

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA — 28 LUGLIO 2026

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

La prova consiste in due parti: domande ed esercizi. Rispondere a *tutte* le domande in questa pagina, fornendo le risposte direttamente su questo foglio. Solo dopo averlo fatto, svolgere gli esercizi sul retro.

Al termine della prova andranno consegnati, unitamente, questo foglio ed i fogli aggiuntivi con lo svolgimento degli esercizi, ed anche su questi ultimi andranno riportati nome, cognome e matricola.

Domande:

- Sia L l'insieme delle parti infinite di $\mathbb{Z}$, ordinato per inclusione. Vero o falso?
 L ha elementi massimali $V \square F \square$. L ha elementi minimali $V \square F \square$.
 L è totalmente ordinato $V \square F \square$. Esistono in L due elementi non confrontabili tra loro $V \square F \square$.
- Ponendo $x = (a \setminus b) \cup (a \cap c)$ e $y = a \cap (b \cup c)$, marcare tutte e sole le affermazioni vere per ogni scelta di a, b, c :
 $x \subseteq a \square$; se $b \subseteq c$, allora $y = a \cap c \square$; $x \cap y = a \cap c \square$; $y \subseteq x \square$; $x \cup y = a \square$.
- Sia s un insieme di cardinalità 8. Vero o falso?
Il numero delle parti di s di cardinalità 3 è $\binom{8}{3}$ $V \square F \square$.
Il numero delle parti di s di cardinalità almeno 6 è $\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$ $V \square F \square$.
Il numero delle parti di s di cardinalità pari è $2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8$ $V \square F \square$.
Il numero delle parti di $\mathcal{P}(s)$ di cardinalità 3 è $\binom{2^8}{3}$ $V \square F \square$.
- Supposti dati un monoide M con elemento neutro t ed un suo elemento x tale che $x^{150} = t$, di ciascuna delle affermazioni che seguono dire se è certamente vera (V), certamente falsa (F) oppure può essere vera o falsa a seconda della scelta di M e x (?).
 $x = t$ $V \square F \square ? \square$; M è un gruppo $V \square F \square ? \square$;
 x è invertibile in M $V \square F \square ? \square$; $x^{15001} = x$ $V \square F \square ? \square$.
- L'insieme delle soluzioni (in $\mathbb{Z}$) dell'equazione congruenziale $x + 5 \equiv_{32} 13(x + 1)$ è:
 $[2]_4 \square$; $[2]_{32} \square$; $[2]_{16} \square$; $[2]_8 \square$; $\emptyset \square$; nessuna delle precedenti $\square$.
- Marcare, tra le seguenti, tutte e sole le forme proposizionali equivalenti a $p \text{ XOR } q$.
 $(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q) \square$; $\neg(p \leftrightarrow q) \square$; $(p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q) \square$; $p \rightarrow (\neg q) \square$; $(p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q)) \square$.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

- Sia V l'insieme dei numeri naturali minori di 30 e sia G il grafo (V, L) , dove $L = \{\{a, b\} \mid |a - b| > 10\}$.
 G è connesso $V \square F \square$; G ha un ciclo di lunghezza tre $V \square F \square$; G è completo $V \square F \square$;
 G è un albero $V \square F \square$.

Seconda parte: esercizi. Gli esercizi dovranno essere svolti su fogli a parte, **giustificando pienamente tutte le risposte**; le sole risposte finali dovranno essere riportate anche sul retro di questo foglio, negli spazi indicati.

Esercizio 1. Si definisca in $\mathbb{Z}$ la relazione binaria ρ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \rho b$ se e solo se 6 divide (almeno) uno tra $a - b$ e $a + b$.

(i) ρ è una relazione di equivalenza?

Se lo è:

(ii) descrivere esplicitamente $[8]_\rho$ e $[3]_\rho$;

(iii) calcolare $|\mathbb{Z}/\rho|$.

Infine, in ciascun caso,

(iv) stabilire per quali interi n la relazione binaria σ_n definita in $\mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sigma_n b$ se e solo se n divide (almeno) uno tra $a - b$ e $a + b$ è di equivalenza.

Esercizio 2. Si definiscano in $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le operazioni binarie $\oplus$ e $*$ ponendo, per ogni $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$:

$$(a, \alpha) \oplus (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta) \quad \text{e} \quad (a, \alpha) * (b, \beta) = (ab, a\beta + b\alpha).$$

(i) Assumendo come noto che $(A, \oplus, *)$ sia un anello, stabilire:

a) se $(A, \oplus, *)$ è commutativo, se è unitario (nel caso: con quale unità?), se è booleano;

b) se, in $(A, \oplus, *)$, l'elemento $(3, 0)$ è un divisore dello zero, se è cancellabile, se è invertibile;

c) se $(A, \oplus, *)$ è un dominio di integrità e se è un campo;

d) se $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ costituisce un sottoanello di $(A, \oplus, *)$ e se ne costituisce un sottoanello unitario.

(ii) Verificare se, effettivamente, $(A, \oplus, *)$ è o non è un anello.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 3. In $\mathbb{Z}_{13}[x]$, sia $f = \bar{7}x^4 - \bar{3}x^2 + \bar{4}$. Dopo aver calcolato $f(\bar{1})$, $f(\bar{2})$ ed $f(-\bar{2})$, si scriva f come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_{13}[x]$. Si può rappresentare f come prodotto di polinomi monici di $\mathbb{Z}_{13}[x]$?

Schema sintetico delle risposte:

Esercizio 1:

(i)	(ii)	(iii)	(iv)

Esercizio 2:

(i.a)	(i.b)	(i.c)	(i.d)	(ii)

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 3:

$f(\bar{1})$	$f(\bar{2})$	$f(-\bar{2})$	decomposizione	... in monici (s/n)