

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III) — 5 MARZO 2026

Svolgere i seguenti esercizi,

—————→ *giustificando pienamente tutte le risposte.* ←————

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Completare, aggiungendo un simbolo in ciascuno dei quattro punti indicati, la formula $\dots y \dots x(\dots \dots \psi)$ in modo che essa diventi equivalente alla negazione di $\exists y \forall x((\neg \varphi) \rightarrow \psi)$.

Esercizio 2. (i) Se ρ è il nucleo di equivalenza di un'applicazione $f: U \rightarrow V$ e $s \in U$, è vero che vale $[s]_\rho = \tilde{f}(W)$ per qualche $W \subseteq V$? Nel caso, qual è un tale W ? Fornirne una dimostrazione.

(ii) Stabilire se la relazione binaria $\sim$ definita in $\mathbb{Z}$ da $\forall a, b \in \mathbb{Z}(a \sim b \iff (a \equiv_7 b \wedge a + b \text{ è pari}))$ è di equivalenza. Se lo è:

a) descrivere in modo quanto più esplicito possibile $[37]_\sim$;

b) se $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 55\}$, elencare gli elementi di $A = [37]_\sim \cap B$ e calcolare $|A \triangle B|$.

Esercizio 3. In $S = \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri interi non multipli di 3, sia ρ la relazione d'ordine definita da: $\forall u, v \in S(u \rho v \iff (u|v \wedge u \equiv_3 v))$. In (S, ρ) :

(i) determinare gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo. (S, ρ) è un reticolo?

(ii) Trovare (ove esistano) gli estremi inferiore e superiore di $[1]_3$.

(iii) Sia D l'insieme dei numeri naturali divisori di 20. Disegnare il diagramma di Hasse del sottoinsieme ordinato (D, ρ) , determinandone gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo. (D, ρ) è un reticolo?

(iv) La relazione binaria σ definita in S da $\forall u, v \in S(u \sigma v \iff (u|v \wedge u \equiv_2 v))$ è d'ordine?

Esercizio 4. (i) Dare la definizione di *elemento cancellabile a destra* in un semigruppato $(S, \cdot)$.

Per ogni $a \in \mathbb{Z}_{360}$ si considerino le applicazioni $\alpha_a: x \in \mathbb{Z}_{360} \mapsto x + a \in \mathbb{Z}_{360}$ e $\mu_a: x \in \mathbb{Z}_{360} \mapsto xa \in \mathbb{Z}_{360}$.

(ii) Con riferimento alle applicazioni α_a e μ_a appena definite, si dica per quali $a \in \mathbb{Z}_{360}$ sono iniettive, per quali sono suriettive, per quali biettive.

(iii) Per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{360}$, si descriva l'applicazione composta $f_{a,b} = \alpha_b \circ \mu_a$ e si descriva poi l'insieme $R := \{(a, b) \in \mathbb{Z}_{360} \times \mathbb{Z}_{360} \mid f_{a,b} \text{ è biettiva}\}$.

(iv) Descrivere esplicitamente l'applicazione inversa di $f_{[7]_{360}, [3]_{360}}$, se questa è biettiva.

(v) Sia $A := \{[1]_{360}, [-1]_{360}\}$. L'insieme $T := \{f_{a,b} \mid a \in A \wedge b \in \mathbb{Z}_{360}\}$ è una parte chiusa del monoide delle applicazioni di $\mathbb{Z}_{360}$ in sé? Ne è un sottomonoide?

Esercizio 5. Facendo riferimento alle rappresentazioni di un numero naturale in base 10,^(†) indicare (*non calcolare!*):

(i) quanti sono i numeri naturali minori di 10^6 in cui la cifra 4 appare esattamente tre volte,

(ii) quanti sono i numeri naturali n tali che $10^5 \leq n \leq 10^6$ le cui cifre sono tutte diverse tra loro.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 6. Costruire, o dimostrare che non esistono, grafi semplici $G = (V, L)$ tali che:

a) $|V| = 13$; tra i vertici di G due hanno grado 1, quattro hanno grado 2, cinque hanno grado 3, i rimanenti due hanno grado 4.

b) G è connesso e $|V| = 7$; tra i vertici di G uno ha grado 6, due hanno grado 1, i rimanenti quattro hanno grado 2.

c) Il grafo verifica gli stessi vincoli del precedente ma non è isomorfo ad esso.

d) $|V| = |L| = 8$; inoltre tra i vertici di G tre hanno grado 1, uno ha grado 3, i rimanenti quattro hanno grado 2.

Esercizio 7. (i) Per $n = 5$ e $n = 6$, fornire se possibile un esempio di polinomio riducibile di grado n in $\mathbb{Q}[x]$, che sia privo di radici in $\mathbb{Q}$ e non abbia, in $\mathbb{Q}[x]$, divisori di grado 2.

(ii) Il polinomio $(x^2 + 1)(x^3 + 2)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$?

(iii) Determinare (se ne esistono) i numeri primi positivi p tali che il polinomio

$f_p := (50x^4 - 121)(x^2 + 13x - 15) \in \mathbb{Z}_p[x]$ sia irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

^(†)cioè: rappresentazioni di un numero naturale n come stringa di cifre " $c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$ ", dove $k \in \mathbb{N}$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ tale che $i \leq k$ si ha $9 \geq c_i \in \mathbb{N}$, e dove $n = \sum_{i=0}^k c_i 10^i$ e (SUGGERIMENTO!) non necessariamente $c_k = 0$.