

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA — 3 SETTEMBRE 2026

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

La prova consiste in due parti: domande ed esercizi. Rispondere a *tutte* le domande in questa pagina, fornendo le risposte direttamente su questo foglio. Solo dopo averlo fatto, svolgere gli esercizi sul retro.

Al termine della prova andranno consegnati, unitamente, questo foglio ed i fogli aggiuntivi con lo svolgimento degli esercizi, ed anche su questi ultimi andranno riportati nome, cognome e matricola.

Domande:

- Tra le seguenti forme proposizionali si marchino le due che sono logicamente equivalenti tra loro.
 $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \square$; $p \wedge (q \rightarrow p) \square$; $p \vee (q \rightarrow p) \square$; $(p \vee q) \rightarrow p \square$; $(p \wedge q) \rightarrow p \square$.
- Siano a e b insiemi di cardinalità 180. Vero o falso?
Esiste un'applicazione iniettiva non suriettiva $a \rightarrow b$ V ☐ F ☐
Esiste un'applicazione suriettiva non iniettiva $a \rightarrow b$ V ☐ F ☐
Ogni applicazione $a \rightarrow b$ è biiettiva V ☐ F ☐
Esiste un'applicazione biiettiva $a \rightarrow b$ V ☐ F ☐
- Sia $f: a \rightarrow b$ un'applicazione. Di ciascuna delle seguenti formule si dica se equivale alla proprietà che f sia iniettiva (I), alla proprietà che f non sia iniettiva (N), oppure a nessuna delle due (X).
Per ogni $y \in b$, $\overleftarrow{f}(\{y\})$ ha al più un elemento I ☐ N ☐ X ☐
Esiste $y \in b$ tale che $\overleftarrow{f}(\{y\})$ abbia almeno due elementi I ☐ N ☐ X ☐
Per ogni $x \in a$, $\overleftarrow{f}(\{f(x)\}) = \{x\}$ I ☐ N ☐ X ☐
- Siano $P = 2\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi pari e $*$ l'operazione binaria in $\mathbb{Z}$ definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = a$ se $a \in P$, $a * b = b$ se $a \notin P$. Vero o falso?
 $\mathbb{Z} \setminus P$ è chiuso in $(\mathbb{Z}, *)$ V ☐ F ☐; $*$ è commutativa V ☐ F ☐; $(\mathbb{Z}, *)$ ha neutri a sinistra V ☐ F ☐;
 $(\mathbb{Z}, *)$ ha neutri a destra V ☐ F ☐; $*$ è associativa V ☐ F ☐; P è chiuso in $(\mathbb{Z}, *)$ V ☐ F ☐.
- Per ciascuna delle equazioni congruenziali che seguono, dire se l'insieme delle sue soluzioni in $\mathbb{Z}$ è vuoto ($\emptyset$), è una classe di resto modulo 14 (u), è unione di più di una classe di resto modulo 14 (m).
 $21x \equiv_{14} 12$ $\emptyset \square$ u ☐ m ☐; $6x \equiv_{14} x + 2$ $\emptyset \square$ u ☐ m ☐;
 $100x \equiv_{14} 1000$ $\emptyset \square$ u ☐ m ☐; $6x \equiv_{14} 0$ $\emptyset \square$ u ☐ m ☐.
- Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$. In $\mathcal{P}(A)$ sia σ la relazione di equivalenza definita da: per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \sigma Y$ se e solo se $|X \cap \{1, 2\}| = |Y \cap \{1, 2\}|$ e $|X \cap \{3, 4\}| \equiv_2 |Y \cap \{3, 4\}|$. Vero o falso?
 $|\mathcal{P}(A)/\sigma| = 6$ V ☐ F ☐; $\{\{1, 3\}\}_\sigma = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ V ☐ F ☐; $\{1, 2\} \sigma \{3, 4\}$ V ☐ F ☐.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

- Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni scelta dell'anello commutativo unitario A , del polinomio $f \in A[x]$ e di $a, b \in A$.
Se a e b sono radici di f , A è un campo e $a \neq b$, allora $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$ V ☐ F ☐
Se $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$, allora $f(a) = f(b) = 0_A$ V ☐ F ☐
Se a e b sono radici di f ed A è un dominio di integrità, allora $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$ V ☐ F ☐
Se A è un dominio di integrità, e $f \neq 0_A$, allora f è cancellabile in $A[x]$ V ☐ F ☐

Seconda parte: esercizi. Gli esercizi dovranno essere svolti su fogli a parte, **giustificando pienamente tutte le risposte**; le sole risposte finali dovranno essere riportate anche sul retro di questo foglio, negli spazi indicati.

Esercizio 1. Sia $P = \{2, 3, 5, 7\}$ e sia ρ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{Z}$ da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \rho b$ se e solo se $(\exists c \in \mathbb{N} \setminus P)(b = ac)$.

- (i) Descrivere esplicitamente gli (eventuali) minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{Z}, \rho)$.
- (ii) $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un reticolo?
- (iii) Posto $X = \{8, 12\}$, descrivere esplicitamente gli insiemi $A = X^\downarrow$ dei minoranti e $B = X^\uparrow$ dei maggioranti di X in $(\mathbb{Z}, \rho)$ e, se esistono, $\inf X$ e $\sup X$.
- (iv) Sia $L = \{0, 1, 4, 8, 11, 12, 16, 32\}$. Disegnare il diagramma di Hasse di (L, ρ) , stabilire se questo ultimo è un reticolo e, nel caso lo sia, se è complementato, distributivo, booleano.

Esercizio 2. Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 10 \leq n < 15\}$ e $C = A \cup B$. Siano:

- S l'insieme delle stringhe di lunghezza 12 nell'alfabeto C ,
- T l'insieme delle stringhe in S in cui i primi sette caratteri appartengano ad A ed i rimanenti cinque a B ,
- U l'insieme delle stringhe in S in cui esattamente sette dei dodici caratteri (in posizioni arbitrarie) appartengano ad A ,
- V l'insieme delle stringhe in U in cui i caratteri appartenenti ad A siano a due a due distinti,
- W l'insieme delle stringhe in U in cui appaia esattamente due volte il carattere 4.

Esprimere (non calcolare!) $|S|$, $|T|$, $|U|$, $|V|$, $|W|$.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 3. Siano $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 100\}$, $P = \{\{a, b\} \mid a, b \in V \wedge a + b \text{ è pari}\}$ e $D = \{\{a, b\} \mid a, b \in V \wedge a + b \text{ è dispari}\}$.

- (i) Di ciascuno tra P e D si dica se è o non è l'insieme dei lati di un grafo semplice con V come insieme dei vertici. Si fissi e si chiami G uno tra (V, P) e (V, D) in modo che G sia, appunto, un grafo semplice.
- (ii) Determinare il grado di 33 in G . Esistono in G vertici di grado diverso?
- (iii) G è connesso? È un albero? È una foresta?
- (iv) G ha cammini euleriani? Ha circuiti euleriani?

Schema sintetico delle risposte:

Esercizio 1:

(i)	(ii)	(iv)
(iii)		

Esercizio 2:

S	T	U	V	W
---	---	---	---	---

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 3:

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
-----	------	-------	------