CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
19 GIUGNO 2025

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Quale connettivo proposizionale tra $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ va sostituito a $\star$ in modo che la forma proposizionale $\big(p \text{ XOR } q\big) \longleftrightarrow \neg\big((p \rightarrow q) \wedge (p \star (\neg q))\big)$ sia una tautologia?

Esercizio 2. Sia $T = \{n \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq n \leq 6\}$. Tra i sottoinsiemi di T che contengono solo numeri primi, determinare il numero di quelli di cardinalità 7 e di quelli di cardinalità 4. Determinare poi, tra i sottoinsiemi di T a cui non appartengono numeri primi, il numero di quelli di cardinalità 7 e di quelli di cardinalità 4.

Esercizio 3. Per ogni numero intero n si consideri l'applicazione $f_n \colon [a]_n \in \mathbb{Z}_n \mapsto [30a]_n \in \mathbb{Z}_n$.

(i) Determinare l'unico n in $\{85, 86, 87, 88, 89\}$ tale che f_n sia biettiva.
(ii) Per tale n, si determini $(f_n)^{-1}$.
(iii) Calcolare $\vec{f}_{40}(\mathbb{Z}_{40})$, $\vec{f}_{40}(\varnothing)$, $\overleftarrow{f}_{40}(\varnothing)$, $\overleftarrow{f}_{40}(\mathbb{Z}_{40})$, $\overleftarrow{f}_{40}(\{[20]_{40}\})$, $\overleftarrow{f}_{40}(\{[2]_{40}\})$.

Esercizio 4. Per ogni $a \in \mathbb{N}$, sia s_a la somma delle cifre di a nella sua rappresentazione in base 10. Sia τ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{N}$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \;\tau\; b \iff (a = b \;\vee\; s_a \text{ è un divisore proprio di } s_b).$$

(i) Determinare in $(\mathbb{N}, \tau)$ eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
(ii) Sempre in $(\mathbb{N}, \tau)$, determinare l'insieme dei minoranti di $\{21, 22\}$; stabilire se esiste $\inf\{21, 22\}$.
(iii) $(\mathbb{N}, \tau)$ non è un reticolo; perché?

Sia $M = \{13, 15, 22, 31, 66, 5106, 10001, 24288\}$.

(iv) Disegnare un diagramma di Hasse di (M, τ).
(v) Individuare in (M, τ) una catena massimale (cioè un elemento massimale in $(C, \subseteq)$ dove C è l'insieme delle parti X di M tali che (X, τ) sia totalmente ordinato).
(vi) Stabilire se (M, τ) è o meno un reticolo e, nel caso, se è distributivo e se è complementato.
(vii) Determinare $a \in M$ tale che $(M \smallsetminus \{a\}, \tau)$ sia un reticolo. Questo reticolo è distributivo? È complementato?

Esercizio 5. In $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di considerino le operazioni binarie $+$ e $\cdot$ definite da: $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f) \qquad \wedge \qquad (a, b, c) \cdot (d, e, f) = (ad, ae + bf, cf).$$

Dando per noto che $(S, +, \cdot)$ è un anello unitario,

(i) si determinino lo zero 0_S e l'unità 1_S di questo anello;
(ii) si determinino, ove possibile, l'opposto e l'inverso di $(1, 2, -1)$.
(iii) Data la definizione di divisore dello zero in un anello, decidere se entrambi, uno o nessuno degli elementi $(1, 2, -1)$ e $(1, 1, 0)$ è divisore dello zero in $(S, +, \cdot)$.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 6. Sia ρ la relazione binaria in $\mathbb{Z}$ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \big(a + b - 1 \text{ è pari}\big)$.

(i) Dare la definizione di grafo (semplice) e verificare che $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un grafo;
(ii) Determinare un sottoinsieme X di $\mathbb{Z}$ tale che $|X| = 5$ e (X, σ) sia un albero, dove σ è la relazione indotta da ρ su X.

Esercizio 7. Per ogni $m \in \mathbb{Z}$ sia $f_m := \overline{5m}x^4 + \bar{3}x^2 + \overline{15}x + \bar{1} + \overline{m} \in \mathbb{Z}_7[x]$. Stabilire:

(i) per quali interi m $\;f_m$ è monico;
(ii) per quali interi m $\;f_m$ è invertibile in $\mathbb{Z}_7[x]$;
(iii) per quali interi m $\;f_m$ è un divisore dello zero in $\mathbb{Z}_7[x]$;
(iv) per quali interi m $\;f_m$ è, in $\mathbb{Z}_7[x]$, divisibile per $x + \bar{1}$.