CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III) — 15 GENNAIO 2026

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Di ciascuna delle forme proposizionali $\big((p \to q) \to q\big) \to p$ e $p \to \big((p \to q) \to q\big)$ stabilire se è o non è una tautologia.

Esercizio 2. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$ e sia f l'applicazione $\mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$ definita da: per ogni $X \in \mathcal{P}(A)$,

$$f(X) = \begin{cases} |X| & \text{se } 0 \in X; \\ 2|X| + 1 & \text{se } 0 \notin X. \end{cases}$$

(*i*) f è iniettiva? È suriettiva? È biettiva?
(*ii*) Definire il nucleo di equivalenza $\sim$ associato a f e descrivere le classi $[\{0,4\}]_\sim$ e $[\{5\}]_\sim$, calcolandone le cardinalità.
(*iii*) Qual è la cardinalità di $|\mathcal{P}(A)/{\sim}|$?

Esercizio 3. Siano $P = \{2, 5, 11\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, sia $g(n) = \sum_{p \in P} p v_p(n)$, dove $v_p(n)$ è l'esponente di p nella decomposizione in fattori primi di n. Definiamo in $\mathbb{N}^*$ la relazione $\preceq$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \preceq b$ se e solo se $g(a) | g(b)$.

(*i*) Stabilire se $\preceq$ è o non è una relazione d'ordine e se è una relazione d'ordine totale. (*Suggerimento:* $g(2^5) = g(5^2)$?)
(*ii*) Sia $X = \{1, 2, 10, 25, 121\}$. X con la relazione indotta da $\preceq$ è un insieme ordinato? Se sì, disegnare il diagramma di Hasse relativo a $(X, \preceq)$ e determinarne gli elementi minimali e massimali.
(*iii*) Stabilire se $(X, \preceq)$ è un reticolo; se lo è, determinare in esso gli estremi inferiore e superiore di $\{10, 25\}$. $(X, \preceq)$ è un reticolo distributivo? Complementato?

Esercizio 4. Definiamo un'operazione binaria $*$ su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ponendo, per ogni $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X * Y = (X \smallsetminus \{1\}) \cup (Y \smallsetminus \{2\})$.

(*i*) Verificare se $*$ è commutativa e se è associativa.
(*ii*) Determinare in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), *)$ gli elementi neutri a sinistra o a destra (se ne esistono).
(*iii*) Stabilire se $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), *)$ è un semigruppo, un monoide, un gruppo.
(*iv*) Determinare gli elementi idempotenti rispetto a $*$.

Esercizio 5. Descrivere in modo esplicito l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid 15n \equiv_{25} (101)^{44} + 4\}$.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 6. Sia G un grafo semplice connesso con esattamente 15 vertici e 21 lati.

(*i*) È possibile, cancellando solo lati e nessun vertice, ottenere da G un albero? Se sì, quanti lati bisogna cancellare al minimo?
(*ii*) È possibile cancellare da G esattamente 10 lati in modo da ottenere una foresta composta da esattamente 3 componenti connesse?
(*iii*) Supponendo che G abbia un vertice di grado 1, cosa si può dire circa l'esistenza in esso di un cammino euleriano o di un circuito euleriano?
(*iv*) Disegnare, se possibile, tutti gli alberi dotati di un cammino euleriano e tutti gli alberi dotati di un circuito euleriano.

Esercizio 7. Per ogni $m \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ consideriamo il polinomio $p_m = x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}_m[x]$.

(*i*) Determinare tutti gli $m \in \mathbb{N}^*$ per i quali p_m è divisibile per $x^2 + \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_m[x]$.
(*ii*) Fissato un tale $m \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$, descrivere la fattorizzazione di p_m in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_m[x]$.