

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
11 OTTOBRE 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

—————→ *giustificando pienamente tutte le risposte.* ←————

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Scrivere una negazione della formula $\exists x((p \vee q) \rightarrow (\forall y(r \rightarrow s)))$ che non cominci col simbolo di negazione né con una parentesi ed in cui non appaia il simbolo di implicazione ($\rightarrow$ o $\Rightarrow$).

Esercizio 2. Nell'insieme T delle applicazioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ si consideri l'operazione binaria $*$ definita ponendo, per ogni $f, g \in T$,

$$(f * g): n \in \mathbb{Z} \mapsto f(8) + g(n) \in \mathbb{Z}.$$

- (i) $*$ è commutativa? È associativa?
- (ii) $(T, *)$ ha elementi neutri a sinistra, a destra, neutri? Che tipo di struttura (semigruppato, commutativo o meno, monoide, gruppo, nessuna delle precedenti) è $(T, *)$?
- (iii) Determinare in $(T, *)$ gli (eventuali) elementi cancellabili a sinistra, a destra, cancellabili e, se la domanda ha senso, gli elementi simmetrizzabili a sinistra, a destra, simmetrizzabili.
- (iv) Dire quali tra le seguenti parti di T sono chiuse rispetto a $*$:
 $S = \{f \in T \mid f \text{ è suriettiva}\}, \quad I = \{f \in T \mid f \text{ è iniettiva}\}, \quad B = \{f \in T \mid f \text{ è biettiva}\},$
 $C = \{f \in T \mid f \text{ è costante}\}, \quad U = \{f \in T \mid \text{im } f \subseteq \mathbb{N}\}.$

Esercizio 3. Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 100\}$. Indicare (senza eseguire calcoli) il numero delle permutazioni f di X tali che $f(42) = 18$ e $f(18) = 42$.

Esercizio 4. Sia P l'insieme delle parti di $S := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con esattamente due elementi. Sia

$$g = \{(\{a, b\}, \{c, d\}) \in P \times P \mid \{c, d\} = \{ab, 2ab\}\}.$$

- (i) Dare la definizione di funzione e dimostrare che g è il grafico di una funzione $f: P \rightarrow P$.
- (ii) f è una funzione iniettiva? Suriettiva? Biettiva? Determinare l'immagine I di f .
- (iii) Sia, ancora, $I = \vec{f}(P)$. Dare la definizione di grafo (in termini di vertici e lati) e determinare se $G = (S, I)$ è un grafo o meno.
- (iv) Dare la definizione di grafo connesso e di foresta e, in caso G sia un grafo:
 - (a) determinare se G è una foresta o meno...
 - (b) ...e se è un albero.
 - (c) Trovare la componente connessa di G di cui 4 è un vertice.

Esercizio 5. Sia $f = \overline{16}x^5 + \overline{16}x^4 + \overline{32}x^3 - \overline{23}x^2 + \overline{32}$, un polinomio in $\mathbb{Z}_{71}[x]$.

- (i) Assumendo come noto che f è riducibile in $\mathbb{Z}_{71}[x]$ ma non ha radici in $\mathbb{Z}_{71}$, decidere quanti sono i divisori irriducibili monici di f e quali sono i loro gradi.
- (ii) Determinare, se possibile, un polinomio monico che, in $\mathbb{Z}_{71}[x]$, sia associato a f .

Esercizio 6. Sia $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 300, 100!, h\}$, dove $h = 3 \cdot 10^{100!}$, ordinato dalla relazione $\mid$ di divisibilità indotta da quella in $\mathbb{N}$.

- (i) Disegnare un diagramma di Hasse di $(A, \mid)$.
- (ii) $(A, \mid)$ è un reticolo? Nel caso, è complementato? È distributivo? È booleano?

Per ciascun insieme ordinato $(S, \leq)$, chiamiamo $\sigma_{(S, \leq)}$ la relazione binaria in S definita ponendo, per ogni $x, y \in S$, $x \sigma_{(S, \leq)} y$ se e solo se $x = y$ oppure x e y non sono tra loro confrontabili rispetto a $\leq$.

- (iii) $\rho := \sigma_{(A, \mid)}$ è di equivalenza? Nel caso lo sia, descrivere le classi in A/ρ , elencando esplicitamente gli elementi di ciascuna di esse e specificando $|A/\rho|$.
- (iv) Se possibile, fornire un esempio di insieme ordinato $(B, \leq)$ tale che $\sigma_{(B, \leq)}$ sia di equivalenza ed un esempio di insieme ordinato $(C, \preceq)$ tale che $\sigma_{(C, \preceq)}$ non sia di equivalenza.