CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
20 FEBBRAIO 2025

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (*i*) Dare la definizione di numero primo in $\mathbb{Z}$.
(*ii*) Posto $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determinare il numero dei sottoinsiemi di S che contengono tutti i numeri primi appartenenti ad S.
(*iii*) Quanti sono i sottoinsiemi di S che hanno ordine 3?

Esercizio 2. (*i*) Dare la definizione di radice di un polinomio.
(*ii*) Dare la definizione di polinomio irriducibile a coefficienti in un campo.
(*iii*) Esiste in $\mathbb{R}[x]$ qualche polinomio irriducibile con una radice in $\mathbb{R}$? In caso di risposta affermativa fornire un esempio, in caso di risposta negativa giustificare la risposta.
(*iv*) Elencare tutti i polinomi monici e irriducibili di grado 1 e grado 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$.
(*v*) Decomporre il polinomio $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ in prodotto di polinomi irriducibili.
(*vi*) Decomporre il polinomio $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$ in prodotto di polinomi irriducibili.

Esercizio 3. Sia G un grafo (semplice) G con esattamente 700 lati e 501 vertici. Fissiamone un vertice v. Supponiamo che dei 500 vertici rimanenti, cento abbiano grado 1, cento abbiano grado 2, cento abbiano grado 4, e duecento abbiano grado 3. Cosa sappiamo dire sul grado di v? Se supponiamo che G sia connesso, possiamo stabilire se G ha un circuito euleriano?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Si consideri l'applicazione $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ che ad ogni $n \in \mathbb{N}^*$ associa $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i$, dove $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ per opportuni $t \in \mathbb{N}^*$, interi primi positivi $p_1, p_2, \ldots, p_t$ tra loro distinti e numeri naturali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$.
(*i*) Perché f è ben definita?
(*ii*) f è iniettiva? È suriettiva?
(*iii*) Determinare $\overleftarrow{f}(\{0\})$, $\overleftarrow{f}(\{1\})$, $\overrightarrow{f}(\{8h \mid h \in \mathbb{N}^*\})$.
(*iv*) Verificare che f determina un omomorfismo da $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ a $(\mathbb{N}, +)$.
(*v*) Indicato con $\Re$ il nucleo di equivalenza di f (cioè l'equivalenza associata a f), determinare $[8]_{\Re}$.
Sia σ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{N}^*$ da: per ogni $a, b \in \mathbb{N}^*$

$$a \ \sigma \ b \iff \big(a = b \vee f(a) \text{ è un divisore proprio di } f(b)\big).$$

(*vi*) Determinare in $(\mathbb{N}^*, \sigma)$ eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
(*vii*) Determinare in $(\mathbb{N}^*, \sigma)$ l'insieme dei minoranti di $\{4, 9\}$.
(*viii*) Dopo aver dato la definizione di reticolo, si dica se $(\mathbb{N}^*, \sigma)$ è un reticolo.
(*ix*) Posto $L = \{1, 2, 6, 9, 12, 25, 30\}$, scegliere un $a \in L$ in maniera tale che $(L \smallsetminus \{a\}, \sigma)$ risulti essere un reticolo.

Esercizio 5. Definiamo l'operazione binaria $*$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ponendo $\forall x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \big(x * y = x \cup (y \smallsetminus \{3\})\big)$.
(*i*) Decidere se $*$ è commutativa e se è associativa.
(*ii*) Determinare gli eventuali elementi neutri a destra, a sinistra, neutri in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), *)$.
(*iii*) Stabilire se $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), *)$ è un semigruppo, un monoide, un gruppo.
(*iv*) Determinare gli elementi cancellabili a sinistra o a destra e gli elementi idempotenti in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), *)$.
(*v*) L'operazione $\cap$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è distributiva a sinistra rispetto a $*$? E a destra?

Esercizio 6. Determinare l'insieme dei numeri interi n tali che $84n + 5 \equiv_{92} 14n - 1$.