CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
15 GENNAIO 2025

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

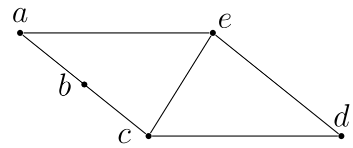
Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Se $\varphi \to \psi$ è una tautologia e ψ è una contraddizione, cosa possiamo concludere su φ?

Esercizio 2. Supponiamo dato un grafo (semplice) connesso G con (esattamente) 14 vertici e 16 lati.

(i) È possibile, cancellando alcuni dei lati, ma nessun vertice, di G ottenere un albero? Se sì, quanti lati bisogna cancellare?

(ii) Se possibile, dal grafo disegnato a destra cancellare due lati (e nessun vertice) in modo da ottenere un albero T. Sempre se possibile, rifarlo scegliendo altri due lati in modo da ottenere un albero S non isomorfo a T.



Esercizio 3. Defininamo, in $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, le operazioni binarie $\oplus$ e $*$ ponendo, per ogni $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$:

$$(a, b) \oplus (x, y) = (a + x, b + y); \qquad\qquad (a, b) * (x, y) = (0, ax).$$

(i) Verificare che $(A, \oplus, *)$ è un anello.

(ii) Decidere se $(A, \oplus, *)$ è unitario, se è commutativo, se è booleano, se è integro.

(iii) Di ciascuno tra $(5, 3)$ e $(5, 0)$ stabilire se è un divisore dello zero in $(A, \oplus, *)$.

(iv) $B := \{0\} \times \mathbb{Z}$ è un sottoanello di $(A, \oplus, *)$? Nel caso, B è isomorfo all'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ degli interi? Rispondere alle stesse domande per $C := \mathbb{Z} \times \{0\}$ al posto di B.

Esercizio 4. Siano $a = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e f l'applicazione

$$x \in \mathcal{P}(a) \longmapsto \begin{cases} |x|, & \text{se } 5 \notin x \\ 1, & \text{se } 5 \in x \end{cases} \in \mathbb{N}$$

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?

(ii) Determinare l'immagine $\operatorname{im} f = \vec{f}(\mathcal{P}(a))$ di f.

Detto ρ il nucleo di equivalenza di f,

(iii) descrivere le classi $[\{1, 2\}]_\rho$ e $[\{5\}]_\rho$, indicandone il numero di elementi;

(iv) calcolare $|\mathcal{P}(a)/\rho|$.

Esercizio 5. Per ogni $p \in P := \{2, 3, 5\}$ e $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, indichiamo con $f_p(n)$ l'esponente della massima potenza di p che divide n, e sia $f(n) = \sum_{p \in P} f_p(n)$. Siano σ e ρ le relazioni binarie in $\mathbb{N}^*$ definite da: per ogni $a, b \in \mathbb{N}^*$:

$$a \,\sigma\, b \leftrightarrow \big(a = b \vee \forall p \in P\, (p|a \to p^2|b)\big) \qquad \text{e} \qquad a \,\rho\, b \leftrightarrow \big(\forall p \in P\, (p^{f_p(a)}|b) \wedge (a = b \vee f(a) < f(b))\big).$$

(i) Di ciascuna di σ e ρ stabilire se è una relazione d'ordine.

Per ciascuna che lo sia, detta α questa relazione e posto $X = \{3, 4, 10, 26, 49, 90, 660, 900\}$:

(ii) determinare eventuali minimo, massimo, elementi minimali, massimali in $(\mathbb{N}^*, \alpha)$;

(iii) stabilire se $(\mathbb{N}^*, \alpha)$ è un reticolo;

(iv) disegnare un diagramma di Hasse di (X, α);

(v) elencare gli elementi di X confrontabili (rispetto ad α) con 10;

(vi) stabilire se (X, α) è un reticolo e, nel caso, se è complementato e se è distributivo.

Esercizio 6. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si consideri il polinomio $f_m = \bar{5}x^4 + \bar{3}x^3 + x^2 - \bar{3}x + \bar{5} \in \mathbb{Z}_m[x]$. Determinare

(i) gli $m \in \mathbb{N}$ tali che f_m sia divisibile per $x^2 - \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_m[x]$.

Fissato un tale m maggiore di 1,

(ii) dando per noto che f_m ammette solo due radici in $\mathbb{Z}_m$, decomporre f_m nel prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_m[x]$;

(iii) determinare il polinomio monico associato ad f_m in $\mathbb{Z}_m[x]$;

(iv) determinare il polinomio monico irriducibile di grado massimo che divide f_m in $\mathbb{Z}_m[x]$;

(v) esistono tre polinomi di primo grado che dividono f_m in $\mathbb{Z}_m[x]$?

(vi) esiste un polinomio irriducibile di grado 3 che divide f_m in $\mathbb{Z}_m[x]$?