## 2. Roba che serve, da piazzare da qualche parte

**Lemma 2.1.** *Sia $M$ un modulo su un anello commutativo unitario $R$, e sia $\mathcal{C}$ una catena non vuota di sottomoduli di $M$. Allora $V := \bigcup \mathcal{C}$ è un sottomodulo di $M$ e, se $V$ è finitamente generato, $V = \max \mathcal{C}$.*

**Lemma 2.2.** *Sia $R$ un anello commutativo; siano $S$ una parte stabile di $(R, \cdot)$ e $H \lhd R$ tali che $S \cap H = \varnothing$. Allora, ordinato per induzione, l'insieme $\{I \lhd R \mid I \subseteq H \wedge I \cap S = \varnothing\}$ è induttivo; ogni suo elemento massimale è un ideale primo di $R$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di ideali definito nell'enunciato. È chiaro che l'unione di una arbitraria catena non vuota di elementi di $\mathcal{S}$ è in $\mathcal{S}$, quindi $\mathcal{S}$ è induttivo. Sia $P$ un suo elemento massimale. Dal momento che $P \cap S = \varnothing$, $P \subset R$. Se $P$ non è primo esistono $I, J \lhd R$ tali che $IJ \subseteq P \subset I, J$. La massimalità di $P$ in $\mathcal{S}$ implica che $I, J \notin \mathcal{S}$, dunque $I \cap S \neq \varnothing \neq J \cap S$. Siano $i \in I \cap S$ e $j \in J \cap S$. Allora $ij \in S$ ma, d'altra parte, $ij \in IJ \subseteq P$. Dunque $ij \in P \cap S$, contraddicendo così la scelta di $P$. Si conclude in questo modo che $P$ è un ideale primo. □

**Lemma 2.3** (Il 'prime-avoidance lemma')**.** *Sia $\mathcal{P}$ un insieme finito di ideali primi in un anello commutativo $R$. Allora ogni sottoanello $A$ di $R$ che sia contenuto in $\bigcup \mathcal{P}$ è contenuto in almeno un elemento di $\mathcal{P}$.*

*Dimostrazione.* Ragionando per assurdo, supponiamo che $R$, $A$ e $\mathcal{P}$ forniscano un controesempio in cui $|\mathcal{P}|$ ha il minimo valore possibile. Chiaramente $|\mathcal{P}| > 1$ e, per minimalità, scelto comunque $P \in \mathcal{P}$ e posto $\hat{\mathcal{P}}_P = \mathcal{P} \smallsetminus \{P\}$, si ha $A \nsubseteq \bigcup \hat{\mathcal{P}}_P$. Per ogni $P \in \mathcal{P}$ possiamo allora scegliere $a_P \in A \smallsetminus \bigcup \hat{\mathcal{P}}_P$. Vediamo che $a_P$ appartiene a $P$, dal momento che non appartiene a nessun altro elemento di $\mathcal{P}$. Poniamo anche, sempre per ogni $P \in \mathcal{P}$, $b_P = \prod_{Q \in \hat{\mathcal{P}}_P} a_Q$; si ha $b_P \in A \cap Q$ per ogni $Q \in \hat{\mathcal{P}}_P$, ma $b_P \notin P$, perché $P$ è primo e, per ogni $Q \in \hat{\mathcal{P}}_P$, $a_Q \notin P$. Sia ora $a = \sum_{P \in \mathcal{P}} b_P$. Ovviamente $a \in A$, quindi esiste $Q \in \mathcal{P}$ tale che $a \in Q$. Ma $b_P \in Q$ per ogni $P \in \hat{P}_Q$ e $b_Q \notin Q$, questa è dunque una contraddizione. □

**Esercizi.**

**2.A.1.** Due risultati in teoria dei gruppi (il primo dei quali del tutto elementare, il secondo un poco meno) mostrano che un gruppo non può essere unione di due suoi sottogruppi propri e che se è unione di un numero finito di sottogruppi almeno uno di questi deve avere indice finito. Usare questi due fatti per estendere il Lemma 2.3 in questi modi:

- vale la stessa conclusione del Lemma 2.3 se l'ipotesi che $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ è sostituita dall'ipotesi che al massimo due ideali di $\mathcal{P}$ non siano primi;
- vale la stessa conclusione del Lemma 2.3 se l'ipotesi che $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ è sostituita dalle ipotesi che $R$ sia unitario, $A \lhd R$ e $R/M$ sia infinito per ogni $M \lhd\!\cdot\, R$.
- un anello unitario ha la proprietà che tutti i suoi ideali massimali hanno indice infinito se ha un sottoanello unitario con questa proprietà. Dunque, se un anello unitario $R$ contiene un campo infinito come sottoanello unitario, allora $R/M$ è infinito per ogni $M \lhd\!\cdot\, R$.

Il primo enunciato si trova (all'incirca: lì gli anelli sono unitari) in Sharp, Theorem 3.61. A proposito del secondo e del terzo, partendo dal gruppo $V_4$ di Klein, che è l'unione dei suoi tre sottogruppi non banali, mostrare che esiste un anello unitario $R$ che ha un campo infinito come sottoanello ed un ideale massimale che è unione di un numero finito di ideali propriamente contenuti in esso.

3.2. **Sottoinsiemi e sottomonoidi saturi.** Una parte $X$ di un semigruppo commutativo $(M, \cdot)$ si dice *satura* se e solo se, per ogni $x \in X$, ogni divisore (in $M$) di $x$ appartiene a $X$. È chiaro che una arbitaria intersezione di parti sature di $M$ è ancora satura. Per ogni $S \subseteq M$, la parte satura generata da $S$ è l'intersezione delle parti sature di $M$ contenenti $S$, quindi la più piccola parte satura di $M$ contenente $S$. La dimostrazione del prossimo lemma è ovvia e la omettiamo, notiamo soltanto che con $\mathrm{Div}_M(s)$ indichiamo l'insieme dei divisori in $M$ del suo elemento $s$.

**Lemma 3.3.** *Siano $M$ un semigruppo e $S \subseteq M$. Allora la parte satura generata da $S$ è $\bigcup\{\mathrm{Div}_M(s) \mid s \in S\}$. Se $S$ è un sottosemigruppo, anche questo insieme è un sottosemigruppo.*

Se $M$ è un monoide (è questo il caso al quale siamo particolarmente interessati), è chiaro che ogni parte satura contiene $\mathcal{U}(M)$. Chiameremo *saturazione* di una parte $S$ di un monoide $M$ la parte satura generata dal sottomonoide generato da $S$ (quindi la parte "chiusa e satura" generata da $S$). Indicheremo la saturazione di $S$ in $M$ come $\hat{S}$ (almeno quando si può sottintendere un riferimento a $M$); per quanto detto sopra $\hat{S}$ è un sottomonoide di $M$ e consiste dei divisori di prodotti di elementi di $S$.

**Esercizi.**
**3.A.1.** Sia $R$ è un anello commutativo. Allora $R \smallsetminus H$ è saturo in $R$ per ogni $H \lhd R$.
**3.A.2.** Sia $R$ un anello commutativo. Qual è la parte satura di $(R, \cdot)$ generata da $\{0\}$?
**3.A.3.** Sia $S = \{a, b, c, d\}$ un insieme di cardinalità 4. Nel monoide $(\mathcal{P}(S) \smallsetminus \mathcal{P}_1(S), \cup)$, la parte $\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ è satura, ma il sottomonoide (ovvero la parte stabile) che essa genera non lo è.

Sia ora $R$ un anello commutativo e sia $H$ un ideale proprio di $R$. È chiaro che $R \smallsetminus H$ è una parte satura in $(R, \cdot)$ che contiene $1_R$ se $R$ è unitario, e che essa è stabile se e solo se $H$ è primo. Abbiamo:

**Lemma 3.4.** *Sia $R$ un anello commutativo unitario e sia $S$ una sua parte. Allora $S$ è un sottomonoide saturo di $(R, \cdot)$ se e solo se $R \smallsetminus S$ è unione di ideali primi di $R$.*

*Dimostrazione.* Per quanto osservato prima dell'enunciato, per ogni $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $R \smallsetminus P$ è un sottomonoide saturo di $(R, \cdot)$. Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$. Allora $R \smallsetminus \bigcup \mathcal{S} = \bigcap_{P \in \mathcal{S}}(R \smallsetminus P)$ è intersezione di sottomonoidi saturi in $(R, \cdot)$, quindi esso stesso un sottomonoide saturo. Viceversa, sia $S$ un un sottomonoide saturo di $(R, \cdot)$. Per ogni $a \in R \smallsetminus S$ si ha $aR \cap S = \varnothing$, dal momento che se esistesse $s \in aR \cap S$ allora $a$ sarebbe un divisore di $s \in S$ e quindi $a \in S$. Possiamo allora utilizzare il Lemma 2.2 per ottenere un ideale primo $P_a$ disgiunto da $S$. Scelto un tale $P_a$ per ogni scelta di $a$, abbiamo chiaramente $R \smallsetminus S = \bigcup\{P_a \mid a \in R \smallsetminus S\}$. La dimostrazione è così completata. $\square$

## 4. Anelli di frazioni

Sia $S$ un sottoinsieme di un anello commutativo unitario $R$. Vogliamo costruire un anello commutativo unitario $S^{-1}R$ legato ad $R$ da un omomorfismo $R \to S^{-1}R$ di anelli unitari che mandi ogni elemento di $S$ in un elemento invertibile di $S^{-1}R$, e che sia, in un qualche senso, minimale ed universale per questa proprietà.

Possiamo codificare queste richieste in termini di una proprietà universale di diagrammi. Chiamiamo *$S$-inverting* un omomorfismo di anelli unitari di dominio $R$ tale che l'immagine di $S$ sia costituita da elementi invertibili. Quello che vogliamo costruire è (un anello commutativo unitario $S^{-1}R$ e) un omomorfismo di anelli unitari $f_S\colon R \to S^{-1}R$ che sia $S$-inverting e tale che, per ogni omomorfismo $S$-inverting di anelli unitari commutativi $g\colon R \to A$ esista uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon S^{-1} \to A$ tale che $f_S\varphi = g$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f_S"] \arrow[dr, "g"'] & & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Il ragionamento che abbiamo già utilizzato per altre proprietà universali mostra che $S^{-1}R$ è univocamente definito a meno di isomorfismi. Più precisamente, se $\hat{R}$ e $\hat{f}\colon R \to \hat{R}$ sono rispettivamente un anello commutativo unitario e un omomorfismo $S$-inverting di anelli commutativi unitari che verificano la condizione richiesta per $S^{-1}R$ e $f_S$, allora esiste un isomorfismo di $R$-algebre unitarie da $S^{-1}R$ a $\hat{R}$, se questi anelli sono riguardati come $R$-algebre via $f_S$ e $\hat{f}$.

Ci accingiamo ora a dimostrare l'esistenza di $f_S$ e $S^{-1}R$ con la proprietà richiesta. Prima di procedere alla loro costruzione, facciamo qualche osservazione. In alcuni casi il nostro problema ha soluzione banale, o per lo meno già nota:

- se $S \subseteq \mathcal{U}(R)$, allora basta porre $S^{-1}R = R$ e $f_S = \mathrm{id}_R$.
- Se $0_R \in S$ allora $S^{-1}R$ deve palesemente essere l'anello triviale (quello con un solo elemento: $0_{S^{-1}R} = 1_{S^{-1}R}$), dal momento che $0_{S^{-1}R} = 0_R^{f_S}$ deve essere invertibile. Viceversa questo anello, con l'omomorfismo nullo da $R$ ad esso, verifica la proprietà richiesta. Quindi l'anello triviale risolve il nostro problema in questo caso.
- Se $R$ è un dominio di integrità unitario e $0_R \notin S$, possiamo definire $S^{-1}R$ come il sottoanello del campo dei quozienti di $R$ generato da $R \cup \{s^{-1} \mid s \in S\}$ e $f_S$ come l'immersione di $R$ in questo anello. È facile provare che anche in questo caso la proprietà universale per omomorfismi $S$-inverting è verificata (Esercizio 4.A.1).

Un'altra osservazione, essenziale per semplificare la costruzione di $S^{-1}R$, è la seguente:

**Lemma 4.1.** *Siano $(R, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario, $S \subseteq R$ ed $f\colon R \to A$ un omomorfismo di anelli unitari. Indicati con $S^*$ e $\hat{S}$, rispettivamente, il sottomonoide generato e la saturazione di $S$ in $(R, \cdot)$, si ha:*

$$f \text{ è } S\text{-inverting} \iff f \text{ è } S^*\text{-inverting} \iff f \text{ è } \hat{S}\text{-inverting}.$$

*Dimostrazione.* Abbiamo $S^{\vec{f}} \subseteq (S^*)^{\vec{f}} = (S^{\vec{f}})^* \subseteq (\hat{S})^{\vec{f}} \subseteq \widehat{(S^{\vec{f}})}$ (quest'ultimo è la saturazione in $A$ di $S^{\vec{f}}$). Da ciò, poiché $\mathcal{U}(A)$ è un sottomonoide saturo nel monoide moltiplicativo di $A$, segue subito che le condizioni $S^{\vec{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$, $(S^*)^{\vec{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$ e $(\hat{S})^{\vec{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$ sono tra loro equivalenti. Ma queste non sono altro che le condizioni che $f$ sia $S$-inverting, $S^*$-inverting, $\hat{S}$-inverting. □

Questo lemma mostra che la proprietà universale per omomorfismi $S$-inverting che stiamo considerando, introdotta a partire da $S$, l'avremmo potuta, in modo del tutto equivalente, introdurre a partire da $S^*$ o da $\hat{S}$, dal momento che gli omomorfismi $S$-inverting sono precisamente quelli $S^*$-inverting o ancora quelli $\hat{S}$-inverting. Detto diversamente, il nostro problema universale ha soluzione per $S$ se e solo se ha soluzione per $S^*$ o, equivalentemente, per $\hat{S}$: un anello ed un omomorfismo da $R$ a questo anello verificano le proprietà richieste per $S^{-1}R$ e $f_S$ (in relazione ad $S$) se e solo se le verificano le stesse proprietà in relazione a $S^*$ o, in modo ancora equivalente, in relazione a $S^*$: con $S^{-1}R$, $(S^*)^{-1}R$ e $(\hat{S})^{-1}R$ si indica dunque lo stesso oggetto (che è definito, ricordiamo, a meno di isomorfismi), e lo stesso vale per $f_S$, $f_{S^*}$, $f_{\hat{S}}$.

Passiamo ora alla costruzione di $S^{-1}R$. Per quanto appena osservato, possiamo sostituire $S$ con il sottomonoide che esso genera ed assumere quindi che $S$ sia un sottomonoide di $(R, \cdot)$. Questo rende più semplice la costruzione, che generalizza quella, già nota, del campo dei quozienti di un dominio di integrità.

Nell'insieme $R \times S$ consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ definita da:

$$(\forall x, y \in R)(\forall s, t \in S) \qquad \big((x, s) \sim (y, t) \iff (\exists a \in S)(xta = ysa)\big).$$

Che si tratti effettivamente di una relazione di equivalenza è facile da verificare: le proprietà riflessiva e simmetrica sono ovvie, per la transitività osserviamo che se $x, y, z \in R$ e $s, t, u \in S$ sono tali che $(x, s) \sim (y, t)$ e $(y, t) \sim (z, u)$, allora $xta = ysa$ e $yub = ztb$ per opportuni $a, b \in S$, e quindi $xutab = yusab = ztsab$, dunque $x \sim z$, perché $tab \in S$ (vediamo qui il vantaggio dell'aver assunto che $S$ sia un sottomonoide).

Per ogni $x \in R$ e $s \in S$ indichiamo con $x/s$ la classe $[(x, s)]_\sim$, e notiamo subito che $x/s = xt/st$ per ogni $t \in S$. Definiamo come $S^{-1}R$ l'anello di sostegno $(R \times S)/{\sim}$, con operazioni $+$ (additiva) e $\cdot$ (moltiplicativa) definite ponendo, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st} \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st}.$$

Verifichiamo che queste operazioni sono ben definite. Dal momento che $R$ è commutativo, basta verificare che $(xt+ys)/st = (x't+ys')/s't$ e $xy/st = x'y/s't$ per ogni $x, x', t \in R$ e $s, s', t \in S$ tali che $x/s = x'/s'$. In effetti, sotto quest'ultima condizione, esiste $a \in S$ tale che $xs'a = x'sa$, quindi $(xt+ys)s'ta = (x't+ys')sta$ (dunque $(xt+ys)/st = (x't+ys')/s't$) e $xys'ta = x'ysta$ (dunque $x/s = x'/s'$); la verifica è così completa.

È chiaro che le operazioni appena definite in $S^{-1}R$ sono entrambe associative e commutative, che $0/1$ e $1/1$ sono elementi neutri per $+$ e $\cdot$, nell'ordine (per evitare di sovraccaricare le notazioni, scriviamo 0 e 1 per $0_R$ e $1_R$). L'ovvia regola di calcolo $(x/s) + (y/s) = (x + y)/s$ per ogni $x, y \in R$ e $s \in S$ rende semplice verificare sia che $(S^{-1}R, +)$ è un gruppo (ogni $x/s \in S^{-1}R$ ha per opposto $(-x)/s$) che la distributività di $\cdot$ rispetto a $+$: per ogni $x, y, z \in R$ e $s, t, u \in S$,

$$\Big(\frac{x}{s} + \frac{y}{t}\Big) \cdot \frac{z}{u} = \frac{xt + ys}{st} \cdot \frac{z}{u} = \frac{xtz + ysz}{stu} = \frac{xtz}{stu} + \frac{ysz}{stu} = \frac{xz}{su} + \frac{yz}{tu} = \frac{x}{s} \cdot \frac{z}{u} + \frac{y}{t} \cdot \frac{z}{u}.$$

Abbiamo così strutturato $S^{-1}R$ come anello commutativo unitario. L'applicazione

$$f_S\colon x \in R \longmapsto x/1 \in S^{-1}R$$

è (come si riconosce senza difficoltà) un omomorfismo di anelli unitari, che è $S$-inverting perché, per ogni $s \in S$, si ha che $s^{f_S} = s/1$ è invertibile in $S^{-1}R$, con inverso $1/s$. Ci resta solo da provare che $f_S$ ha la proprietà universale richiesta sopra. Siano $A$ un anello commutativo unitario e sia $g\colon R \to A$ un omomorfismo $S$-inverting di anelli unitari. Dobbiamo dimostrare che esiste uno ed un solo omomorfismo $\varphi\colon S^{-1}R \to A$ di anelli unitari tale che $f_S\varphi = g$. Se $\varphi$ ha questa proprietà, per ogni $x \in R$ e $s \in S$ si deve avere $(x/s)^\varphi = \big(x^{f_S}(s^{f_S})^{-1}\big)^\varphi = x^{f_S\varphi}(s^{f_S\varphi})^{-1} = x^g(s^g)^{-1}$. Dunque, esiste al più un omomorfismo con le proprietà richieste per $\varphi$: l'unico possibile candidato è l'applicazione

$$x/s \in S^{-1}R \longmapsto x^g(s^g)^{-1} \in A,$$

ammesso che questa sia ben definita. Per verificare questo, iniziamo con l'osservare che, per ogni $s \in S$, esiste $(s^g)^{-1}$ in $A$, perché $g$ è $S$-inverting Siano poi $x, y \in R$ e $s, t \in S$ tali che $x/s = y/t$, vale a dire: $xta = ysa$ per qualche $a \in S$. Allora $x^g t^g a^g = y^g s^g a^g$, ed essendo $a^g$ invertibile e quindi cancellabile in $A$, $x^g t^g = y^g s^g$; dunque $x^g(s^g)^{-1} = y^g(t^g)^{-1}$. Ciò prova che la nostra applicazione, che d'ora in poi chiamiamo $\varphi$, è ben definita. Ovviamente, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$, si ha $((x/s) + (y/t))^\varphi = ((xt + ys/st))^\varphi = (x^g t^g + y^g s^g)(s^g)^{-1}(t^g)^{-1} = x^g(s^g)^{-1} + y^g(t^g)^{-1} = (x/s)^\varphi + (y/t)^\varphi$ e $((x/s) \cdot (y/t))^\varphi = (xy/st)^\varphi = x^g y^g (s^g)^{-1}(t^g)^{-1} = (x/s)^\varphi (y/t)^\varphi$, inoltre $1_{S^{-1}R}^\varphi = (1/1)^\varphi = 1_R^g(1_R^g)^{-1} = 1_A$, quindi $\varphi$ è un omomorfismo di anelli unitari, inoltre $x^{f_S\varphi} = (x/1)^\varphi = x^g$, sicché $f_S\varphi = g$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "x \mapsto x/1", "f_S"'] \arrow[dr, "g"'] & & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\varphi"', "x/s \mapsto x^g s^{-g}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che, per ogni anello commutativo unitario $R$ e ogni suo sottoinsieme $S$ esistono, e sono unici, a meno di isomorfismi, un anello $S^{-1}R$ ed un omomorfismo $f_S\colon R \to S^{-1}R$ che risolvono il problema universale di diagrammi per omomorfismi $S$-inverting posto all'inizio di questa sezione. Chiameremo l'anello $S^{-1}R$ un *anello di frazioni* (ottenuto da $R$ e $S$) e $f_S$ l'omomorfismo naturale da $R$ a $S^{-1}R$.

Supponendo ancora che $S$ sia un sottomonoide moltiplicativo di $R$, osserviamo che $S^{-1}R$ è costituito dalle *frazioni* $x/s$ (al variare di $x \in R$ e $s \in S$), ma $x/s = (x/1)(1/s) = (x/1)(s/1)^{-1}$, dunque $S^{-1}R = \{(s^{f_S})^{-1}r^{f_S} \mid s \in S \wedge r \in R\}$, il che rende in un certo senso conto del simbolo usato per denotare questo anello. La rappresentazione delle frazioni non è, in generale, unica, ad esempio lo zero $0/1$ e l'unità $1/1$ di $S^{-1}R$ si possono anche rappresentare come $0/s$ e $s/s$, per ogni $s \in S$.

**Esercizi e Osservazioni.**
**4.A.1.** Verificare in dettaglio che, come osservato nella prima parte di questa sezione, quando $R$ è un dominio di integrità e $0_R \notin S$ il sottoanello $R_1$ generato da $R$ e da $\{s^{-1} \mid s \in S\}$ nel campo dei quozienti di $R$ e l'immersione di $R$ in questo verificano la proprietà universale per omomorfismi $S$-inverting di anelli unitari commutativi e dunque $S^{-1}R \simeq R_1$.
**4.A.2.** Nel caso in cui $R$ sia un dominio di integrità e $S = R \setminus \{0_R\}$, l'anello di frazioni $S^{-1}R$ si può identificare con il campo dei quozienti di $R$. In effetti la costruzione che di $S^{-1}R$ abbiamo appena effettuato coincide, in questo caso, proprio con quella usuale del campo dei quozienti, dal momento che, con le notazioni utilizzate per la nostra costruzione, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$ si ha $(x, s) \sim (y, t)$ se e solo se $xt = ys$.

Più in generale, si ha quest'ultima equivalenza per ogni scelta dell'anello (commutativo unitario) $R$ a condizione che $S$ non contenga divisori dello zero in $R$. Come segue da uno dei prossimi risultati (Lemma 4.2) questa è precisamente la condizione affinché l'omomorfismo naturale $f_S$ sia iniettivo.
**4.A.3.** Riprendendo l'osservazione al punto precedente, la situazione cambia molto nel caso in cui $R$ non sia integro e $S$ abbia tra i suoi elementi un divisore dello zero $s \neq 0_R$. In questo caso certamente $f_S$ non può essere iniettiva, perché ogni omomorfismo $S$-inverting di anelli unitari con dominio $R$ contiene $\mathrm{Ann}_R(s)$ nel nucleo. Infatti, se $f\colon R \to A$ è un tale omomorfismo e $r \in \mathrm{Ann}_R(s)$, allora $s^f r^f = (0_R)^f = 0_A$, quindi, essendo $s^f$ invertibile, $r^f = 0_A$.
**4.A.4.** Con le notazioni che stiamo usando (ma qui $S$ è inteso come arbitraria parte di $R$), supponiamo che $S$ sia l'unione di due sottoinsiemi $T$ e $V$. Allora $S^{-1}R$ si può ottenere in due passaggi successivi: costruendo $T^{-1}R$ e poi l'anello di frazioni ottenuto da questo anello e dall'immagine in esso di $V$. In modo più esplicito, $S^{-1}R \simeq \bar{V}^{-1}(T^{-1}R)$, dove $\bar{V} = V^{\vec{f}_T}$, e, una volta identificato $S^{-1}R$ con $\bar{V}^{-1}(T^{-1}R)$, si ha $f_S = f_T f_V$.

Per provarlo, si può fare riferimento ai diagrammi commutativi qui disegnati, osservando che $f_S$ è $T$-inverting, il che permette di usare la proprietà universale per definire $\varphi$, e che poi $\varphi$ risulta $\bar{V}$-inverting, la qual cosa permette di costruire $\psi$. Inoltre $f_T f_{\bar{V}}$ è $S$-inverting, e usando questo fatto si può definire $\theta$. Completare la dimostrazione provando che $\psi$ e $\theta$ sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f_T"] \arrow[dr, "f_S"'] & T^{-1}R \arrow[r, "f_{\bar{V}}"] \arrow[d, "\varphi"] & V^{-1}(T^{-1}R) \arrow[dl, "\psi"] \\ & S^{-1}R & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f_T f_{\bar{V}}"] \arrow[dr, "f_S"'] & & V^{-1}(T^{-1}R) \\ & S^{-1}R \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

**Lemma 4.2.** *Siano $R$ un anello commutativo unitario e $S$ un suo sottomonoide moltiplicativo. Allora il nucleo dell'omomorfismo naturale $f_S\colon R \to S^{-1}R$ è*
$$\ker f_S = \bigcup_{s\in S} \mathrm{Ann}_R(s).$$
*Inoltre, per ogni $x \in R$ e $s \in S$:*
(i) *$x/s = 0_{S^{-1}R}$ se e solo se $x \in \ker f_S$;*
(ii) *$x/s$ è un divisore dello zero (risp. nilpotente) in $S^{-1}R$ se e solo se $x + \ker f_S$ ha la stessa proprietà in $R/\ker f_S$.*
(iii) *Se $x/s$ è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora $x$ è un divisore dello zero in $R$;*
(iv) *$x/s = 1_{S^{-1}R}$ se e solo se $x - s \in \ker f_S$;*
(v) *$x/s$ è invertibile in $S^{-1}R$ se e solo se $x$ appartiene alla saturazione di $S$;*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in R$ abbiamo
$$x \in \ker f_S \iff x/1 = 0/1 \iff (\exists a \in S)(xa = 0) \iff x \in \bigcup_{s\in S} \mathrm{Ann}_R(s),$$

dunque $\ker f_S = \bigcup\{\operatorname{Ann}_R(s) \mid s \in S\}$. Proviamo ora la seconda parte dell'enunciato. Sia $\chi$ una tra le proprietà di essere zero, un divisore dello zero, nilpotente, invertibile. Per ogni $x \in R$ e $s \in S$, la frazione $x/s$ verifica $\chi$ in $S^{-1}R$ se e solo se $x^{f_S} = x/1$ verifica la stessa proprietà, dal momento che $x/s$ è il prodotto tra $x/1$ e $1/s$, che è invertibile. Inoltre, gli elementi di $\operatorname{im} f_S$ che siano divisori dello zero in $S^{-1}R$ sono divisori dello zero anche in $\operatorname{im} f_S$. Infatti, se $x/1$ è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora $(x/1)(y/t) = 0_{S^{-1}R} \neq y/t$ per qualche $y/t$ in $S^{-1}R$, dunque $(x/1)(y/1)(1/t) = 0_{S^{-1}R}$ e quindi $(x/1)(y/1) = 0_{S^{-1}R} \neq y/1$, perché $1/t$ è invertibile.[3] A questo punto è chiaro che, ad eccezione del caso in cui $\chi$ sia la proprietà di essere invertibile, $x^{f_S}$, o equivalentemente $x/s$, soddisfa $\chi$ in $S^{-1}R$ se e solo se soddisfa $\chi$ nel sottoanello $\operatorname{im} f_S$. Da ciò seguono subito la (i) ed anche la (ii): per questa seconda utilizziamo l'isomorfismo da $R/\ker f_S$ a $\operatorname{im} f_S$ indotto da $f_S$. Se $x/s$ è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora, dalla (ii) e dalla descrizione di $\ker f_S$ (o da una verifica diretta) segue l'esistenza di $y \in R$ e $a \in S$ tali che $xya = 0_R \neq ya$, quindi $x$ è un divisore dello zero in $R$. Così è provata anche la (iii).

La (iv) segue facilmente dalla (i): poiché $1_{S^{-1}R} = s/s$, si ha $(x/s) - 1_{S^{-1}R} = (x-s)/s$, quindi $x/s = 1_{S^{-1}R} \iff x - s \in \ker f_S$.

Esaminiamo la (v). Se $x/1$ (vale a dire: $x/s$) è invertibile esistono $y \in R$ e $t \in S$ tali che $xy/t = (x/1)(y/t) = 1_{S^{-1}R}$, vale a dire: $xya = ta$ per qualche $a \in S$. Ma allora $x$ divide $ta \in S$, quindi $x$ è nella saturazione $\hat{S}$ di $S$. Viceversa, se $x \in \hat{S}$ allora esiste $y \in R$ tale che $xy \in S$, dunque esiste la frazione $y/xy$ e, ovviamente, $(x/1)(y/xy) = 1_{S^{-1}R}$, sicché $x/1$ è invertibile. A questo punto la dimostrazione è completa. □

È interessante osservare un caso in cui un anello di frazioni è isomorfo ad un quoziente e ad un ideale dell'anello da cui è costruito.

**Lemma 4.3.** *Siano $R$ un anello commutativo unitario e $S$ un suo sottomonoide moltiplicativo. Supponiamo che esista $m \in S$ tale che ogni elemento di $S$ sia un divisore in $S$ di $m$ (questa ipotesi è verificata se $S$ è finito). Allora l'omomorfismo naturale $f_S\colon R \to S^{-1}R$ è suriettivo e $S^{-1}R \simeq R/\operatorname{Ann}_R(m)$.*

*Dimostrazione.* Assunta l'ipotesi su $m$, ogni frazione $x/s \in S^{-1}R$ si può rappresentare come $xt/m$, dove $t$ è un elemento di $S$ tale che $m = st$. Pertanto $S^{-1}R = \{x/m \mid x \in R\}$. Per ogni $y \in R$, allora, esiste $x \in R$ tale che $y/m^2 = x/m$; da questa, moltiplicando per $m/1$, ricaviamo $y/m = x/1$. Ciò prova che $S^{-1}R = \{x/1 \mid x \in R\} = \operatorname{im} f_s$, vale a dire: $f_S$ è suriettiva. Ora, per ogni $s \in S$ si ha $\operatorname{Ann}_R(s) \subseteq \operatorname{Ann}_R(m)$, perché $s$ divide $m$, dunque il Lemma 4.2 mostra $\ker f_S = \bigcup\{\operatorname{Ann}_R(s) \mid s \in S\} = \operatorname{Ann}_R(m)$ e quindi $S^{-1}R \simeq R/\operatorname{Ann}_R(m)$, come richiesto.

Giustifichiamo infine l'osservazione posta tra parentesi nell'enunciato: se $S$ è finito $\prod_{s\in S} s$ ha la proprietà richiesta per $m$. □

Come applicazione, possiamo descrivere gli anelli di frazioni dei quozienti di $\mathbb{Z}$. Fissiamo un po' di notazioni. Indichiamo con $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi positivi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $\pi(n)$ l'insieme dei $p \in \mathbb{P}$ che dividono $n$. Per ogni $\pi \subseteq \mathbb{P}$ poniamo $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ e chiamiamo $\pi$-numero un intero positivo tale che $\pi(n) \subseteq \pi$ (dunque, l'insieme dei $\pi$-numeri è il sottomonoide di $(\mathbb{Z}, \cdot)$ generato da $\pi$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, indichiamo infine con $n_\pi$ la $\pi$-parte di $n$, cioè il massimo divisore di $n$ che sia un $\pi$-numero; si avrà ovviamente $n = n_\pi n_{\pi'}$.

**Proposizione 4.4.** *Siano $n$ un intero positivo e $S$ una parte di $\mathbb{Z}_n$. Sia $T$ un insieme completo di rappresentanti degli elementi di $S$ (dunque $S = \{[a]_n \mid a \in T\}$). Allora, se $\pi = \bigcup_{a\in T} \pi(a)$, si ha $S^{-1}\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_{\pi'}}$.*

*Dimostrazione.* Sappiamo dal Lemma 4.3 che $S^{-1}\mathbb{Z}_n$ è isomorfo ad un quoziente di $\mathbb{Z}_n$, quindi $S^{-1}\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_\ell$ per qualche divisore $\ell$ di $n$. Inoltre, per ogni $p \in \pi$, $[p]_n$ divide almeno un elemento di $S$, quindi $[p]_n \in \hat{S}$; da ciò segue $[n_\pi] \in \hat{S}$. Ma $[n_{\pi'}]_n$ è in $\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}_n}([n_\pi])$, dunque $[n_{\pi'}]_n \in \ker f_S$, dove $f_S$ l'omomorfismo naturale $\mathbb{Z}_n \to S^{-1}\mathbb{Z}_n$. Di conseguenza $\ell$ divide $n_{\pi'}$.

D'altra parte l'epimorfismo $g\colon [a]_n \in \mathbb{Z}_n \mapsto [a]_{n_{\pi'}} \in \mathbb{Z}_{n_{\pi'}}$ è $S$-inverting, dal momento che ogni $a \in T$, essendo un $\pi$-numero, è coprimo con $n_{\pi'}$. Dunque, per la proprietà universale, esiste un omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon S^{-1}\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_{\pi'}}$ tale che $g = f_S\varphi$. Poiché $g$ è suriettiva, $\varphi$ è suriettiva, quindi $n_{\pi'}$ divide $\ell$. Concludiamo che $\ell$ coincide con $n_{\pi'}$, ottenendo così l'asserto. □

[3] In generale, un divisore dello zero in un anello non resta necessariamente divisore dello zero in un sottoanello, anche unitario, a cui appartenga; si veda a questo proposito l'Esercizio 4.B.1.

**Esercizi.**
**4.B.1.** (A proposito di un passaggio nella dimostrazione del Lemma 4.2). Trovare un anello commutativo unitario $R$ ed un suo sottoanello unitario $A$ che sia integro ma contenga un elemento non nullo che sia un divisore dello zero in $R$.
**4.B.2.** Nella situazione del Lemma 4.3, esiste un isomorfismo di $R$-moduli tra $S^{-1}R$ e $mR$ (si ricordi che $S^{-1}R$ ha sempre una struttura di $R$-algebra, quindi di $R$-modulo, definita da $f_S$).
**4.B.3.** Sia $R = R_1 \times R_2$ un prodotto diretto di anelli commutativi unitari e sia $S \subseteq R_1$. Provare che $S^{-1}R$ è isomorfo a $S^{-1}R_1$, ragionando sul diagramma:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[r] \arrow[dd, two heads] & S^{-1}R \arrow[dd, dashed, shift left] \\ R_1 \arrow[ur, tail] \arrow[dr, equal] & & \\ & R_1 \arrow[r] & S^{-1}R_1 \arrow[uu, dashed, shift left] \end{tikzcd}$$

dove le frecce $\rightarrowtail$ e $\twoheadrightarrow$ rappresentano l'immersione e la proiezione canonica relative alla decomposizione di $R$ in prodotto diretto e le frecce orizzontali sono gli omomorfismi naturali. Fare attenzione: l'immersione non è un omomorfismo di anelli unitari, bisogna ovviare a questa difficoltà.
**4.B.4.** Siano $X$ un insieme e $Y$ una sua parte. Descrivere l'anello di frazioni $\{Y\}^{-1}\mathcal{P}(X)$. Se $Z$ è un altro sottoinsieme di $X$, descrivere $\{Y, Z\}^{-1}\mathcal{P}(X)$.
**4.B.5.** Per un arbitrario anello commutativo unitario $R$ ed un suo sottoinsieme $S$, provare che $S^{-1}R$ è l'anello triviale se e solo se $0 \in \hat{S}$.
**4.B.6.** Nella situazione del Lemma 4.3, una volta identificato $S^{-1}R$ con $R/\operatorname{Ann}_R(m)$, mostrare che l'epimorfismo canonico $R \twoheadrightarrow R/\operatorname{Ann}_R(m)$ verifica la proprietà universale per omomorfismi $S$-inverting di anelli unitari commutativi e quindi si può scegliere come omomorfimo naturale $f_S$.
**4.B.7.** Dimostrare in modo alternativo il Lemma 4.3 ragionando come segue. Sia $K = \operatorname{Ann}_R(m)$. Dal fatto che $m^2$ è un divisore d $m$ in $S$, dedurre che $m$ è invertibile modulo $K$. Visto questo, mostrare che l'epimorfismo canonico $R \twoheadrightarrow R/K$ è universale per gli omomorfismi $S$-inverting di anelli unitari commutativi.

Ovviamente questo esercizio risolve anche il precedente.

### 4.1. **Ideali negli anelli di frazioni. Localizzazioni.**

Iniziamo con una osservazione piuttosto ovvia:

**Lemma 4.5.** *Sia $R$ un anello commutativo e sia $H$ un suo ideale primo (risp. primario). Se $A$ è un sottoanello di $R$ che contenga propriamente $H$, $H$ è un ideale primo (risp. primario) in $A$.*

**Lemma 4.6.** *Sia $f \colon R \to A$ un omomorfismo di anelli unitari, con $R$ e $A$ entrambi commutativi. Siano $B$ un ideale di $A$ e $H = B^{\overleftarrow{f}}$ la sua antiimmagine mediante $f$. Allora:*

(i) *$H \lhd R$;*
(ii) *se $B$ è primo, $H$ è primo;*
(iii) *se $B$ è primario, $H$ è primario;*
(iv) *$\sqrt{H} = (\sqrt{B})^{\overleftarrow{f}}$.*

*Dimostrazione.* Componendo $f$ con l'epimorfismo canonico $\nu \colon A \twoheadrightarrow A/B$ otteniamo un omomorfismo di anelli unitari $f\nu \colon R \to A$ di nucleo $C$. Dunque, $H \lhd R$. Inoltre $R/H$ è isomorfo al sottoanello $A_1 := (\operatorname{im} f + B/B)$ di $A/B$. Se $B$ è primo (risp. primario) in $A/B$, allora lo è anche in $\operatorname{im} f + B$, come stabilito nel Lemma 4.5, dunque l'ideale nullo è primo (risp. primario) in $A_1$ e lo stesso vale in $R/H \simeq A_1$. Pertanto $H$ è primo (risp. primario) in $R$. Resta da provare la (iv). Per ogni $r \in R$ si ha $r \in \sqrt{H} \iff (\exists n \in \mathbb{N})(r^n \in H) \iff (\exists n \in \mathbb{N})((r^n)^f \in B) \iff (\exists n \in \mathbb{N})((r^f)^n \in B) \iff r^f \in \sqrt{B}$. Ciò prova la (iv). □

Con le notazioni del Lemma 4.6, $H$ viene talvolta chiamato la contrazione di $B$ rispetto a $f$. La nozione corrispondente, in termini di immagine anziché antiimmagine è quella di espansione (chiamata anche estensione, termine che evitiamo per evitare confusione cina la nozione standard di estensione tra moduli): l'espansione di un ideale $I$ di $R$, rispetto ad $f$, è l'ideale di $A$ generato dall'immagine di $I$, vale a dire: $I^{\vec{f}}A$. Va notato che l'immagine di un ideale mediante un omomorfismo (non suriettivo) non è in generale un ideale; ad esempio, se $f$ è l'immersione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ed $I$ è un ideale non nullo di $\mathbb{Z}$, l'immagine di $I$ mediante $f$ (cioè $I$ stesso) non è un ideale di $\mathbb{Q}$. In queste note useremo questa terminologia esclusivamente con riferimento all'omomorfismo naturale da un anello ad un suo anello di frazioni.

Fissiamo dunque $R$ un anello commutativo unitario e una sua parte $S$, sia $f_S\colon R \to S^{-1}R$ l'omomorfismo naturale. Per ogni $H \lhd R$ e $K \lhd S^{-1}R$ chiamiamo *espansione* di $H$, indicata con $H^e$, l'ideale di $S^{-1}R$ generato da $H^{\vec{f}_S}$, mentre la *contrazione* $K^c$ di $K$ è l'antiimmagine di $K$ mediante $f_S$. Otteniamo così due applicazioni

$$e\colon \mathfrak{I}(R) \to \mathfrak{I}(S^{-1}R), \qquad\qquad c\colon \mathfrak{I}(S^{-1}R) \to \mathfrak{I}(R)$$

tra gli insiemi degli ideali di $R$ e di $S^{-1}R$. La descrizione dettagliata di queste applicazioni è di grande importanza per lo studio degli anelli di frazioni. È ovvio che, considerati $\mathfrak{I}(R)$ e $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ come insiemi ordinati (dalla relazione di inclusione), $e$ e $c$ sono entrambe crescenti.

**Lemma 4.7.** *Con le notazioni appena fissate, se $S$ è un sottomonoide di $(R,\cdot)$, per ogni $H \lhd R$ e $K \lhd S^{-1}R$ si ha:*

(i) $H^e = \{h/s \mid h \in H \wedge s \in S\}$;
(ii) $K^{ce} = K$;
(iii) $H^{ec} = \bigcup_{s\in S}(H:s) = \{r \in R \mid (\exists s \in S)(rs \in H)\} \supseteq H$;
(iv) $H^e = S^{-1}R \iff H \cap S \neq \varnothing$;

*Dunque, $ce = \mathrm{id}_{\mathfrak{I}(S^{-1}R)}$; di conseguenza $c$ è iniettiva e $e$ è suriettiva. Come insieme ordinato, $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ è isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathfrak{I}(R)$.*

*Dimostrazione.* Sia $T = \{h/s \mid h \in H \wedge s \in S\}$. Per ogni $h, h' \in H$, $s, t \in S$ e $r \in R$ si ha $(h/s)+(h'/s') = (hs' + h's)/ss' \in T$ e $(h/s)(r/s') = hr/ss' \in T$, quindi $T$ è un ideale di $S^{-1}R$. È anche chiaro che $H^{\vec{f}} \subseteq T \subseteq H^{\vec{f}}\{1/s \mid s \in S\} \subseteq H^{\vec{f}}S^{-1}R = H^e$. Dunque $T = H^e$, e la (i) è provata.

Verifichiamo ora la (ii). Banalmente, $(Kc)^{\vec{f}} = K^{\overleftarrow{f}\vec{f}}$ è incluso in $K$, quindi $K^{ce}$, l'ideale che esso genera in $S^{-1}R$, è incluso in $K$. Viceversa, sia $k = x/s$ (con $x \in R$ e $s \in S$) un elemento di $K$. Allora $x^{f_s} = x/1 = k(1/s) \in K$, quindi $x \in K^c$, ma allora, per la (i), $k \in K^{ce}$. Otteniamo così la (ii).

Sia ora $r \in R$. Abbiamo $r \in H^{ec}$ se e solo se $r/1 \in H^e$, cioè, per quanto appena visto, se e solo se $r/1 = h/s$ per qualche $h \in H$ e $s \in S$. Se questo accade, esiste $a \in S$ tale che $rsa = ha$, dunque $rsa \in H$ e $r \in (H : sa)$; notiamo che $sa \in S$. Viceversa, se esiste $s \in S$ tale che $r \in (H : s)$, cioè $rs \in H$, allora $r/1 = rs/s \in H^e$. Ciò prova la (iii).

Passiamo alla (iv). Se esiste $s \in H \cap S$, allora $1_{S^{-1}R} = s/s \in H^e$ e $H^e = S^{-1}R$. Viceversa, se $H^e = S^{-1}R$ allora $H^{ec} = R$, ovvero $1 \in H^{ec}$ e, per (iii), esiste $s \in S$ tale che $1 \in (H : s)$, vale a dire: $s \in H$. È così provata anche la (iv).

La parte restante dell'enunciato è conseguenza immediata di (ii) e del fatto che le applicazioni $c$ ed $e$ sono entrambe crescenti. □

Nella (iii) l'inclusione $H \subset H^{ec}$ può essere stretta. Per convincersene basta pensare al caso dell'ideale nullo: la (iii), insieme al Lemma 4.7, mostra che $\{0\}^{ec} = \ker f_S$.

**Corollario 4.8.** *Se un anello commutativo unitario è artiniano (risp. noetheriano, ad ideali tutti principali, principale) lo stesso vale per ogni suo anello di frazioni.*

*Dimostrazione.* Con le notazioni che stiamo usando, l'insieme ordinato $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ si immerge in $\mathfrak{I}(R)$ e quindi verifica le condizioni di catena che valgono in $R$. Poiché $e$ è suriettiva, ogni ideale di $S^{-1}R$ è della forma $H^e$ per un opportuno $H \lhd R$. Se $H$ è principale, detto $x$ un generatore di $H$ è chiaro che $H^e = xS^{-1}R$, quindi anche $H^e$ è principale. Infine, $S^{-1}R$ è un dominio di integrità se lo è $R$, quindi se $R$ è principale anche $S^{-1}R$ lo è. □

Per procedere con lo studio di $e$ e $c$ abbiamo ancora bisogno di un lemma, che mostra come, in un certo senso, il passaggio al quoziente ed il passaggio ad un anello di frazioni siano trasformazioni che commutano tra loro.

**Lemma 4.9.** *Sempre con le stesse notazioni, fissato $H \lhd R$ e detto $\nu\colon R \twoheadrightarrow R/H$ l'epimorfismo canonico da $R$ a $R/H = R^\nu$, si ha $(S^\nu)^{-1}R^\nu \simeq S^{-1}R/H^e$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "\nu"] \arrow[dr, "f_S"'] & R^\nu \arrow[r, "f_{S^\nu}"] & (S^\nu)^{-1}R^\nu \\ & S^{-1}R \arrow[ur, "\varphi\colon x/s \mapsto x^\nu/s^\nu"'] & \end{tikzcd}$$

*Dimostrazione.* L'omomorfismo $\nu f_{S^\nu}$ è certamente $S$-inverting, quindi la proprietà universale di $f_S$ garantisce l'esistenza dell'omomorfismo di anelli unitari $\varphi\colon S^{-1}R \to (S^\nu)^{-1}R^\nu$ tale che $f_S\varphi = \nu f_{S^\nu}$. Di $\varphi$ abbiamo una descrizione esplicita, ottenuta nel corso della costruzione degli anelli di frazioni e della verifica della proprietà universale: sappiamo che, per ogni $x \in R$ e $s \in S$,
$$(x/s)^\varphi = x^{\nu f_{S^\nu}} s^{-\nu f_{S^\nu}} = (x^\nu/1^\nu)(s^\nu/1^\nu)^{-1} = x^\nu/s^\nu.$$
Ora, questa descrizione mostra chiaramente che $\varphi$ è suriettiva. Inoltre, $\ker\varphi$ è costituito dalle frazioni $x/t$ tali che $x^\nu/t^\nu$ sia lo zero di $(S^\nu)^{-1}R^\nu$, cioè, per il Lemma 4.2 (iii), tali che $x^\nu \in \bigcup\{\mathrm{Ann}_{R^\nu}(s^\nu) \mid s \in S\}$. Ora, per ogni $s \in S$, $\mathrm{Ann}_{R^\nu}(s^\nu) = (H : s)^\nu$, quindi, utilizzando anche il Lemma 4.7, otteniamo:
$$x/t \in \ker\varphi \iff x^\nu \in (H^{ec})^\nu \iff x \in H^{ec} \iff x/1 \in H^e \iff x/t \in H^e$$
(la seconda equivalenza richiede l'osservazione che $H = \ker\nu \subseteq H^{ec}$). Pertanto $\ker\varphi = H^e$. Di conseguenza $(S^\nu)^{-1}R^\nu \simeq S^{-1}R/\ker\varphi = S^{-1}R/H^e$. □

**Lemma 4.10.** *Nella situazione del Lemma 4.7, per ogni $H \lhd R$ tale che $H \cap S = \varnothing$:*
(i) *se $H$ è primario, $H^{ec} = H$ e $H^e$ è primario, con radicale $(\sqrt{H})^e$;*
(ii) *se $H$ è primo, $H^e$ è primo.*

*Dimostrazione.* Sappiamo dal Lemma 4.7 (iv) che $H^e \subset S^{-1}R$. Supponiamo $H$ primario. Per la (iii) del Lemma 4.7, se $r \in H^{ec}$ allora $rs \in H$ per qualche $s \in S$. Da $H \cap S = \varnothing$ segue $s^n \notin H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $s \notin \sqrt{H}$. Di conseguenza $r \in H$. Abbiamo così $H^{ec} = H$. Per provare che $H^e$ è primario in $S^{-1}R$ consideriamo il quoziente $S^{-1}R/H^e$. Utilizzando le notazioni del Lemma 4.9, $S^{-1}R/H^e \simeq (S^\nu)^{-1}R^\nu$, quindi per provare che $H^e$ è primario basta verificare che ogni divisore dello zero in $(S^\nu)^{-1}R^\nu$ è nilpotente. Sia $x$ un divisore dello zero in $(S^\nu)^{-1}R^\nu$, possiamo scrivere $x$ come $r^\nu/s^\nu$ per opportuni $r \in R$ e $s \in S$. Il Lemma 4.2 (iii) garantisce che, in $R^\nu = R/H$, $r^\nu$ è un divisore dello zero e quindi è nilpotente; di conseguenza $x$ è nilpotente. Abbiamo così provato che $H^e$ è primario; in modo analogo ma ancora più diretto vediamo che $H^e$ è primo se $H$ è primo, perché in questo caso $(S^\nu)^{-1}R^\nu$ è un dominio di integrità. Infine, ancora nell'ipotesi che $H$ sia primario, $\sqrt{H}$ è primo e $\sqrt{H} \cap S \neq \varnothing$, perché un elemento in $\sqrt{H} \cap S$ avrebbe una potenza in $H \cap S$, quindi $(\sqrt{H})^{ec} = \sqrt{H}$, per quanto dimostrato sopra. D'altra parte, come segue dal Lemma 4.6 (iv), $(\sqrt{H^e})^c = \sqrt{H^{ec}} = \sqrt{H}$. Abbiamo così $(\sqrt{H^e})^c = (\sqrt{H})^{ec}$; poiché $c$ è iniettiva ne segue $\sqrt{H^e} = (\sqrt{H})^e$, il che completa la dimostrazione.[4] □

**Teorema 4.11.** *Siano $R$ un anello commutativo unitario, sia $S$ un suo sottomonoide di $(R, \cdot)$ e sia $\mathfrak{I}_S(R)$ l'insieme degli ideali di $R$ disgiunti da $S$. Allora le applicazioni estensione $e\colon \mathfrak{I}(R) \to \mathfrak{I}(S^{-1}R)$ e contrazione $c\colon \mathfrak{I}(S^{-1}R) \to \mathfrak{I}(R)$ inducono per restrizione isomorfismi di insiemi ordinati, l'uno inverso dell'altro, tra queste coppie di insiemi:*
- *l'insieme degli ideali primari di $R$ disgiunti da $S$ e l'insieme degli ideali primari di $S^{-1}R$;*
- $\mathrm{Spec}(R) \cap \mathfrak{I}_S(R)$ *e* $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$*;*
- *per ogni $P \in \mathrm{Spec}(R) \cap \mathfrak{I}_S(R)$, l'insieme degli ideali $P$-primari di $R$ e l'insieme degli ideali $P^e$-primari di $S^{-1}R$.*

*Dimostrazione.* Siano rispettivamente $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ l'insieme degli ideali primari di $R$ disgiunti da $S$ e quello dgli ideali primari di $S^{-1}R$. I lemmi 4.6, 4.7 e 4.10 mostrano che, per ogni $H \in \mathcal{Q}$ e $K \in \mathcal{Q}'$ si ha $H^e \in \mathcal{Q}'$ e $K^c \in \mathcal{Q}$ (dal momento che $K = K^{ce} \subset S^{-1}R$, certamente $K^c \cap S = \varnothing$), inoltre $H^{ec} = H$. Da ciò segue che $\mathcal{Q}'$ è l'immagine di $\mathcal{Q}$ mediante $e$ mentre $\mathcal{Q}$ è l'immagine di $\mathcal{Q}'$ mediante $c$, e le applicazioni indotte per restrizione e riduzione da $e$ e $c$ tra questi insiemi sono applicazioni biettive, l'una inversa dell'altra. Inoltre gli stessi lemmi provano che queste applicazioni fanno corrispondere ideali primi a ideali primi, quindi inducono biezioni tra $\mathrm{Spec}(R) \cap \mathfrak{I}_S(R)$ e $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ e, inoltre, conservano i radicali degli ideali, quindi, per ogni ideale primo $P \in \mathcal{Q}$, fanno corrispondere ideali $P$-primari ad ideali $P^e$-primari. Infine, sia $e$ che $c$ sono crescenti, quindi tutte queste biezioni sono isomorfismi tra insiemi ordinati. □

Osserviamo ancora che la funzione espansione conserva intersezioni e prodotti finiti tra ideali (ma non intersezioni infinite, come indicato nell'Esercizio 4.C.4) e somme arbitrarie; la funzione contrazione conserva le intersezioni (arbitrarie).

[4] possiamo osservare che quest'ultima parte della dimostrazione fornisce anche una dimostrazione, indipendente dalla precedente ma molto meno diretta, di (ii).

**Lemma 4.12.** *Nelle solite notazioni:*
(i) *per ogni* $I, J \lhd R$, $(IJ)^e = I^e J^e$; $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$
(ii) *per ogni famiglia* $(H_i)_{i \in I}$ *di ideali di* $R$, $(\sum_{i \in I} H_i)^e = \sum_{i \in I} H_i^e$;
(iii) *per ogni famiglia* $(K_i)_{i \in I}$ *di ideali di* $S^{-1}R$, $(\bigcap_{i \in I} K_i)^c = \bigcap_{i \in I} K_i^c$;

*Dimostrazione.* Siano $I, J \lhd R$. Che $(IJ)^e = I^e J^e$ è chiaro dalla descrizione delle espansioni in Lemma 4.7.[5] Mentre è altrettanto chiaro, dalla crescenza di $e$, che $(I \cap J)^{ec} \subseteq I^e \cap J^e$, meno ovvia è l'inclusione opposta. Sia $x \in I^e \cap J^e$. Esistono $i \in I$, $j \in J$, $s, t \in S$ tali che $x = i/s = j/t$. Esiste allora $a \in S$ tale che $ita = jsa$; ma da questa uguaglianza traiamo $ita \in I \cap J$ e quindi $x = ita/sta \in (I \cap J)^e$. Abbiamo provato la (ii). Il resto dell'enunciato è ovvio. □

L'enunciato precedente ci dice che $e$ è un omomorfismo tra reticoli. Lo stesso non vale per $c$, che non conserva le somme tra ideali (vedi Esercizio 4.C.5).

**Esercizi.**
**4.C.1.** Verificare che se $f : R \to A$ è un omomorfismo suriettivo tra anelli, l'immagine mediante $f$ di un ideale di $R$ è necessariamente un ideale di $A$.
**4.C.2.** Costruire un esempio di omomorfismo di anelli unitari commutativi $f : R \to A$ e di un ideale $H \lhd R$ tali che $(\sqrt{H})^{\vec{f}} \subset \sqrt{H^{\vec{f}}}$.
**4.C.3.** Nelle notazioni del Lemma 4.7 si ha, per ogni $H \lhd R$:
– $H^{ece} = H^e$;
– $H^{ec} = H$ se e solo se $H$ è la contrazione di un ideale di $R$;
– se $H$ è generato da un suo sottoinsieme $X$, allora $H^e$ è generato da $X^{\vec{f}_S}$;
– $S \cap H = \varnothing \iff \hat{S} \cap H = \varnothing$; verificarlo in modo diretto.
Inoltre, $e$ è iniettiva se e solo se $S \subseteq \mathcal{U}(R)$ (vale a dire: $e$ e $c$ descrivono una biezione tra $\mathfrak{I}(R)$ e $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ solo nel caso banale in cui $f_S$ sia un isomorfismo tra $R$ e $S^{-1}R$).

I prossimi cinque esercizi sono relativi al Lemma 4.12; le notazioni sono le solite.
**4.C.4.** Mostrare con un esempio che l'espansione di una intersezione di una famiglia (infinita) $(H_i)_{i \in I}$ di ideali non è necessariamente l'intersezione degli ideali $H_i^e$. Suggerimento: basta pensare a qualche anello di frazioni di $\mathbb{Z}$.
**4.C.5.** Mostrare con un esempio che la contrazione di una somma di due ideali di un anello di frazioni non è necessariamente la somma delle loro contrazioni. Suggerimento: se $R$ è l'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$, $S = \{2\}$ e $I = xR$ e $J = (x+2)R$, allora $I = I^{ec}$ e $J = J^{ec}$, mentre $(I+J)^e = S^{-1}R$.
**4.C.6.** L'applicazione contrazione non conserva neanche i prodotti tra ideali. Per costruire un controesempio a riguardo, si considerino un gruppo abeliano $A$ di ordine primo $p$, visto (nell'unico modo possibile) come $\mathbb{Z}$-modulo e la idealizzazione $R = A \rtimes \mathbb{Z}$. Verificare che il nucleo dell'omomorfismo naturale $R \to \{p\}^{-1}R$ è $A$, calcolare la contrazione dell'ideale nullo di $\{p\}^{-1}R$ ed il suo quadrato per arrivare alla conclusione. In aggiunta: utilizzando il Lemma 4.9, identificare $\{p\}^{-1}R$.
**4.C.7.** Sia $f : R \to A$ un omomorfismo di anelli unitari commutativi. Mostrare che l'applicazione che ad ogni ideale $H$ di $R$ associa l'ideale di $A$ generato da $H^{\vec{f}}$ conserva prodotti e somme (arbitrarie) tra ideali.
**4.C.8.** In contrasto con quanto notato con l'esercizio precedente, il fatto che la funzione espansione conservi l'intersezione tra ideali è una proprietà specifica dell'omomorfismo naturale da un anello commutativo unitario ad un suo anello di frazioni. Ad esempio, se $K$ è un qualsiasi anello commutativo unitario, e $R = K[x, y]$ è un anello di polinomi a due indeterminate su $K$, non è difficile trovare un omomorfismo di anelli unitari $f$ da $R$ ad un altro anello commutativo $A$ tale che, posto $I = xR$ e $J = yR$, si abbia che $(I \cap J)^{\vec{f}}$ sia un ideale di $A$ propriamente contenuto in $I^{\vec{f}} \cap J^{\vec{f}}$. Trovare un tale $f$.
**4.C.9.** Sia $R$ un dominio di integrità e $S$ una sua parte. Ricordando che $S^{-1}R$ può essere realizzato come sottoanello del campo dei quozienti $Q(R)$ di $R$ (di cui consideriamo $R$ come sottoanello) con l'immersione $R \hookrightarrow Q(R)$ come omomorfismo naturale, osservare che $K^c = K \cap R$ per ogni $K \lhd S^{-1}R$. Questa è l'origine di una notazione (un po' balorda) usata da alcuni autori che indicano tutte le contrazioni di ideali degli anelli di frazioni di un arbitrario anello $R$ come intersezioni con $R$.

[5] o da considerazioni più generali, vedi Esercizio 4.C.7.

I risultati precedenti hanno una interpretazione molto esplicita alla luce delle osservazioni che ogni anello di frazioni si può riguardare come anello di frazioni definito da un sottomonoide saturo (Lemma 4.1) e che, i sottomonoidi (moltiplicativi) saturi in un anello commutativo unitario sono precisamente i complementi delle unioni di ideali primi (Lemma 3.4).

Sia dunque $R$ un anello commutativo unitario. Per quanto appena notato, ogni anello di frazioni di $R$ è della forma $S^{-1}R$, dove $S = R \smallsetminus \bigcup \mathcal{P}$ per un insieme $\mathcal{P}$ di ideali primi. Il Teorema 4.11 offre una descrizione dello spettro primo di questo anello: un ideale primo di $R$ è disgiunto da $S$ se e solo se è contenuto nell'unione $\bigcup \mathcal{P}$. Dunque, la funzione contrazione è una biezione, ed anche un isomorfismo di insiemi ordinati, da $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ all'insieme degli ideali primi di $R$ contenuti in $\bigcup \mathcal{P}$. Un caso particolarmente importante è quello in cui $\mathcal{P}$ è un singleton, vale a dire: $\mathcal{P} = \{P\}$ per un qualche $P \in \operatorname{Spec}(R)$, e dunque $S = R \smallsetminus P$. Si usa scrivere, in questo caso, $R_P$ per $(R \smallsetminus P)^{-1}R$. Per quanto visto nel caso generale, $\operatorname{Spec}(R_P)$ è isomorfo come insieme ordinato all'insieme $\mathfrak{I}_P(R) = \{Q \in \operatorname{Spec} R \mid Q \subseteq P\}$ degli ideali primi di $R$ contenuti in $P$. Ovviamente $\mathfrak{I}_P(R)$ ha massimo: questo massimo è $P$, quindi l'ideale di $R_P$ corrispondente a $P$, cioè $P^e$ è il massimo (rispetto all'inclusione) in $\operatorname{Spec}(R_P)$. Da questo segue subito che $P^e$ è massimo tra gli ideali propri di $R_P$: ogni ideale proprio di $R_P$ è contenuto in un ideale massimale, quindi primo, e dunque in $P^e$. Abbiamo così provato:

**Corollario 4.13.** *Sia $R$ un anello commutativo unitario e sia $P$ un suo ideale primo. Allora $R_P$ è un anello locale, di ideale massimale $P^e$.*

Gli anelli di frazioni di questa forma sono noti come localizzazioni. Più precisamente, per ogni ideale primo $P$ di un anello commutativo unitario $R$, l'anello di frazioni $R_P = (R \smallsetminus P)^{-1}R$ è la *localizzazione di $R$ a $P$*.

Un importante esempio è dato dalle localizzazioni di $\mathbb{Z}$, che possiamo rapidamente descrivere tutte. Ricordiamo (Esercizio 4.A.1) che gli anelli di frazioni dei domini di integrità si possono realizzare come sottoanelli dei campi dei quozienti: se $R$ è l'anello e $0 \notin S$, $S^{-1}R$ sarà il sottoanello di $Q(R)$ generato da $R$ e da $\{s^{-1} \mid s \in S\}$. Allora, per ogni ideale primo $P$ di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_P$ è il sottoanello di $\mathbb{Q}$ generato dai reciproci degli elementi di $\mathbb{Z} \smallsetminus P$. Se $P = \{0\}$ questo è il campo $\mathbb{Q}$. Se $P \neq 0$, dunque $P = p\mathbb{Z}$ per qualche numero primo positivo $p$, otteniamo

$$\mathbb{Z}_P = \{n/m \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge p \text{ non divide } m\} =: \mathbb{Q}_{p'},\text{[6]}$$

come si verifica facilmente. Come si può descrivere $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$? Gli ideali primi di $\mathbb{Q}_{p'}$ sono le espansioni degli ideali primi di $\mathbb{Z}$ contenuti in $p\mathbb{Z}$, quindi di $\{0\}$ e $p\mathbb{Z}$. Dunque $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}_{p'}) = \{\{0\}, p\mathbb{Q}_{p'}\}$. Similmente, dal fatto che gli ideali primari non nulli di $\mathbb{Z}$ contenuti in $p\mathbb{Z}$ sono quelli della forma $p^n\mathbb{Z}$ al variare di $n \in \mathbb{N}^+$ ricaviamo che gli ideali primari di $\mathbb{Q}_{p'}$ sono l'ideale nullo e gli ideali della forma $p^n\mathbb{Q}_{p'}$ al variare di $n \in \mathbb{N}^+$. Ci saremmo potuti arrivare anche per altra via: sappiamo che $\mathbb{Q}_{p'}$ è principale (Corollario 4.8)) e che gli ideali primari degli anelli principali sono tutte e solo le potenze degli ideali primi. Ma i questo caso di ideali primi ne abbiamo solo due, e le loro potenze sono gli ideali che abbiamo elencato. Osserviamo che questi ideali sono a due a due distinti, vale a dire $p^a\mathbb{Q}_{p'} \neq p^b\mathbb{Q}_{p'} \neq \{0\}$ per ogni coppia di interi positivi distinti $a, b$; ciò segue (ad esempio) dal 4.11. Oltre questi ideali e l'anello stesso, esistono altri ideali in $\mathbb{Q}_{p'}$? Sappiamo che la funzione espansione $e$ è suriettiva, dunque $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'}) = \{H^e \mid H \lhd \mathbb{Z}\} = \{(m\mathbb{Z})^e \mid m \in \mathbb{N}\} = \{m\mathbb{Q}_{p'} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Sia $m \in \mathbb{N}^+$; possiamo senz'altro scrivere $m = p^n u$ per opportuni $n, u \in \mathbb{N}$ tali che $p^n$ non divida $u$. Ma allora $u$ è invertibile in $\mathbb{Q}_{p'}$, abbiamo dunque $m\mathbb{Q}_{p'} = p^n\mathbb{Q}_{p'}$. In questo modo arriviamo a concludere che $\mathbb{Q}_{p'}$ non ha ideali oltre a quelli già identificati. In definitiva, $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$ è costituito dall'ideale nullo e dagli ideali $p^n\mathbb{Q}_{p'}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ (includiamo così nel conto anche $\mathbb{Q}_{p'} = p^0\mathbb{Q}_{p'}$) e sono, ripetiamo, a due a due distinti. Dunque, $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$ è una catena numerabile. Menzioniamo il fatto che questo rende $\mathbb{Q}_{p'}$ un esempio di anello di valutazione (nozione non ancora introdotta). Il fatto che tutti gli ideali non nulli di $\mathbb{Q}_{p'}$ siano potenze del suo ideale massimale $p\mathbb{Q}_{p'}$ non è un caso; questa è una proprietà comune a tutti gli anelli noetheriani di valutazione.

[6] usiamo questa notazione che ricorda il fatto che questo sottoanello, quozientato con $\mathbb{Z}$, costituisce la $p'$-componente del gruppo additivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Altre notazioni usate per questo anello sono $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$, che è quella generale per le localizzazioni ma non è molto comune, $\mathbb{Z}_p$, che è una 'semplificazione' della precedente ma è terribilmente fuorviante, $\mathbb{Q}_p$, che non è solo una mescolanza tra le precedenti, ma viene giustificata dal riferimento al campo dei numeri $p$-adici. La notazione che usiamo qui è particolarmente diffusa tra chi si occupa di teoria di gruppi.

Un'altra osservazione a proposito delle localizzazioni riguarda i loro campi residui. A partire da un anello commutativo unitario $R$ e da un suo ideale primo $P$, è possibile ottenere un campo in modo abbastanza diretto in due modi: il primo è passare al quoziente $R/P$, che è un dominio di integrità, e quindi al campo dei quozienti $Q(R/P)$ di questo; il secondo è il passaggio alla localizzazione $R_P$ e quindi al suo campo residuo $R_P/P^e$. Queste due procedure portano essenzialemente allo stesso risultato:

**4.14.** *Siano $R$ un anello commutativo unitario e $P$ un suo ideale primo. Allora $R_P/P^e \simeq Q(R/P)$.*

*Dimostrazione.* Basta applicare il Lemma 4.9. Posto $S = R \smallsetminus P$ e $\bar{R} = R/P$, l'immagine di $S$ in $\bar{R}$ è $\bar{S} := \bar{R} \smallsetminus \{0\}$, quindi $Q(R/P) = (\bar{S})^{-1}\bar{R} \simeq S^{-1}R/P^e = R_P/P^e$. □

Possiamo anche dire qualcosa sugli anelli di frazioni della forma $S^{-1}R$, dove $S = R \smallsetminus \bigcup \mathcal{P}$ per un insieme *finito* $\mathcal{P}$ di ideali primi. In questo caso, mediante le biezioni espansione e contrazione, $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ corriponde all'insieme degli ideali primi di $R$ che siano contenuti in $\bigcup \mathcal{P}$. Ma il Lemma 2.3 mostra che un ideale (primo o non primo) di $R$ è contenuto in $\bigcup \mathcal{P}$ se e solo se è contenuto in un elemento di $\mathcal{P}$. Dunque l'insieme di questi ideali (che, ripetiamo, come insieme ordinato è isomorfo a $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$) è $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{I}_P(R)$. Se ne deduce che gli ideali massimali di $S^{-1}R$, cioè gli elementi massimali di $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$) sono espansioni di ideali primi appartenenti a $\mathcal{P}$, precisamente degli elementi di $\mathcal{P}$ massimali per inclusione. Se chiamiamo *semilocale* un anello commutativo unitario in cui l'insieme degli ideali massimali è finito, abbiamo provato:

**Corollario 4.15.** *Sia $R$ un anello commutativo unitario e sia $\mathcal{P}$ un insieme finito di suoi ideali primi. Allora $(R \smallsetminus \bigcup \mathcal{P})R_P$ è un anello semilocale. I suoi ideali massimali sono gli ideali della forma $P^e$ al variare di $P$ nell'insieme degli elementi di $\mathcal{P}$ massimali per inclusione.*[7]

**Osservazioni ed esercizi.**

**4.D.1.** L'idea di localizzazione è molto semplice da visualizzare in questi termini: scelto un ideale primo $P$ dell'anello commutativo $R$, il passaggio all'anello di frazioni $R_P$ "rende invertibili" gli elementi di $R$ non in $P$. In questo modo si ottiene un anello in cui gli elementi esterni ad un certo ideale proprio ($P^e$) sono invertibili, quindi un anello locale. Cosa cambia se si parte da un ideale non primo al posto di $P$?

**4.D.2.** Verificare che tutti gli anelli di frazioni che siano locali sono localizzazioni. Si tratta di provare che, se $R$ è un anello commutativo unitario e $S$ è un sottomonoide saturo di $(R, \cdot)$ tale che $S^{-1}R$ sia locale, allora $R \smallsetminus S$ è un ideale primo di $R$.

**4.D.3.** Realizzare il sottoanello $\mathbb{Q}_2 = \{n/2^m \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{Q}$ come localizzazione di $\mathbb{Z}$ e descriverne gli ideali. Determinare l'ideale di $\mathbb{Q}_2$ generato da $\{24/13, 36/5\}$ e la sua contrazione in $\mathbb{Z}$.

[7]si badi bene: la richiesta qui non è che questi ideali $P$ siano massimali come ideali di $R$, ma solo che siano massimali per inclusione tra gli elementi di $\mathcal{P}$.