 1 contiene  $\vec{\varphi}(\{3\})$ ?
- (iii) Sia  $\sim_\varphi$  il nucleo di equivalenza di  $\varphi$ . Se ha senso la domanda, determinare se ogni singolo elemento di  $\mathbb{Z}[x]/\sim_\varphi$  è infinito.
- (iv) Dopo aver dato la definizione di polinomio associato ad un polinomio dato in un generico anello di polinomi  $A[x]$ , dimostrare che ad ogni elemento di  $(\mathbb{Z}[x] \setminus \{0\})/\sim_\varphi$  appartengono almeno due polinomi (distinti) tra loro associati.

**Esercizio 4.** Per ogni insieme  $X$  di numeri interi, sia  $\rho_X$  la relazione binaria in  $X$  definita da:

$$\forall a, b \in X (a \rho_X b \iff a|7b).$$

Siano  $A = \{0, 1, 2, 8, 14, 49, 88\}$  e  $B = \{0, 1, 2, -3, 11, 132, 330, 49\}$  (nota bene:  $132 = 2 \cdot 66$ ).

- (i) Spiegare perché una tra  $\rho_A$  e  $\rho_B$  è una relazione d'ordine e l'altra non lo è.

Detto  $S$  quello tra  $A$  e  $B$  tale che  $\rho_S$  sia una relazione d'ordine, e posto  $\rho = \rho_S$ ,

- (ii) disegnare un diagramma di Hasse di  $(S, \rho)$ ;
- (iii) determinare, se esistono,  $\inf_{(S, \rho)}(\{2, 49\})$  e  $\sup_{(S, \rho)}(\{2, 49\})$ ;
- (iv) stabilire se  $(S, \rho)$  è un reticolo e, nel caso se è distributivo o complementato.

**Esercizio 5.** Spiegare perché, per ogni insieme non vuoto  $V \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ <sup>(‡)</sup>, è ben definito il grafo (semplice)  $G_V$  su  $V$  in cui, per ogni  $a, b \in V$ ,  $a$  e  $b$  sono adiacenti se e solo se  $a$  e  $b$  sono tra loro coprimi.

- (i) Cosa cambia se si assume, invece  $V = \mathbb{N}^*$ ?
- (ii) Se  $V = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ,  $G_V$  è connesso?
- (iii) Esiste  $V \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  tale che  $G_V$  non sia connesso?
- (iv) Se  $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $G_V$  ha cammini euleriani?

<sup>(†)</sup>deg  $f$  indica il grado del polinomio  $f$ .

<sup>(‡)</sup> $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$