CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III) — 16 LUGLIO 2025

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Vero o falso? $\forall x\Big(\big(\forall y, z\big((y \in x \wedge z \in x) \to y = z\big)\big) \to \exists a(x = \{a\})\Big)$.

Esercizio 2. Descrivere esplicitamente l'insieme dei numeri interi n tali che $360n + 3 \equiv_{123} 129n + 45$.

Esercizio 3. Sia θ la relazione binaria definita in $S := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$

$$(a, b)\ \theta\ (c, d) \iff (a \le c\ \wedge\ b \ge d).$$

- (i) Verificare che θ è d'ordine; determinarne eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo;
- (ii) descrivere gli insiemi dei minoranti e dei maggioranti di $H := \{8, 11\} \times \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ in (S, θ);
- (iii) stabilire se (S, θ) è un reticolo.
- (iv) Dare la definizione di sottoreticolo ed enunciare il criterio di distributività di Birkhoff.

Posto $T = \{(0, 9), (1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 9), (4, 6), (5, 5), (5, 8)\}$,

- (v) disegnare un diagramma di Hasse di (T, θ), stabilire se (T, θ) è un reticolo e, nel caso, se è distributivo e se è complementato.
- (vi) Se (S, θ) è un reticolo, stabilire se (T, θ) ne è un sottoreticolo.

Esercizio 4. Per ogni insieme finito a ed ogni applicazione $f\colon a \to b$ si consideri la relazione binaria $\mathcal{B}_f$ definita in $\mathcal{P}(a)$ da:

$$\forall x, y \in \mathcal{P}(a)\ \big(x\ \mathcal{B}_f\ y \iff |\vec{f}(x)| = |\vec{f}(y)|\big).$$

- (i) Dimostrare che, per ogni scelta di f, $\mathcal{B}_f$ è una relazione di equivalenza.
- (ii) Nel caso in cui a sia un insieme di cardinalità 10 e f sia iniettiva:
  - a.) fissata una parte x di a tale che $|x| = 4$, descrivere $[x]_{\mathcal{B}_f}$ ed esprimere $|[x]_{\mathcal{B}_f}|$;
  - b.) calcolare $|\mathcal{P}(a)/\mathcal{B}_f|$.
- (iii) Nel caso in cui $a = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 8\}$ e f è l'applicazione $n \in a \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases} \in \{0, 1\}$, calcolare $|[\varnothing]_{\mathcal{B}_f}|$, $|[\{2\}]_{\mathcal{B}_f}|$, $|[\{2, 3\}]_{\mathcal{B}_f}|$ e $|\mathcal{P}(a)/\mathcal{B}_f|$.
- (iv) Provare che f è costante se e solo se $|\mathcal{P}(a)/\mathcal{B}_f| \le 2$ e che f è iniettiva se e solo se $|\mathcal{P}(a)/\mathcal{B}_f| = |a| + 1$.

Esercizio 5. Sia A l'insieme dei numeri reali non negativi; consideriamo l'operazione

$$*\colon (a, b) \in A \times A \longmapsto \sqrt{a^2 + b^2} \in A.$$

- (i) Stabilire se $*$ è commutativa e se è associativa.
- (ii) Decidere se $(A, *)$ ammette elemento neutro; individuare in $(A, *)$ gli eventuali elementi cancellabili e quelli simmetrizzabili. Che tipo di struttura (semigruppo, monoide, gruppo) è $(A, *)$?
- (iii) Quali tra $\{1\}$, $A \cap \mathbb{Q}$ e $\{\sqrt{a} \mid a \in A \cap \mathbb{Q}\}$ sono parti chiuse di $(A, *)$?

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 6.

- (i) Sia G un grafo (semplice) con (esattamente) sette lati e sette vertici, dei quali (almeno) due hanno grado 3, due hanno grado 2 e due hanno grado 1. Quale grado ha il settimo vertice? G è un albero?
- (ii) Disegnare un grafo connesso con le proprietà richieste al punto precedente per G. Se possibile, disegnarne due (entrambi connessi) tra loro non isomorfi.

Esercizio 7. Per ogni $a \in \mathbb{Z}_5$ sia $f_a := x^3 + ax + a$. Sia $A = \{a \in \mathbb{Z}_5 \mid f_a \text{ è irriducibile in } \mathbb{Z}_5[x]\}$.

- (i) Elencare gli elementi di A;
- (ii) per ogni $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus A$, scrivere f_a come prodotto di polinomi irriducibili monici.
- (iii) Stabilire per quali coppie $(a, b) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ il polinomio $f_{a,b} := bx^3 + abx + ab$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_5[x]$.