

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA — 9 LUGLIO 2026

Nome: _____ Cognome: _____ matricola: _____

La prova consiste in due parti: domande ed esercizi. Rispondere a *tutte* le domande in questa pagina, fornendo le risposte direttamente su questo foglio. Solo dopo averlo fatto, svolgere gli esercizi sul retro.

Al termine della prova andranno consegnati, unitamente, questo foglio ed i fogli aggiuntivi con lo svolgimento degli esercizi, ed anche su questi ultimi andranno riportati nome, cognome e matricola.

Domande:

- Marcare tutte e sole le forme proposizionali logicamente equivalenti a $\neg((p \vee q) \rightarrow p)$.
 $q \wedge \neg p$ ☐; $p \wedge \neg q$ ☐; $q \rightarrow p$ ☐; $(p \vee q) \wedge \neg p$ ☐; $\neg p \wedge \neg q$ ☐; $\neg(\neg(p \vee q) \vee p)$ ☐.
- Per ciascuno degli anelli qui elencati, indicare tutte e sole le proprietà vere.
 $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$: è un campo ☐; è un dominio di integrità ☐; è booleano ☐; ha divisori dello zero non nulli ☐;
 $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$: è un campo ☐; è un dominio di integrità ☐; è booleano ☐; ha divisori dello zero non nulli ☐;
 $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$: è un campo ☐; è un dominio di integrità ☐; è booleano ☐; ha divisori dello zero non nulli ☐;
 $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$: è un campo ☐; è un dominio di integrità ☐; è booleano ☐; ha divisori dello zero non nulli ☐;
 $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$: è un campo ☐; è un dominio di integrità ☐; è booleano ☐; ha divisori dello zero non nulli ☐.
- Sia $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36\}$ e consideriamo l'insieme $(S, |)$ ordinato per divisibilità. Vero o falso?
 $(S, |)$ è un reticolo ☐ V ☐ F ☐; $1 = \min(S, |)$ ☐ V ☐ F ☐;
 $(S, |)$ è totalmente ordinato ☐ V ☐ F ☐; $\inf(\{12, 18\}) = 6$ ☐ V ☐ F ☐;
Ogni sottoinsieme ordinato non vuoto di $(S, |)$ ha massimo ☐ V ☐ F ☐.
- Sia $L = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, ordinato per inclusione. Vero o falso?
 L è un reticolo booleano. ☐ V ☐ F ☐
L'insieme degli elementi di cardinalità pari è un sottoreticolo di L . ☐ V ☐ F ☐
Il sottoinsieme ordinato $\{x \in L \mid \{1\} \subseteq x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$ ha 4 elementi ed è un reticolo booleano. ☐ V ☐ F ☐
Ogni elemento di L ha un unico complemento. ☐ V ☐ F ☐
 $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ è un sottoreticolo di L . ☐ V ☐ F ☐.
- Sia $*$ l'operazione binaria in $\mathbb{Z}_{10}$ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{10} (a * b = \bar{3}a + \bar{7}b)$.
 $\bar{0}$ è l'unico idempotente in $(\mathbb{Z}_{10}, *)$? sì ☐ no ☐; $*$ è associativa? sì ☐ no ☐;
 $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ ha un neutro a destra? sì ☐ no ☐; $*$ è commutativa? sì ☐ no ☐.
- Sia $n = 2^{100} \cdot 3 \cdot 5$. Vero o falso?
 $-2^{100} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ è un mem tra n e $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ in $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ☐ V ☐ F ☐;
Il numero dei divisori di n in $\mathbb{N}$ multipli di 6 è $100 \cdot 1 \cdot (1 + 1)$ ☐ V ☐ F ☐;
Il numero dei divisori di n in $\mathbb{N}$ è $(100 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$ ☐ V ☐ F ☐;
Il numero dei divisori di n in $\mathbb{Z}$ è $2(100 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$ ☐ V ☐ F ☐.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

- In $\mathbb{Z}_5[x]$, sia $f = (x - \bar{1})(x - \bar{3})(x^2 + \bar{2})$. Vero o falso?
 f è monico ☐ V ☐ F ☐; f ha esattamente due radici in $\mathbb{Z}_5$ ☐ V ☐ F ☐;
in $\mathbb{Z}_5[x]$, f ha un divisore irriducibile di grado 2 ☐ V ☐ F ☐; f è irriducibile in $\mathbb{Z}_5[x]$ ☐ V ☐ F ☐.

Seconda parte: esercizi. Gli esercizi dovranno essere svolti su fogli a parte, **giustificando pienamente tutte le risposte**; le sole risposte finali dovranno essere riportate anche sul retro di questo foglio, negli spazi indicati.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 1. Siano V un insieme di cardinalità 15 e T l'insieme dei grafi semplici $G = (V, L)$ tali che $|L| = 12$ e G abbia un vertice di grado 8.

- (i) Esiste almeno un grafo in T ? Ne esistono almeno due non isomorfi tra loro?
- (ii) Esiste in T un grafo connesso?
- (iii) Esiste in T una foresta?
- (iv) Esiste in T un grafo con un cammino euleriano?

Esercizio 2. Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 8\}$ e $B := \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$; sia M l'insieme delle applicazioni da A a B . In M si considerino le relazioni binarie α, β e γ definite dall'essere, per ogni $f, g \in M$:

$$f \alpha g \iff (f(0) = g(1)), \quad f \beta g \iff (f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1))$$

$$\text{e} \quad f \gamma g \iff (f(0) = g(0) \vee f(1) = g(1)).$$

- (i) Di ciascuna delle tre, si stabilisca se è o non è una relazione di equivalenza.

Fissata e chiamata σ una tra α, β e γ che sia di equivalenza, e detta c l'applicazione costante $x \in A \mapsto 3 \in B$,

- (ii) si descriva $[c]_\sigma$, indicando quanti elementi ha e quanti tra essi sono applicazioni iniettive.
- (iii) Esiste $f \in M$ tale che $|[f]_\sigma| \neq |[c]_\sigma|$?
- (iv) Esprimere (non calcolare) $|M/\sigma|$.

Esercizio 3. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 10\}$ e sia $f: A \rightarrow A$ l'applicazione definita dalla tabella

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2	3	1	5	6	5	6	8	8	9

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $f^0 = \text{id}_A$ e $f^{n+1} = f \circ f^n$.

- (i) Determinare $\vec{f}(A)$ e, per ogni $a \in A$, determinare $\vec{f}(\{a\})$.
- (ii) Stabilire se f è iniettiva e se è suriettiva. Stabilire inoltre se esiste un'applicazione $g: A \rightarrow A$ tale che $f \circ g = \text{id}_A$, e se esiste un'applicazione $h: A \rightarrow A$ tale che $h \circ f = \text{id}_A$.
- (iii) Determinare gli elementi fissati (cioè mandati in sé stessi) da f , gli elementi fissati da f^2 e gli elementi fissati da f^3 .
- (iv) Posto $C = \vec{f}^2(A)$, provare che $\vec{f}(C) = C$. Stabilire se l'applicazione $C \rightarrow C$ indotta per restrizione da f è biettiva e, in caso affermativo, scriverne l'inversa.
- (v) Determinare i sottoinsiemi S di A tali che $\vec{f}(S) = S$. Esprimere, senza calcolarlo, il numero di tali sottoinsiemi.

Schema sintetico delle risposte:

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 1:

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
-----	------	-------	------

Esercizio 2:

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
-----	------	-------	------

Esercizio 3:

(i)	(ii)	(iii)
(iv)	(v)	