

NOME E COGNOME	MATRICOLA
GRUPPO <input type="checkbox"/> I (Rao) <input type="checkbox"/> IV (Cutolo)	PREFERENZA PER L'ESAME <input type="checkbox"/> urgenti <input type="checkbox"/> non urgenti

**1** Si completi la definizione: una *permutazione* di un insieme  $A$  è: .....

• Il teorema di Bézout (per i numeri interi) afferma che .....

**2** Se  $n$  è un (non specificato) numero intero,  $17n^{17} + 3n^{13} + 4n^n$  è:  pari,  dispari,  né pari né dispari,  sia pari che dispari,  impossibile stabilirlo,  nessuna delle precedenti.

**3** Esiste un grafo  $G = (V, L)$  tale che  $|V| = 7$  ed  $|L| = 8$  ed in cui due vertici abbiano grado 1 e quattro grado 2? sì  no  impossibile stabilirlo . Nel caso esista:

- quale deve essere il grado del settimo vertice? . . . , oppure  non è possibile stabilirlo;
- quanti sono a meno di isomorfismi tali grafi? . . . , oppure  non è possibile stabilirlo;
- disegnare quanti più possibile di tali grafi, a due a due non isomorfi tra loro:

**4** Di ciascuno dei seguenti insiemi dire se, ordinato per inclusione, costituisce un reticolo.

- |   |  |
|---|--|
| $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \subseteq \mathbb{N}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/>                   | $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \neq \mathbb{N}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/>                           |
| $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \not\subseteq \mathbb{N}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/>               | $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid 11 \in X\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/>                                    |
| $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \text{ è finito}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/>                       | $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \text{ è infinito}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/>                        |
| $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \text{ è finito e }  X  \text{ è pari}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> | $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid X \text{ è finito e }  X  \text{ è dispari}\}$ sì <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> |

**5** Sia  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \wedge 3 \text{ divide } n\}$ . Calcolare  $|X| = \dots$ . Si consideri in  $X$  la relazione binaria  $\sim$  definita ponendo, per ogni  $x, y \in X$ ,

$$x \sim y : \iff (5 \mid (x - y) \wedge 2 \mid (x + y)).$$

$\sim$  è riflessiva? sì  no , antiriflessiva? sì  no , simmetrica? sì  no , antisimmetrica? sì  no , transitiva? sì  no , una equivalenza? sì  no , un ordinamento stretto? sì  no , un ordinamento largo? sì  no .

Se  $\sim$  è una equivalenza, si indichino:  $|S/\sim| = \dots$ ,  $|[3]_\sim| = \dots$  e

$$[33]_\sim = \{ \dots \}.$$

**6** Si consideri la forma proposizionale  $\Phi: ((p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))$ . Indicare (scrivendo V o F negli appositi spazi) una terna di valori di verità da sostituire a  $p, q$  ed  $r$  che rendano vera  $\Phi$ :

$\Phi$  è vera per:  $p \dots, q \dots, r \dots$ , oppure  $\square$  non esiste tale terna;

analogamente, indicare una terna di valori di verità; da sostituire a  $p, q$  ed  $r$  che rendano  $\Phi$  falsa:

$\Phi$  è falsa per:  $p \dots, q \dots, r \dots$ , oppure  $\square$  non esiste tale terna.

$\Phi$  è  $\square$  una tautologia,  $\square$  contingente,  $\square$  una contraddizione.

**7** Senza usare l'algoritmo euclideo si calcoli il massimo comun divisore monico  $d$  in  $\mathbb{Q}[x]$  tra i polinomi  $f = 8x^5 - 4x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 14$  e  $g = f - 3$ .

$$d = \dots\dots\dots$$

Quali e quante sono, in  $\mathbb{Q}$ , le radici comuni ad  $f$  e  $g$ ?

$$S := \{c \in \mathbb{Q} \mid f(c) = g(c) = 0\} = \dots\dots\dots; \quad |S| = \dots$$

**8** Con  $a = 4331$  e  $b = 4087$ , si trovino, in  $\mathbb{N}$ ,  $d = \text{mcd}(a, b)$  e  $m = \text{mcm}(a, b)$  e, in  $\mathbb{Z}$ ,  $u$  e  $v$  tali che  $d = au + bv$ .

$$d = \dots\dots\dots, \quad m = \dots\dots\dots, \quad u = \dots\dots\dots, \quad v = \dots\dots\dots$$

Per ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali si trovi l'insieme (rispettivamente  $S_1, S_2, S_3, S_4$ ) di tutte le soluzioni intere:

$$ax \equiv_b 2d. \quad S_1 = \dots\dots\dots$$

$$bx \equiv_a 2d. \quad S_2 = \dots\dots\dots$$

$$abx \equiv_d 2d. \quad S_3 = \dots\dots\dots$$

$$abx \equiv_m 2d. \quad S_4 = \dots\dots\dots$$