

$\longrightarrow$
giustificando pienamente tutte le risposte.
 $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Vero o falso? (i) $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(\forall z \in \mathbb{N}(x + y \geq z)))$;
 (ii) $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(\forall z \in \mathbb{N}(x \geq y \Rightarrow x + y < z)))$.

Esercizio 2. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sia R l'insieme formato da tutte le relazioni d'equivalenza su A che hanno una classe di equivalenza con esattamente quattro elementi.

- (i) Calcolare $|R|$.
- (ii) Dare un esempio esplicito di una partizione di A con tre elementi, di cui almeno uno di cardinalità 2, e descrivere la relazione d'equivalenza corrispondente. Esiste in R una tale relazione?
- (iii) Esiste un elemento di R che sia una funzione da A ad A ? E nell'insieme delle relazioni di equivalenza su A ?

Esercizio 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $m(n)$ la massima cifra che appare nella consueta rappresentazione di n in base 10.^(†) Definiamo in $\mathbb{N}$ la relazione d'ordine σ ponendo: per ogni $a, b \in \mathbb{N}$

$$a \sigma b \iff (a = b \vee m(a) \text{ è un divisore proprio di } m(b)).$$

- In $(\mathbb{N}, \sigma)$ determinare:
- (i) gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali;
 - (ii) (dopo aver dato le definizioni di minorante e di estremo inferiore di una parte in un insieme ordinato) gli eventuali minoranti ed estremo inferiore di $X := \{16, 208\}$;
 - (iii) se possibile, sottoinsiemi totalmente ordinati di cardinalità 4, 5, 6.
 - (iv) Dopo aver dato la definizione di reticolo, stabilire se $(\mathbb{N}, \sigma)$ è o non è un reticolo.
 - (v) Posto $L = \{0, 11, 21, 23, 33, 43, 53\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (L, σ) , stabilire se (L, σ) è un reticolo e, in caso di risposta affermativa, se è distributivo, se è complementato e trovare in esso tutti i complementi di 23 e di 43.

Esercizio 4. Sia $S = \{1, 6, 11, 16, 21\}$ e sia $*$ l'operazione binaria su S definita da $a * b = (ab) \bmod 25$ per ogni $a, b \in S$.

- (i) Verificare che $*$ è davvero un'operazione ben definita su S .
- (ii) Costruire la tavola di Cayley di $*$.
- (iii) Stabilire se $(S, *)$ è un semigrupp, un monoide, un gruppo.
- (iv) Determinare, in $(S, *)$, l'eventuale elemento neutro e i simmetrici degli elementi simmetrizzabili.

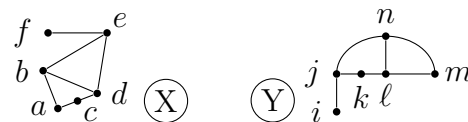
Esercizio 5. (i) Per ogni $m \in \mathbb{Z}$, definire la relazione $\equiv_m$ di congruenza modulo m in $\mathbb{Z}$, dimostrare che è di equivalenza, spiegare cosa significa che essa è compatibile con le operazioni dell'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e dimostrare questo fatto.

(ii) Se $0 \neq m \in \mathbb{Z}$, è vero che $[45m^2 + 16]_m$ è un divisore dello zero in $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ se e solo se m è pari?

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 6. (i) Dare la definizione di isomorfismo tra due grafi semplici $G = (V, L)$ e $G_1 = (V_1, L_1)$.

- (ii) Stabilire se i due grafi connessi X e Y qui disegnati sono o non sono isomorfi. Se non lo sono, spiegare perché, se lo sono costruire esplicitamente un isomorfismo tra essi.



Esercizio 7. (i) Enunciare e dimostrare la formula (o regola) di addizione dei gradi.

- (ii) Trovare un anello commutativo unitario A e due polinomi di grado 7 di $A[x]$ per cui non valga la formula di addizione dei gradi.
- (iii) È possibile trovare un anello commutativo unitario A e un polinomio non nullo di $A[x]$ che abbia più radici del proprio grado?
- (iv) Dare la definizione di polinomio cancellabile e trovare, se possibile, due polinomi cancellabili che abbiano prodotto non cancellabile.

^(†)cioè: posto $n = \sum_{i=0}^k c_i 10^i$, dove $k \in \mathbb{N}$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ tale che $i \leq k$ si ha $9 \geq c_i \in \mathbb{N}$ e $c_k = 0$ solo se $n = 0$, allora $m(n) = \max \{c_i \mid k \geq i \in \mathbb{N}\}$.