

2. ROBA CHE SERVE, DA PIAZZARE DA QUALCHE PARTE

Lemma 2.1. *Sia M un modulo su un anello commutativo unitario R , e sia \mathcal{C} una catena non vuota di sottomoduli di M . Allora $V := \bigcup \mathcal{C}$ è un sottomodulo di M e, se V è finitamente generato, $V = \max \mathcal{C}$.*

Lemma 2.2. *Sia R un anello commutativo; siano S una parte stabile di (R, \cdot) e $H \triangleleft R$ tali che $S \cap H = \emptyset$. Allora, ordinato per induzione, l'insieme $\{I \triangleleft R \mid I \subseteq H \wedge I \cap S = \emptyset\}$ è induttivo; ogni suo elemento massimale è un ideale primo di R .*

Dimostrazione. Sia \mathcal{S} l'insieme di ideali definito nell'enunciato. È chiaro che l'unione di una arbitraria catena non vuota di elementi di \mathcal{S} è in \mathcal{S} , quindi \mathcal{S} è induttivo. Sia P un suo elemento massimale. Dal momento che $P \cap S = \emptyset$, $P \subset R$. Se P non è primo esistono $I, J \triangleleft R$ tali che $IJ \subseteq P \subset I, J$. La massimalità di P in \mathcal{S} implica che $I, J \notin \mathcal{S}$, dunque $I \cap S \neq \emptyset \neq J \cap S$. Siano $i \in I \cap S$ e $j \in J \cap S$. Allora $ij \in S$ ma, d'altra parte, $ij \in IJ \subseteq P$. Dunque $ij \in P \cap S$, contraddicendo così la scelta di P . Si conclude in questo modo che P è un ideale primo. \square

Lemma 2.3 (Il 'prime-avoidance lemma'). *Sia \mathcal{P} un insieme finito di ideali primi in un anello commutativo R . Allora ogni sottoanello A di R che sia contenuto in $\bigcup \mathcal{P}$ è contenuto in almeno un elemento di \mathcal{P} .*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo che R, A e \mathcal{P} forniscano un controesempio in cui $|\mathcal{P}|$ ha il minimo valore possibile. Chiaramente $|\mathcal{P}| > 1$ e, per minimalità, scelto comunque $P \in \mathcal{P}$ e posto $\hat{\mathcal{P}}_P = \mathcal{P} \setminus \{P\}$, si ha $A \not\subseteq \bigcup \hat{\mathcal{P}}_P$. Per ogni $P \in \mathcal{P}$ possiamo allora scegliere $a_P \in A \setminus \bigcup \hat{\mathcal{P}}_P$. Vediamo che a_P appartiene a P , dal momento che non appartiene a nessun altro elemento di \mathcal{P} . Poniamo anche, sempre per ogni $P \in \mathcal{P}$, $b_P = \prod_{Q \in \hat{\mathcal{P}}_P} a_Q$; si ha $b_P \in A \cap Q$ per ogni $Q \in \hat{\mathcal{P}}_P$, ma $b_P \notin P$, perché P è primo e, per ogni $Q \in \hat{\mathcal{P}}_P$, $a_Q \notin P$. Sia ora $a = \sum_{P \in \mathcal{P}} b_P$. Ovviamente $a \in A$, quindi esiste $Q \in \mathcal{P}$ tale che $a \in Q$. Ma $b_P \in Q$ per ogni $P \in \hat{\mathcal{P}}_Q$ e $b_Q \notin Q$, questa è dunque una contraddizione. \square

Lemma 2.4. *Siano R un anello commutativo unitario e $(H_i)_{i \in I}$ una famiglia di ideali di R . Allora l'applicazione $\theta: r \in R \mapsto (r + H_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (R/H_i)$ è un omomorfismo di R -algebre. Inoltre:*

- (i) $\ker \theta = \bigcap_{i \in I} H_i$;
- (ii) se θ è suriettivo, per ogni $J \subset I$ tale che $J \neq \emptyset$, $\bigcup_{i \in J} H_i$ e $\bigcup_{i \in I \setminus J} H_i$ sono comassimali e, in particolare, gli ideali H_i , al variare di $i \in I$, sono a due a due comassimali;
- (iii) se I è finito, θ è suriettivo se e solo se gli ideali H_i , al variare di $i \in I$, sono a due a due comassimali.

Dimostrazione. Per ciascun $i \in I$, il quoziente R/H_i è una R -algebra unitaria (con l'epimorfismo canonico come omomorfismo di struttura). Quindi $P := \prod_{i \in I} (R/H_i)$ ha una struttura di R -algebra in quanto prodotto diretto di R -algebre. Che, con riferimento a questa struttura, θ sia un omomorfismo di R -algebre unitarie è di verifica diretta.³

Sia $x \in R$. Allora, per ogni $i \in I$, la componente i -esima di x^θ è $x + H_i$, quindi è zero se e solo se $x \in H_i$. Da ciò segue immediatamente le (i).

Per ogni $S \subseteq I$, indichiamo con e_S l'elemento di P la cui i -esima componente sia $1_R + H_i$ se $i \in S$ e H_i se $i \notin S$. Questa notazione ci aiuta nella dimostrazione di (ii): se θ è suriettiva e J è una parte propria e non vuota di I , allora esistono $x, y \in R$ tali che $x^\theta = e_{I \setminus J}$ e $y^\theta = e_J$. Posto $X = \bigcup_{i \in J} H_i$ e $Y = \bigcup_{i \in I \setminus J} H_i$, abbiamo, chiaramente, $x \in X$ e $y \in Y$, e $(x + y)^\theta = e_J + e_{I \setminus J} = 1_P$. Dunque, $1_R \in x + y + \ker \theta$. Ma $\ker \theta \subseteq Y$; da ciò segue $1_R \in X + Y$, quindi X e Y sono comassimali, come richiesto dall'enunciato. Fissati poi $i, j \in I$ tali che $i \neq j$, se si sceglie $\{j\}$ come J con queste notazioni si ottiene $X = H_j$ e $Y \subseteq H_i$, quindi $R = H_j + H_i$: H_i e H_j sono comassimali; in questo modo è provata la (ii).

Per provare la (iii), supponiamo ora che I sia finito e $R = H_i + H_j$ per ogni $i, j \in I$ tali che $i \neq j$. Come sappiamo, per ogni $i \in I$, allora H_i è comassimale con $K_i = \bigcap_{i \neq j \in I} H_j$, dunque $1_R = h_i + k_i$ per opportuni $h_i \in H_i$ e $k_i \in K_i$. Ma allora $k_i + H_i = 1_R + H_i$ e $k_i + H_j = H_j$ se $j \neq i$, quindi $k_i^\theta = e_{\{i\}}$, nelle notazioni del paragrafo precedente. Pertanto $\{e_{\{i\}} \mid i \in I\} \subseteq \text{im } \theta$. Ma θ è (tra le altre cose) un omomorfismo di R -moduli e, come R -modulo, P è generato da $\{e_{\{i\}} \mid i \in I\}$. Di conseguenza $\text{im } \theta = P$, vale a dire: θ è suriettiva. È così provata una delle due implicazioni richieste; l'altra era già contenuta in (ii). La dimostrazione è completa. \square

³questo fatto significa, in sostanza, che θ è l'omomorfismo di struttura della R -algebra P .

Esercizi.

2.A.1. Due risultati in teoria dei gruppi (il primo dei quali del tutto elementare, il secondo un poco meno) mostrano che un gruppo non può essere unione di due suoi sottogruppi propri e che se è unione di un numero finito di sottogruppi almeno uno di questi deve avere indice finito. Usare questi due fatti per estendere il [Lemma 2.3](#) in questi modi:

- vale la stessa conclusione del [Lemma 2.3](#) se l'ipotesi che $\mathcal{P} \subseteq \text{Spec}(R)$ è sostituita dall'ipotesi che al massimo due ideali di \mathcal{P} non siano primi;
- vale la stessa conclusione del [Lemma 2.3](#) se l'ipotesi che $\mathcal{P} \subseteq \text{Spec}(R)$ è sostituita dalle ipotesi che R sia unitario, $A \triangleleft R$ e R/M sia infinito per ogni $M \triangleleft R$.
- un anello unitario ha la proprietà che tutti i suoi ideali massimali hanno indice infinito se ha un sottoanello unitario con questa proprietà. Dunque, se un anello unitario R contiene un campo infinito come sottoanello unitario, allora R/M è infinito per ogni $M \triangleleft R$.

Il primo enunciato si trova (all'incirca: lì gli anelli sono unitari) in Sharp, Theorem 3.61. A proposito del secondo e del terzo, partendo dal gruppo V_4 di Klein, che è l'unione dei suoi tre sottogruppi non banali, mostrare che esiste un anello unitario R che ha un campo infinito come sottoanello ed un ideale massimale che è unione di un numero finito di ideali propriamente contenuti in esso.

3.2. Sottoinsiemi e sottomonoidi saturi. Una parte X di un semigrupp commutativo (M, \cdot) si dice *satura* se e solo se, per ogni $x \in X$, ogni divisore (in M) di x appartiene a X . È chiaro che una arbitraria intersezione di parti sature di M è ancora satura. Per ogni $S \subseteq M$, la parte satura generata da S è l'intersezione delle parti sature di M contenenti S , quindi la più piccola parte satura di M contenente S . La dimostrazione del prossimo lemma è ovvia e la omettiamo, notiamo soltanto che con $\text{Div}_M(s)$ indichiamo l'insieme dei divisori in M del suo elemento s .

Lemma 3.5. *Siano M un semigrupp e $S \subseteq M$. Allora la parte satura generata da S è $\bigcup\{\text{Div}_M(s) \mid s \in S\}$. Se S è un sottosemigrupp, anche questo insieme è un sottosemigrupp.*

Se M è un monoide (è questo il caso al quale siamo particolarmente interessati), è chiaro che ogni parte satura contiene $\mathcal{U}(M)$. Chiameremo *saturazione* di una parte S di un monoide M la parte satura generata dal sottomonoid generato da S (quindi la parte “chiusa e satura” generata da S). Indicheremo la saturazione di S in M come \hat{S} (almeno quando si può sottintendere un riferimento a M); per quanto detto sopra \hat{S} è un sottomonoid di M e consiste dei divisori di prodotti di elementi di S .

Esercizi.

3.A.1. Sia R è un anello commutativo. Allora $R \setminus H$ è saturo in R per ogni $H \triangleleft R$.

3.A.2. Sia R un anello commutativo. Qual è la parte satura di (R, \cdot) generata da $\{0\}$?

3.A.3. Sia $S = \{a, b, c, d\}$ un insieme di cardinalità 4. Nel monoide $(\mathcal{P}(S) \setminus \mathcal{P}_1(S), \cup)$, la parte $\{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ è satura, ma il sottomonoid (ovvero la parte stabile) che essa genera non lo è.

Sia ora R un anello commutativo e sia H un ideale proprio di R . È chiaro che $R \setminus H$ è una parte satura in (R, \cdot) che contiene 1_R se R è unitario, e che essa è stabile se e solo se H è primo. Abbiamo:

Lemma 3.6. *Sia R un anello commutativo unitario e sia S una sua parte. Allora S è un sottomonoid saturo di (R, \cdot) se e solo se $R \setminus S$ è unione di ideali primi di R .*

Dimostrazione. Per quanto osservato prima dell'enunciato, per ogni $P \in \text{Spec}(R)$, $R \setminus P$ è un sottomonoid saturo di (R, \cdot) . Sia $\mathcal{S} \subseteq \text{Spec}(R)$. Allora $R \setminus \bigcup \mathcal{S} = \bigcap_{P \in \mathcal{S}} (R \setminus P)$ è intersezione di sottomonoidi saturi in (R, \cdot) , quindi esso stesso un sottomonoid saturo. Viceversa, sia S un sottomonoid saturo di (R, \cdot) . Per ogni $a \in R \setminus S$ si ha $aR \cap S = \emptyset$, dal momento che se esistesse $s \in aR \cap S$ allora a sarebbe un divisore di $s \in S$ e quindi $a \in S$. Possiamo allora utilizzare il [Lemma 2.2](#) per ottenere un ideale primo P_a disgiunto da S . Scelto un tale P_a per ogni scelta di a , abbiamo chiaramente $R \setminus S = \bigcup\{P_a \mid a \in R \setminus S\}$. La dimostrazione è così completata. \square

4. ANELLI DI FRAZIONI

Sia S un sottoinsieme di un anello commutativo unitario R . Vogliamo costruire un anello commutativo unitario $S^{-1}R$ legato ad R da un omomorfismo $R \rightarrow S^{-1}R$ di anelli unitari che mandi ogni elemento di S in un elemento invertibile di $S^{-1}R$, e che sia, in un qualche senso, minimale ed universale per questa proprietà.

Possiamo codificare queste richieste in termini di una proprietà universale di diagrammi. Chiamiamo S -*invertig* un omomorfismo di anelli unitari di dominio R tale che l'immagine di S sia costituita da elementi invertibili. Quello che vogliamo costruire è (un anello commutativo unitario $S^{-1}R$ e) un omomorfismo di anelli unitari $f_S: R \rightarrow S^{-1}R$ che sia S -invertig e tale che, per ogni omomorfismo S -invertig di anelli unitari commutativi $g: R \rightarrow A$ esista uno ed un solo omomorfismo di anelli unitari $\varphi: S^{-1}R \rightarrow A$ tale che $f_S\varphi = g$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f_S} & S^{-1}R \\ & \searrow g & \swarrow \varphi \\ & & A \end{array}$$

Il ragionamento che abbiamo già utilizzato per altre proprietà universali mostra che $S^{-1}R$ è univocamente definito a meno di isomorfismi. Più precisamente, se \hat{R} e $\hat{f}: R \rightarrow \hat{R}$ sono rispettivamente un anello commutativo unitario e un omomorfismo S -invertig di anelli commutativi unitari che verificano la condizione richiesta per $S^{-1}R$ e f_S , allora esiste un isomorfismo di R -algebre unitarie da $S^{-1}R$ a \hat{R} , se questi anelli sono riguardati come R -algebre via f_S e \hat{f} .

Ci accingiamo ora a dimostrare l'esistenza di f_S e $S^{-1}R$ con la proprietà richiesta. Prima di procedere alla loro costruzione, facciamo qualche osservazione. In alcuni casi il nostro problema ha soluzione banale, o per lo meno già nota:

- se $S \subseteq \mathcal{U}(R)$, allora basta porre $S^{-1}R = R$ e $f_S = \text{id}_R$.
- Se $0_R \in S$ allora $S^{-1}R$ deve palesemente essere l'anello triviale (quello con un solo elemento: $0_{S^{-1}R} = 1_{S^{-1}R}$), dal momento che $0_{S^{-1}R} = 0_R^{f_S}$ deve essere invertibile. Viceversa questo anello, con l'omomorfismo nullo da R ad esso, verifica la proprietà richiesta. Quindi l'anello triviale risolve il nostro problema in questo caso.
- Se R è un dominio di integrità unitario e $0_R \notin S$, possiamo definire $S^{-1}R$ come il sottoanello del campo dei quozienti di R generato da $R \cup \{s^{-1} \mid s \in S\}$ e f_S come l'immersione di R in questo anello. È facile provare che anche in questo caso la proprietà universale per omomorfismi S -invertig è verificata ([Esercizio 4.A.1](#)).

Un'altra osservazione, essenziale per semplificare la costruzione di $S^{-1}R$, è la seguente:

Lemma 4.1. *Siano $(R, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario, $S \subseteq R$ ed $f: R \rightarrow A$ un omomorfismo di anelli unitari. Indicati con S^* e \hat{S} , rispettivamente, il sottomonoido generato e la saturazione di S in (R, \cdot) , si ha:*

$$f \text{ è } S\text{-invertig} \iff f \text{ è } S^*\text{-invertig} \iff f \text{ è } \hat{S}\text{-invertig}.$$

Dimostrazione. Abbiamo $S^{\bar{f}} \subseteq (S^*)^{\bar{f}} = (S^{\bar{f}})^* \subseteq (\hat{S})^{\bar{f}} \subseteq (S^{\bar{f}})^{\wedge}$ (quest'ultimo è la saturazione in A di $S^{\bar{f}}$). Da ciò, poiché $\mathcal{U}(A)$ è un sottomonoido saturo nel monoido moltiplicativo di A , segue subito che le condizioni $S^{\bar{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$, $(S^*)^{\bar{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$ e $(\hat{S})^{\bar{f}} \subseteq \mathcal{U}(A)$ sono tra loro equivalenti. Ma queste non sono altro che le condizioni che f sia S -invertig, S^* -invertig, \hat{S} -invertig. \square

Questo lemma mostra che la proprietà universale per omomorfismi S -invertig che stiamo considerando, introdotta a partire da S , l'avremmo potuta, in modo del tutto equivalente, introdurre a partire da S^* o da \hat{S} , dal momento che gli omomorfismi S -invertig sono precisamente quelli S^* -invertig o ancora quelli \hat{S} -invertig. Detto diversamente, il nostro problema universale ha soluzione per S se e solo se ha soluzione per S^* o, equivalentemente, per \hat{S} : un anello ed un omomorfismo da R a questo anello verificano le proprietà richieste per $S^{-1}R$ e f_S (in relazione ad S) se e solo se le verificano le stesse proprietà in relazione a S^* o, in modo ancora equivalente, in relazione a S^* : con $S^{-1}R$, $(S^*)^{-1}R$ e $(\hat{S})^{-1}R$ si indica dunque lo stesso oggetto (che è definito, ricordiamo, a meno di isomorfismi), e lo stesso vale per $f_S, f_{S^*}, f_{\hat{S}}$.

Passiamo ora alla costruzione di $S^{-1}R$. Per quanto appena osservato, possiamo sostituire S con il sottomonoido che esso genera ed assumere quindi che S sia un sottomonoido di (R, \cdot) . Questo rende

più semplice la costruzione, che generalizza quella, già nota, del campo dei quozienti di un dominio di integrità.

Nell'insieme $R \times S$ consideriamo la relazione di equivalenza \sim definita da:

$$(\forall x, y \in R)(\forall s, t \in S) \quad ((x, s) \sim (y, t) \iff (\exists a \in S)(xta = ysa)).$$

Che si tratti effettivamente di una relazione di equivalenza è facile da verificare: le proprietà riflessiva e simmetrica sono ovvie, per la transitività osserviamo che se $x, y, z \in R$ e $s, t, u \in S$ sono tali che $(x, s) \sim (y, t)$ e $(y, t) \sim (z, u)$, allora $xta = ysa$ e $yub = ztb$ per opportuni $a, b \in S$, e quindi $xutab = yusab = ztsab$, dunque $x \sim z$, perché $tab \in S$ (vediamo qui il vantaggio dell'aver assunto che S sia un sottomonoido).

Per ogni $x \in R$ e $s \in S$ indichiamo con x/s la classe $[(x, s)]_{\sim}$, e notiamo subito che $x/s = xt/st$ per ogni $t \in S$. Definiamo come $S^{-1}R$ l'anello di sostegno $(R \times S)/\sim$, con operazioni $+$ (additiva) e \cdot (moltiplicativa) definite ponendo, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st} \quad \text{e} \quad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st}.$$

Verifichiamo che queste operazioni sono ben definite. Dal momento che R è commutativo, basta verificare che $(xt+ys)/st = (x't+y's')/s't$ e $xy/st = x'y/s't$ per ogni $x, x', t \in R$ e $s, s', t \in S$ tali che $x/s = x'/s'$. In effetti, sotto quest'ultima condizione, esiste $a \in S$ tale che $xs'a = x'sa$, quindi $(xt+ys)s'ta = (x't+y's')sta$ (dunque $(xt+ys)/st = (x't+y's')/s't$) e $xys'ta = x'y'sta$ (dunque $x/s = x'/s'$); la verifica è così completa.

È chiaro che le operazioni appena definite in $S^{-1}R$ sono entrambe associative e commutative, che $0/1$ e $1/1$ sono elementi neutri per $+$ e \cdot , nell'ordine (per evitare di sovraccaricare le notazioni, scriviamo 0 e 1 per 0_R e 1_R). L'ovvia regola di calcolo $(x/s) + (y/s) = (x+y)/s$ per ogni $x, y \in R$ e $s \in S$ rende semplice verificare sia che $(S^{-1}R, +)$ è un gruppo (ogni $x/s \in S^{-1}R$ ha per opposto $(-x)/s$) che la distributività di \cdot rispetto a $+$: per ogni $x, y, z \in R$ e $s, t, u \in S$,

$$\left(\frac{x}{s} + \frac{y}{t}\right) \cdot \frac{z}{u} = \frac{xt + ys}{st} \cdot \frac{z}{u} = \frac{xtz + ysz}{stu} = \frac{xtz}{stu} + \frac{ysz}{stu} = \frac{xz}{su} + \frac{yz}{tu} = \frac{x}{s} \cdot \frac{z}{u} + \frac{y}{t} \cdot \frac{z}{u}.$$

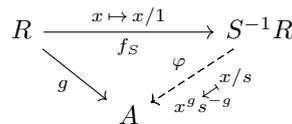
Abbiamo così strutturato $S^{-1}R$ come anello commutativo unitario. L'applicazione

$$f_S: x \in R \longmapsto x/1 \in S^{-1}R$$

è (come si riconosce senza difficoltà) un omomorfismo di anelli unitari, che è S -inverting perché, per ogni $s \in S$, si ha che $s^{f_S} = s/1$ è invertibile in $S^{-1}R$, con inverso $1/s$. Ci resta solo da provare che f_S ha la proprietà universale richiesta sopra. Siano A un anello commutativo unitario e sia $g: R \rightarrow A$ un omomorfismo S -inverting di anelli unitari. Dobbiamo dimostrare che esiste uno ed un solo omomorfismo $\varphi: S^{-1}R \rightarrow A$ di anelli unitari tale che $f_S\varphi = g$. Se φ ha questa proprietà, per ogni $x \in R$ e $s \in S$ si deve avere $(x/s)^\varphi = (x^{f_S}(s^{f_S})^{-1})^\varphi = x^{f_S\varphi}(s^{f_S\varphi})^{-1} = x^g(s^g)^{-1}$. Dunque, esiste al più un omomorfismo con le proprietà richieste per φ : l'unico possibile candidato è l'applicazione

$$x/s \in S^{-1}R \longmapsto x^g(s^g)^{-1} \in A,$$

ammesso che questa sia ben definita. Per verificare questo, iniziamo con l'osservare che, per ogni $s \in S$, esiste $(s^g)^{-1}$ in A , perché g è S -inverting. Siano poi $x, y \in R$ e $s, t \in S$ tali che $x/s = y/t$, vale a dire: $xta = ysa$ per qualche $a \in S$. Allora $x^g t^g a^g = y^g s^g a^g$, ed essendo a^g invertibile e quindi cancellabile in A , $x^g t^g = y^g s^g$; dunque $x^g (s^g)^{-1} = y^g (t^g)^{-1}$. Ciò prova che la nostra applicazione, che d'ora in poi chiamiamo φ , è ben definita. Ovviamente, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$, si ha $((x/s) + (y/t))^\varphi = ((xt + ys)/st)^\varphi = (x^g t^g + y^g s^g)(s^g)^{-1}(t^g)^{-1} = x^g (s^g)^{-1} + y^g (t^g)^{-1} = (x/s)^\varphi + (y/t)^\varphi$ e $((x/s) \cdot (y/t))^\varphi = (xy/st)^\varphi = x^g y^g (s^g)^{-1}(t^g)^{-1} = (x/s)^\varphi (y/t)^\varphi$, inoltre $1_{S^{-1}R}^\varphi = (1/1)^\varphi = 1_R^g (1_R^g)^{-1} = 1_A$, quindi φ è un omomorfismo di anelli unitari, inoltre $x^{f_S\varphi} = (x/1)^\varphi = x^g$, sicché $f_S\varphi = g$.



Riassumendo, abbiamo dimostrato che, per ogni anello commutativo unitario R e ogni suo sottoinsieme S esistono, e sono unici, a meno di isomorfismi, un anello $S^{-1}R$ ed un omomorfismo $f_S: R \rightarrow S^{-1}R$ che risolvono il problema universale di diagrammi per omomorfismi S -inverting posto all'inizio di questa sezione. Chiameremo l'anello $S^{-1}R$ un *anello di frazioni* (ottenuto da R e S) e f_S l'omomorfismo naturale da R a $S^{-1}R$.

Supponendo ancora che S sia un sottomonoido moltiplicativo di R , osserviamo che $S^{-1}R$ è costituito dalle frazioni x/s (al variare di $x \in R$ e $s \in S$), ma $x/s = (x/1)(1/s) = (x/1)(s/1)^{-1}$, dunque $S^{-1}R = \{(s^{fs})^{-1}r^{fs} \mid s \in S \wedge r \in R\}$, il che rende in un certo senso conto del simbolo usato per denotare questo anello. La rappresentazione delle frazioni non è, in generale, unica, ad esempio lo zero $0/1$ e l'unità $1/1$ di $S^{-1}R$ si possono anche rappresentare come $0/s$ e s/s , per ogni $s \in S$.

Esercizi e Osservazioni.

4.A.1. Verificare in dettaglio che, come osservato nella prima parte di questa sezione, quando R è un dominio di integrità e $0_R \notin S$ il sottoanello R_1 generato da R e da $\{s^{-1} \mid s \in S\}$ nel campo dei quozienti di R e l'immersione di R in questo verificano la proprietà universale per omomorfismi S -invertig di anelli unitari commutativi e dunque $S^{-1}R \simeq R_1$.

4.A.2. Nel caso in cui R sia un dominio di integrità e $S = R \setminus \{0_R\}$, l'anello di frazioni $S^{-1}R$ si può identificare con il campo dei quozienti di R . In effetti la costruzione che di $S^{-1}R$ abbiamo appena effettuato coincide, in questo caso, proprio con quella usuale del campo dei quozienti, dal momento che, con le notazioni utilizzate per la nostra costruzione, per ogni $x, y \in R$ e $s, t \in S$ si ha $(x, s) \sim (y, t)$ se e solo se $xt = ys$.

Più in generale, si ha quest'ultima equivalenza per ogni scelta dell'anello (commutativo unitario) R a condizione che S non contenga divisori dello zero in R . Come segue da uno dei prossimi risultati (Lemma 4.2) questa è precisamente la condizione affinché l'omomorfismo naturale f_S sia iniettivo.

4.A.3. Riprendendo l'osservazione al punto precedente, la situazione cambia molto nel caso in cui R non sia intero e S abbia tra i suoi elementi un divisore dello zero $s \neq 0_R$. In questo caso certamente f_S non può essere iniettiva, perché ogni omomorfismo S -invertig di anelli unitari con dominio R contiene $\text{Ann}_R(s)$ nel nucleo. Infatti, se $f: R \rightarrow A$ è un tale omomorfismo e $r \in \text{Ann}_R(s)$, allora $s^f r^f = (0_R)^f = 0_A$, quindi, essendo s^f invertibile, $r^f = 0_A$.

4.A.4. Con le notazioni che stiamo usando (ma qui S è inteso come arbitraria parte di R), supponiamo che S sia l'unione di due sottoinsiemi T e V . Allora $S^{-1}R$ si può ottenere in due passaggi successivi: costruendo $T^{-1}R$ e poi l'anello di frazioni ottenuto da questo anello e dall'immagine in esso di V . In modo più esplicito, $S^{-1}R \simeq \bar{V}^{-1}(T^{-1}R)$, dove $\bar{V} = V^{\bar{f}_T}$, e, una volta identificato $S^{-1}R$ con $\bar{V}^{-1}(T^{-1}R)$, si ha $f_S = f_T f_{\bar{V}}$.

Per provarlo, si può fare riferimento ai diagrammi commutativi qui disegnati, osservando che f_S è T -invertig, il che permette di usare la proprietà universale per definire φ , e che poi φ risulta \bar{V} -invertig, la qual cosa permette di costruire ψ . Inoltre $f_T f_{\bar{V}}$ è S -invertig, e usando questo fatto si può definire θ . Completare la dimostrazione provando che ψ e θ sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{f_T} & T^{-1}R & \xrightarrow{f_{\bar{V}}} & V^{-1}(T^{-1}R) \\
 & \searrow f_S & \downarrow \varphi & \swarrow \psi & \\
 & & S^{-1}R & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{f_T f_{\bar{V}}} & V^{-1}(T^{-1}R) \\
 & \searrow f_S & \swarrow \theta & \\
 & & S^{-1}R &
 \end{array}$$

4.A.5. (Anelli di frazioni di anelli non unitari) È possibile estendere le definizioni e la costruzione effettuata in questa sezione al caso degli anelli unitari. Sia R un arbitrario anello commutativo e sia S una sua parte *non vuota*. Un omomorfismo S -invertig è un omomorfismo f (di anelli) da R ad un anello commutativo unitario A tale che $S^f \subseteq \mathcal{U}(A)$. Non è difficile riconoscere che, se R è unitario, questa condizione implica che f sia un omomorfismo di anelli unitari (è essenziale per questo l'ipotesi $S \neq \emptyset$). Si può allora definire, tramite la proprietà universale, come fatto nel testo, la nozione di anello di frazioni $S^{-1}R$, che coinciderà con quella già data se R è unitario. Si può costruire un tale anello con la stessa costruzione effettuata nel caso in cui R è unitario (assumendo, come lecito, che S un sottosemigruppato moltiplicativo di R). L'anello risultante è unitario; il suo zero e la sua unità sono rispettivamente $0/s$ e s/s , per un arbitrario $s \in S$.

Lemma 4.2. *Siano R un anello commutativo unitario e S un suo sottomonoido moltiplicativo. Allora il nucleo dell'omomorfismo naturale $f_S: R \rightarrow S^{-1}R$ è*

$$\ker f_S = \bigcup_{s \in S} \text{Ann}_R(s).$$

Inoltre, per ogni $x \in R$ e $s \in S$:

- (i) $x/s = 0_{S^{-1}R}$ se e solo se $x \in \ker f_S$;
- (ii) x/s è un divisore dello zero (risp. nilpotente) in $S^{-1}R$ se e solo se $x + \ker f_S$ ha la stessa proprietà in $R/\ker f_S$.
- (iii) Se x/s è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora x è un divisore dello zero in R ;
- (iv) $x/s = 1_{S^{-1}R}$ se e solo se $x - s \in \ker f_S$;
- (v) x/s è invertibile in $S^{-1}R$ se e solo se x appartiene alla saturazione di S ;

Dimostrazione. Per ogni $x \in R$ abbiamo

$$x \in \ker f_S \iff x/1 = 0/1 \iff (\exists a \in S)(xa = 0) \iff x \in \bigcup_{s \in S} \text{Ann}_R(s),$$

dunque $\ker f_S = \bigcup \{\text{Ann}_R(s) \mid s \in S\}$. Proviamo ora la seconda parte dell'enunciato. Sia χ una tra le proprietà di essere zero, un divisore dello zero, nilpotente, invertibile. Per ogni $x \in R$ e $s \in S$, la frazione x/s verifica χ in $S^{-1}R$ se e solo se $x^s = x/1$ verifica la stessa proprietà, dal momento che x/s è il prodotto tra $x/1$ e $1/s$, che è invertibile. Inoltre, gli elementi di $\text{im } f_S$ che siano divisori dello zero in $S^{-1}R$ sono divisori dello zero anche in $\text{im } f_S$. Infatti, se $x/1$ è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora $(x/1)(y/t) = 0_{S^{-1}R} \neq y/t$ per qualche y/t in $S^{-1}R$, dunque $(x/1)(y/1)(1/t) = 0_{S^{-1}R}$ e quindi $(x/1)(y/1) = 0_{S^{-1}R} \neq y/1$, perché $1/t$ è invertibile.⁵ A questo punto è chiaro che, ad eccezione del caso in cui χ sia la proprietà di essere invertibile, x^s , o equivalentemente x/s , soddisfa χ in $S^{-1}R$ se e solo se soddisfa χ nel sottoanello $\text{im } f_S$. Da ciò seguono subito la (i) ed anche la (ii): per questa seconda utilizziamo l'isomorfismo da $R/\ker f_S$ a $\text{im } f_S$ indotto da f_S . Se x/s è un divisore dello zero in $S^{-1}R$, allora, dalla (ii) e dalla descrizione di $\ker f_S$ (o da una verifica diretta) segue l'esistenza di $y \in R$ e $a \in S$ tali che $xya = 0_R \neq ya$, quindi x è un divisore dello zero in R . Così è provata anche la (iii).

La (iv) segue facilmente dalla (i): poiché $1_{S^{-1}R} = s/s$, si ha $(x/s) - 1_{S^{-1}R} = (x - s)/s$, quindi $x/s = 1_{S^{-1}R} \iff x - s \in \ker f_S$.

Esaminiamo la (v). Se $x/1$ (vale a dire: x/s) è invertibile esistono $y \in R$ e $t \in S$ tali che $xy/t = (x/1)(y/t) = 1_{S^{-1}R}$, vale a dire: $xya = ta$ per qualche $a \in S$. Ma allora x divide $ta \in S$, quindi x è nella saturazione \hat{S} di S . Viceversa, se $x \in \hat{S}$ allora esiste $y \in R$ tale che $xy \in S$, dunque esiste la frazione y/xy e, ovviamente, $(x/1)(y/xy) = 1_{S^{-1}R}$, sicché $x/1$ è invertibile. A questo punto la dimostrazione è completa. \square

È interessante osservare un caso in cui un anello di frazioni è isomorfo ad un quoziente e ad un ideale dell'anello da cui è costruito.

Lemma 4.3. *Siano R un anello commutativo unitario e S un suo sottomonoido moltiplicativo. Supponiamo che esista $m \in S$ tale che ogni elemento di S sia un divisore in S di m (questa ipotesi è verificata se S è finito). Allora l'omomorfismo naturale $f_S: R \rightarrow S^{-1}R$ è suriettivo e $S^{-1}R \simeq R/\text{Ann}_R(m)$.*

*Dimostrazione.*⁶ Assunta l'ipotesi su m , ogni frazione $x/s \in S^{-1}R$ si può rappresentare come xt/m , dove t è un elemento di S tale che $m = st$. Pertanto $S^{-1}R = \{x/m \mid x \in R\}$. Per ogni $y \in R$, allora, esiste $x \in R$ tale che $y/m^2 = x/m$; da questa, moltiplicando per $m/1$, ricaviamo $y/m = x/1$. Ciò prova che $S^{-1}R = \{x/1 \mid x \in R\} = \text{im } f_S$, vale a dire: f_S è suriettiva. Ora, per ogni $s \in S$ si ha $\text{Ann}_R(s) \subseteq \text{Ann}_R(m)$, perché s divide m , dunque il Lemma 4.2 mostra $\ker f_S = \bigcup \{\text{Ann}_R(s) \mid s \in S\} = \text{Ann}_R(m)$ e quindi $S^{-1}R \simeq R/\text{Ann}_R(m)$, come richiesto.

Giustificiamo infine l'osservazione posta tra parentesi nell'enunciato: se S è finito $\prod_{s \in S} s$ ha la proprietà richiesta per m . \square

Come applicazione, possiamo descrivere gli anelli di frazioni dei quozienti di \mathbb{Z} . Fissiamo un po' di notazioni. Indichiamo con \mathbb{P} l'insieme dei numeri primi positivi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $\pi(n)$ l'insieme dei $p \in \mathbb{P}$ che dividono n . Per ogni $\pi \subseteq \mathbb{P}$ poniamo $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ e chiamiamo π -numero un intero positivo tale che $\pi(n) \subseteq \pi$ (dunque, l'insieme dei π -numeri è il sottomonoido di (\mathbb{Z}, \cdot) generato da π). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, indichiamo infine con n_π la π -parte di n , cioè il massimo divisore di n che sia un π -numero; si avrà ovviamente $n = n_\pi n_{\pi'}$.

⁵In generale, un divisore dello zero in un anello non resta necessariamente divisore dello zero in un sottoanello, anche unitario, a cui appartenga; si veda a questo proposito l'Esercizio 4.B.1.

⁶una dimostrazione alternativa è suggerita nell'Esercizio 4.B.7

Proposizione 4.4. *Siano n un intero positivo e S una parte di \mathbb{Z}_n . Sia T un insieme completo di rappresentanti degli elementi di S (dunque $S = \{[a]_n \mid a \in T\}$). Allora, se $\pi = \bigcup_{a \in T} \pi(a)$, si ha $S^{-1}\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_{\pi'}}$.*

Dimostrazione. Sappiamo dal [Lemma 4.3](#) che $S^{-1}\mathbb{Z}_n$ è isomorfo ad un quoziente di \mathbb{Z}_n , quindi $S^{-1}\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_\ell$ per qualche divisore ℓ di n . Inoltre, per ogni $p \in \pi$, $[p]_n$ divide almeno un elemento di S , quindi $[p]_n \in \hat{S}$; da ciò segue $[n_\pi] \in \hat{S}$. Ma $[n_{\pi'}]_n$ è in $\text{Ann}_{\mathbb{Z}_n}([n_\pi])$, dunque $[n_{\pi'}]_n \in \ker f_S$, dove f_S l'omomorfismo naturale $\mathbb{Z}_n \rightarrow S^{-1}\mathbb{Z}_n$. Di conseguenza ℓ divide $n_{\pi'}$.

D'altra parte l'epimorfismo $g: [a]_n \in \mathbb{Z}_n \mapsto [a]_{n_{\pi'}} \in \mathbb{Z}_{n_{\pi'}}$ è S -invertendo, dal momento che ogni $a \in T$, essendo un π -numero, è coprimo con $n_{\pi'}$. Dunque, per la proprietà universale, esiste un omomorfismo di anelli unitari $\varphi: S^{-1}\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{n_{\pi'}}$ tale che $g = f_S \varphi$. Poiché g è suriettiva, φ è suriettiva, quindi $n_{\pi'}$ divide ℓ . Concludiamo che ℓ coincide con $n_{\pi'}$, ottenendo così l'asserto. \square

Esercizi.

4.B.1. (A proposito di un passaggio nella dimostrazione del [Lemma 4.2](#)) Trovare un anello commutativo unitario R ed un suo sottoanello unitario A che sia integro ma contenga un elemento non nullo che sia un divisore dello zero in R .

4.B.2. Nella situazione del [Lemma 4.3](#), esiste un isomorfismo di R -moduli tra $S^{-1}R$ e mR (si ricordi che $S^{-1}R$ ha sempre una struttura di R -algebra, quindi di R -modulo, definita da f_S).

4.B.3. Sia $R = R_1 \times R_2$ un prodotto diretto di anelli commutativi unitari e sia $S \subseteq R_1$. Provare che $S^{-1}R$ è isomorfo a $S^{-1}R_1$, ragionando sul diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & R & \longrightarrow S^{-1}R \\
 R_1 \swarrow & \downarrow & \uparrow \\
 & R_1 & \longrightarrow S^{-1}R_1
 \end{array}$$

dove le frecce \swarrow e \searrow rappresentano l'immersione e la proiezione canonica relative alla decomposizione di R in prodotto diretto e le frecce orizzontali sono gli omomorfismi naturali. Fare attenzione: l'immersione non è un omomorfismo di anelli unitari, bisogna ovviare a questa difficoltà.

4.B.4. Siano X un insieme e Y una sua parte. Descrivere l'anello di frazioni $\{Y\}^{-1}\mathcal{P}(X)$. Se Z è un altro sottoinsieme di X , descrivere $\{Y, Z\}^{-1}\mathcal{P}(X)$.

4.B.5. Per un arbitrario anello commutativo unitario R ed un suo sottoinsieme S , provare che $S^{-1}R$ è l'anello triviale se e solo se $0 \in \hat{S}$.

4.B.6. Nella situazione del [Lemma 4.3](#), una volta identificato $S^{-1}R$ con $R/\text{Ann}_R(m)$, mostrare che l'epimorfismo canonico $R \rightarrow R/\text{Ann}_R(m)$ verifica la proprietà universale per omomorfismi S -invertendo di anelli unitari commutativi e quindi si può scegliere come omomorfismo naturale f_S .

4.B.7. Dimostrare in modo alternativo il [Lemma 4.3](#) ragionando come segue. Sia $K = \text{Ann}_R(m)$. Dal fatto che m^2 è un divisore di m in S , dedurre che m è invertibile modulo K . Visto questo, mostrare che l'epimorfismo canonico $R \rightarrow R/K$ è universale per gli omomorfismi S -invertendo di anelli unitari commutativi.

Ovviamente questo esercizio risolve anche il precedente.

4.1. Ideali negli anelli di frazioni. Localizzazioni.

Iniziamo con una osservazione piuttosto ovvia:

Lemma 4.5. *Sia R un anello commutativo e sia H un suo ideale primo (risp. primario). Se A è un sottoanello di R che contenga propriamente H , H è un ideale primo (risp. primario) in A .*

Lemma 4.6. *Sia $f: R \rightarrow A$ un omomorfismo di anelli unitari, con R e A entrambi commutativi. Siano B un ideale di A e $H = B^{\overleftarrow{f}}$ la sua antiimmagine mediante f . Allora:*

- (i) $H \triangleleft R$;
- (ii) se B è primo, H è primo;
- (iii) se B è primario, H è primario;
- (iv) $\sqrt{H} = (\sqrt{B})^{\overleftarrow{f}}$.

Dimostrazione. Componendo f con l'epimorfismo canonico $\nu: A \rightarrow A/B$ otteniamo un omomorfismo di anelli unitari $f\nu: R \rightarrow A/B$ di nucleo C . Dunque, $H \triangleleft R$. Inoltre R/H è isomorfo al sottoanello $A_1 := (\text{im } f + B/B)$ di A/B . Se B è primo (risp. primario) in A/B , allora lo è anche in $\text{im } f + B$, come stabilito nel [Lemma 4.5](#), dunque l'ideale nullo è primo (risp. primario) in A_1 e lo stesso vale in $R/H \simeq A_1$. Pertanto H è primo (risp. primario) in R . Resta da provare la (iv). Per ogni $r \in R$ si ha $r \in \sqrt{H} \iff (\exists n \in \mathbb{N})(r^n \in H) \iff (\exists n \in \mathbb{N})((r^n)^f \in B) \iff (\exists n \in \mathbb{N})(r^f)^n \in B \iff r^f \in \sqrt{B}$. Ciò prova la (iv). \square

Con le notazioni del [Lemma 4.6](#), H viene talvolta chiamato la contrazione di B rispetto a f . La nozione corrispondente, in termini di immagine anziché antiimmagine è quella di espansione (chiamata anche estensione, termine che evitiamo per evitare confusione cina la nozione standard di estensione tra moduli): l'espansione di un ideale I di R , rispetto ad f , è l'ideale di A generato dall'immagine di I , vale a dire: $I^{\bar{f}}A$. Va notato che l'immagine di un ideale mediante un omomorfismo (non suriettivo) non è in generale un ideale; ad esempio, se f è l'immersione di \mathbb{Z} in \mathbb{Q} ed I è un ideale non nullo di \mathbb{Z} , l'immagine di I mediante f (cioè I stesso) non è un ideale di \mathbb{Q} . In queste note useremo questa terminologia esclusivamente con riferimento all'omomorfismo naturale da un anello ad un suo anello di frazioni.

Fissiamo dunque R un anello commutativo unitario e una sua parte S , sia $f_S: R \rightarrow S^{-1}R$ l'omomorfismo naturale. Per ogni $H \triangleleft R$ e $K \triangleleft S^{-1}R$ chiamiamo *espansione* di H , indicata con H^e , l'ideale di $S^{-1}R$ generato da $H^{\bar{f}_S}$, mentre la *contrazione* K^c di K è l'antiimmagine di K mediante f_S . Otteniamo così due applicazioni

$$e: \mathfrak{I}(R) \rightarrow \mathfrak{I}(S^{-1}R), \quad c: \mathfrak{I}(S^{-1}R) \rightarrow \mathfrak{I}(R)$$

tra gli insiemi degli ideali di R e di $S^{-1}R$. La descrizione dettagliata di queste applicazioni è di grande importanza per lo studio degli anelli di frazioni. È ovvio che, considerati $\mathfrak{I}(R)$ e $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ come insiemi ordinati (dalla relazione di inclusione), e e c sono entrambe crescenti.

Lemma 4.7. *Con le notazioni appena fissate, se S è un sottomonoido di (R, \cdot) , per ogni $H \triangleleft R$ e $K \triangleleft S^{-1}R$ si ha:*

- (i) $H^e = \{h/s \mid h \in H \wedge s \in S\}$;
- (ii) $K^{ce} = K$;
- (iii) $H^{ec} = \bigcup_{s \in S} (H : s) = \{r \in R \mid (\exists s \in S)(rs \in H)\} \supseteq H$;
- (iv) $H^e = S^{-1}R \iff H \cap S \neq \emptyset$;

Dunque, $ce = \text{id}_{\mathfrak{I}(S^{-1}R)}$; di conseguenza c è iniettiva e e è suriettiva. Come insieme ordinato, $\mathfrak{I}(S^{-1}R)$ è isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathfrak{I}(R)$.

Dimostrazione. Sia $T = \{h/s \mid h \in H \wedge s \in S\}$. Per ogni $h, h' \in H$, $s, t \in S$ e $r \in R$ si ha $(h/s) + (h'/s') = (hs' + h's)/ss' \in T$ e $(h/s)(r/s') = hr/ss' \in T$, quindi T è un ideale di $S^{-1}R$. È anche chiaro che $H^{\bar{f}} \subseteq T \subseteq H^{\bar{f}}\{1/s \mid s \in S\} \subseteq H^{\bar{f}}S^{-1}R = H^e$. Dunque $T = H^e$, e la (i) è provata.

Verifichiamo ora la (ii). Banalmente, $(Kc)^{\bar{f}} = K^{\bar{f}\bar{f}}$ è incluso in K , quindi K^{ce} , l'ideale che esso genera in $S^{-1}R$, è incluso in K . Viceversa, sia $k = x/s$ (con $x \in R$ e $s \in S$) un elemento di K . Allora $x^{\bar{f}_S} = x/1 = k(1/s) \in K$, quindi $x \in K^c$, ma allora, per la (i), $k \in K^{ce}$. Otteniamo così la (ii).

Sia ora $r \in R$. Abbiamo $r \in H^{ec}$ se e solo se $r/1 \in H^e$, cioè, per quanto appena visto, se e solo se $r/1 = h/s$ per qualche $h \in H$ e $s \in S$. Se questo accade, esiste $a \in S$ tale che $rsa = ha$, dunque $rsa \in H$ e $r \in (H : sa)$; notiamo che $sa \in S$. Viceversa, se esiste $s \in S$ tale che $r \in (H : s)$, cioè $rs \in H$, allora $r/1 = rs/s \in H^e$. Ciò prova la (iii).

Passiamo alla (iv). Se esiste $s \in H \cap S$, allora $1_{S^{-1}R} = s/s \in H^e$ e $H^e = S^{-1}R$. Viceversa, se $H^e = S^{-1}R$ allora $H^{ec} = R$, ovvero $1 \in H^{ec}$ e, per (iii), esiste $s \in S$ tale che $1 \in (H : s)$, vale a dire: $s \in H$. È così provata anche la (iv).

La parte restante dell'enunciato è conseguenza immediata di (ii) e del fatto che le applicazioni c ed e sono entrambe crescenti. \square

Nella (iii) l'inclusione $H \subset H^{ec}$ può essere stretta. Per convincersene basta pensare al caso dell'ideale nullo: la (iii), insieme al [Lemma 4.7](#), mostra che $\{0\}^{ec} = \ker f_S$.

Corollario 4.8. *Se un anello commutativo unitario è artiniiano (risp. noetheriano, ad ideali tutti principali, principale) lo stesso vale per ogni suo anello di frazioni.*

Dimostrazione. Con le notazioni che stiamo usando, l'insieme ordinato $\mathfrak{J}(S^{-1}R)$ si immerge in $\mathfrak{J}(R)$ e quindi verifica le condizioni di catena che valgono in R . Poiché e è suriettiva, ogni ideale di $S^{-1}R$ è della forma H^e per un opportuno $H \triangleleft R$. Se H è principale, detto x un generatore di H è chiaro che $H^e = xS^{-1}R$, quindi anche H^e è principale. Infine, $S^{-1}R$ è un dominio di integrità se lo è R , quindi se R è principale anche $S^{-1}R$ lo è. \square

Per procedere con lo studio di e e c abbiamo ancora bisogno di un lemma, che mostra come, in un certo senso, il passaggio al quoziente ed il passaggio ad un anello di frazioni siano trasformazioni che commutano tra loro.

Lemma 4.9. *Sempre con le stesse notazioni, fissato $H \triangleleft R$ e detto $\nu: R \rightarrow R/H$ l'epimorfismo canonico da R a $R/H = R^\nu$, si ha $(S^\nu)^{-1}R^\nu \simeq S^{-1}R/H^e$.*

Dimostrazione. L'omomorfismo νf_{S^ν} è certamente S -invertendo, quindi la proprietà universale di f_S garantisce l'esistenza dell'omomorfismo di anelli unitari $\varphi: S^{-1}R \rightarrow (S^\nu)^{-1}R^\nu$ tale che $f_S \varphi = \nu f_{S^\nu}$. Di φ abbiamo una descrizione esplicita, ottenuta nel corso della costruzione degli anelli di frazioni e della verifica della proprietà universale: sappiamo che, per ogni $x \in R$ e $s \in S$,

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\nu} & R^\nu & \xrightarrow{f_{S^\nu}} & (S^\nu)^{-1}R^\nu \\ & \searrow f_S & & \nearrow \varphi: x/s \mapsto x^\nu/s^\nu & \\ & & S^{-1}R & & \end{array}$$

$$(x/s)^\varphi = x^\nu f_{S^\nu} s^{-\nu} f_{S^\nu} = (x^\nu/1^\nu)(s^\nu/1^\nu)^{-1} = x^\nu/s^\nu.$$

Ora, questa descrizione mostra chiaramente che φ è suriettiva. Inoltre, $\ker \varphi$ è costituito dalle frazioni x/t tali che x^ν/t^ν sia lo zero di $(S^\nu)^{-1}R^\nu$, cioè, per il [Lemma 4.2 \(iii\)](#), tali che $x^\nu \in \bigcup \{\text{Ann}_{R^\nu}(s^\nu) \mid s \in S\}$. Ora, per ogni $s \in S$, $\text{Ann}_{R^\nu}(s^\nu) = (H : s)^\nu$, quindi, utilizzando anche il [Lemma 4.7](#), otteniamo:

$$x/t \in \ker \varphi \iff x^\nu \in (H^{ec})^\nu \iff x \in H^{ec} \iff x/1 \in H^e \iff x/t \in H^e$$

(la seconda equivalenza richiede l'osservazione che $H = \ker \nu \subseteq H^{ec}$). Pertanto $\ker \varphi = H^e$. Di conseguenza $(S^\nu)^{-1}R^\nu \simeq S^{-1}R/\ker \varphi = S^{-1}R/H^e$. \square

Lemma 4.10. *Nella situazione del [Lemma 4.7](#), per ogni $H \triangleleft R$ tale che $H \cap S = \emptyset$:*

- (i) se H è primario, $H^{ec} = H$ e H^e è primario, con radicale $(\sqrt{H})^e$;
- (ii) se H è primo, H^e è primo.

Dimostrazione. Sappiamo dal [Lemma 4.7 \(iv\)](#) che $H^e \subset S^{-1}R$. Supponiamo H primario. Per la [\(iii\)](#) del [Lemma 4.7](#), se $r \in H^{ec}$ allora $rs \in H$ per qualche $s \in S$. Da $H \cap S = \emptyset$ segue $s^n \notin H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $s \notin \sqrt{H}$. Di conseguenza $r \in H$. Abbiamo così $H^{ec} = H$. Per provare che H^e è primario in $S^{-1}R$ consideriamo il quoziente $S^{-1}R/H^e$. Utilizzando le notazioni del [Lemma 4.9](#), $S^{-1}R/H^e \simeq (S^\nu)^{-1}R^\nu$, quindi per provare che H^e è primario basta verificare che ogni divisore dello zero in $(S^\nu)^{-1}R^\nu$ è nilpotente. Sia x un divisore dello zero in $(S^\nu)^{-1}R^\nu$, possiamo scrivere x come r^ν/s^ν per opportuni $r \in R$ e $s \in S$. Il [Lemma 4.2 \(iii\)](#) garantisce che, in $R^\nu = R/H$, r^ν è un divisore dello zero e quindi è nilpotente; di conseguenza x è nilpotente. Abbiamo così provato che H^e è primario; in modo analogo ma ancora più diretto vediamo che H^e è primo se H è primo, perché in questo caso $(S^\nu)^{-1}R^\nu$ è un dominio di integrità. Infine, ancora nell'ipotesi che H sia primario, \sqrt{H} è primo e $\sqrt{H} \cap S \neq \emptyset$, perché un elemento in $\sqrt{H} \cap S$ avrebbe una potenza in $H \cap S$, quindi $(\sqrt{H})^{ec} = \sqrt{H}$, per quanto dimostrato sopra. D'altra parte, come segue dal [Lemma 4.6 \(iv\)](#), $(\sqrt{H^e})^c = \sqrt{H^{ec}} = \sqrt{H}$. Abbiamo così $(\sqrt{H^e})^c = (\sqrt{H})^{ec}$; poiché c è iniettiva ne segue $\sqrt{H^e} = (\sqrt{H})^e$, il che completa la dimostrazione. \square

Teorema 4.11. *Siano R un anello commutativo unitario, sia S un suo sottomonoido di (R, \cdot) e sia $\mathfrak{J}_S(R)$ l'insieme degli ideali di R disgiunti da S . Allora le applicazioni estensione $e: \mathfrak{J}(R) \rightarrow \mathfrak{J}(S^{-1}R)$ e contrazione $c: \mathfrak{J}(S^{-1}R) \rightarrow \mathfrak{J}(R)$ inducono per restrizione isomorfismi di insiemi ordinati, l'uno inverso dell'altro, tra queste coppie di insiemi:*

- l'insieme degli ideali primari di R disgiunti da S e l'insieme degli ideali primari di $S^{-1}R$;
- $\text{Spec}(R) \cap \mathfrak{J}_S(R)$ e $\text{Spec}(S^{-1}R)$;
- per ogni $P \in \text{Spec}(R) \cap \mathfrak{J}_S(R)$, l'insieme degli ideali P -primari di R e l'insieme degli ideali P^e -primari di $S^{-1}R$.

⁷possiamo osservare che quest'ultima parte della dimostrazione fornisce anche una dimostrazione, indipendente dalla precedente ma molto meno diretta, di [\(ii\)](#). Possiamo anche aggiungere che, più in generale, si può dimostrare che $\sqrt{H^e} = \sqrt{H}^e$ per ogni ideale H di R (vedi)

Dimostrazione. Siano rispettivamente \mathcal{Q} e \mathcal{Q}' l'insieme degli ideali primari di R disgiunti da S e quello degli ideali primari di $S^{-1}R$. I lemmi 4.6, 4.7 e 4.10 mostrano che, per ogni $H \in \mathcal{Q}$ e $K \in \mathcal{Q}'$ si ha $H^e \in \mathcal{Q}'$ e $K^c \in \mathcal{Q}$ (dal momento che $K = K^{ce} \subset S^{-1}R$, certamente $K^c \cap S = \emptyset$), inoltre $H^{ec} = H$. Da ciò segue che \mathcal{Q}' è l'immagine di \mathcal{Q} mediante e mentre \mathcal{Q} è l'immagine di \mathcal{Q}' mediante c , e le applicazioni indotte per restrizione e riduzione da e e c tra questi insiemi sono applicazioni biettive, l'una inversa dell'altra. Inoltre gli stessi lemmi provano che queste applicazioni fanno corrispondere ideali primi a ideali primi, quindi inducono biezioni tra $\text{Spec}(R) \cap \mathcal{I}_S(R)$ e $\text{Spec}(S^{-1}R)$ e, inoltre, conservano i radicali degli ideali, quindi, per ogni ideale primo $P \in \mathcal{Q}$, fanno corrispondere ideali P -primari ad ideali P^e -primari. Infine, sia e che c sono crescenti, quindi tutte queste biezioni sono isomorfismi tra insiemi ordinati. \square

Osserviamo ancora che la funzione espansione conserva intersezioni e prodotti finiti tra ideali (ma non intersezioni infinite, come indicato nell'Esercizio 4.C.5) e somme arbitrarie; la funzione contrazione conserva le intersezioni (arbitrarie).

Lemma 4.12. *Nelle solite notazioni:*

- (i) per ogni $I, J \triangleleft R$, $(IJ)^e = I^e J^e$; $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$
- (ii) per ogni famiglia $(H_i)_{i \in I}$ di ideali di R , $(\sum_{i \in I} H_i)^e = \sum_{i \in I} H_i^e$;
- (iii) per ogni famiglia $(K_i)_{i \in I}$ di ideali di $S^{-1}R$, $(\bigcap_{i \in I} K_i)^c = \bigcap_{i \in I} K_i^c$;

Dimostrazione. Siano $I, J \triangleleft R$. Che $(IJ)^e = I^e J^e$ è chiaro dalla descrizione delle espansioni in Lemma 4.7.⁸ Mentre è altrettanto chiaro, dalla crescita di e , che $(I \cap J)^e \subseteq I^e \cap J^e$, meno ovvia è l'inclusione opposta. Sia $x \in I^e \cap J^e$. Esistono $i \in I, j \in J, s, t \in S$ tali che $x = i/s = j/t$. Esiste allora $a \in S$ tale che $ita = jsa$; ma da questa uguaglianza traiamo $ita \in I \cap J$ e quindi $x = ita/sta \in (I \cap J)^e$. Abbiamo provato la (ii). Il resto dell'enunciato è ovvio. \square

L'enunciato precedente ci dice che e è un omomorfismo tra reticoli. Lo stesso non vale per c , che non conserva le somme tra ideali (vedi Esercizio 4.C.6).

Esercizi.

4.C.1. Verificare che se $f: R \rightarrow A$ è un omomorfismo suriettivo tra anelli, l'immagine mediante f di un ideale di R è necessariamente un ideale di A .

4.C.2. Nelle notazioni del Lemma 4.7 si ha, per ogni $H \triangleleft R$:

- $H^{ece} = H^e$;
- $H^{ec} = H$ se e solo se H è la contrazione di un ideale di R ;
- se H è generato da un suo sottoinsieme X , allora H^e è generato da $X^{\bar{f}S}$;
- $S \cap H = \emptyset \iff \hat{S} \cap H = \emptyset$; verificarlo in modo diretto.

Inoltre, e è iniettiva se e solo se $S \subseteq \mathcal{U}(R)$ (vale a dire: e e c descrivono una biezione tra $\mathcal{I}(R)$ e $\mathcal{I}(S^{-1}R)$ solo nel caso banale in cui f_S sia un isomorfismo tra R e $S^{-1}R$).

4.C.3. Provare che, nella notazioni del Lemma 4.7, $(\sqrt{H})^e = \sqrt{H^e}$ per ogni $H \triangleleft R$.

4.C.4. Costruire un esempio di omomorfismo di anelli unitari commutativi $f: R \rightarrow A$ e di un ideale $H \triangleleft R$ tali che $(\sqrt{H})^{\bar{f}} \subset \sqrt{H^{\bar{f}}}$.

I prossimi cinque esercizi sono relativi al Lemma 4.12; le notazioni sono le solite.

4.C.5. Mostrare con un esempio che l'espansione di una intersezione di una famiglia (infinita) $(H_i)_{i \in I}$ di ideali non è necessariamente l'intersezione degli ideali H_i^e . Suggerimento: basta pensare a qualche anello di frazioni di \mathbb{Z} .

4.C.6. Mostrare con un esempio che la contrazione di una somma di due ideali di un anello di frazioni non è necessariamente la somma delle loro contrazioni. Suggerimento: se R è l'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$, $S = \{2\}$ e $I = xR$ e $J = (x+2)R$, allora $I = I^{ec}$ e $J = J^{ec}$, mentre $(I+J)^e = S^{-1}R$.

4.C.7. L'applicazione contrazione non conserva neanche i prodotti tra ideali. Per costruire un controesempio a riguardo, si considerino un gruppo abeliano A di ordine primo p , visto (nell'unico modo possibile) come \mathbb{Z} -modulo e la idealizzazione $R = A \rtimes \mathbb{Z}$. Verificare che il nucleo dell'omomorfismo naturale $R \rightarrow \{p\}^{-1}R$ è A , calcolare la contrazione dell'ideale nullo di $\{p\}^{-1}R$ ed il suo quadrato per arrivare alla conclusione. In aggiunta: utilizzando il Lemma 4.9, identificare $\{p\}^{-1}R$.

⁸o da considerazioni più generali, vedi Esercizio 4.C.8.

4.C.8. Sia $f: R \rightarrow A$ un omomorfismo di anelli unitari commutativi. Mostrare che l'applicazione che ad ogni ideale H di R associa l'ideale di A generato da $H^{\bar{f}}$ conserva prodotti e somme (arbitrarie) tra ideali.

4.C.9. In contrasto con quanto notato con l'esercizio precedente, il fatto che la funzione espansione conservi l'intersezione tra ideali è una proprietà specifica dell'omomorfismo naturale da un anello commutativo unitario ad un suo anello di frazioni. Ad esempio, se K è un qualsiasi anello commutativo unitario, e $R = K[x, y]$ è un anello di polinomi a due indeterminate su K , non è difficile trovare un omomorfismo di anelli unitari f da R ad un altro anello commutativo A tale che, posto $I = xR$ e $J = yR$, si abbia che $(I \cap J)^{\bar{f}}$ sia un ideale di A propriamente contenuto in $I^{\bar{f}} \cap J^{\bar{f}}$. Trovare un tale f .

4.C.10. Sia R un dominio di integrità e S una sua parte. Ricordando che $S^{-1}R$ può essere realizzato come sottoanello del campo dei quozienti $Q(R)$ di R (di cui consideriamo R come sottoanello) con l'immersione $R \hookrightarrow Q(R)$ come omomorfismo naturale, osservare che $K^c = K \cap R$ per ogni $K \triangleleft S^{-1}R$. Questa è l'origine di una notazione (un po' balorda) usata da alcuni autori che indicano tutte le contrazioni di ideali degli anelli di frazioni di un arbitrario anello R come intersezioni con R .

I risultati precedenti hanno una interpretazione molto esplicita alla luce delle osservazioni che ogni anello di frazioni si può riguardare come anello di frazioni definito da un sottomonoido saturo ([Lemma 4.1](#)) e che, i sottomonoidi (moltiplicativi) saturi in un anello commutativo unitario sono precisamente i complementi delle unioni di ideali primi ([Lemma 3.6](#)).

Sia dunque R un anello commutativo unitario. Per quanto appena notato, ogni anello di frazioni di R è della forma $S^{-1}R$, dove $S = R \setminus \bigcup \mathcal{P}$ per un insieme \mathcal{P} di ideali primi. Il [Teorema 4.11](#) offre una descrizione dello spettro primo di questo anello: un ideale primo di R è disgiunto da S se e solo se è contenuto nell'unione $\bigcup \mathcal{P}$. Dunque, la funzione contrazione è una biezione, ed anche un isomorfismo di insiemi ordinati, da $\text{Spec}(S^{-1}R)$ all'insieme degli ideali primi di R contenuti in $\bigcup \mathcal{P}$. Un caso particolarmente importante è quello in cui \mathcal{P} è un singleton, vale a dire: $\mathcal{P} = \{P\}$ per un qualche $P \in \text{Spec}(R)$, e dunque $S = R \setminus P$. Si usa scrivere, in questo caso, R_P per $(R \setminus P)^{-1}R$. Per quanto visto nel caso generale, $\text{Spec}(R_P)$ è isomorfo come insieme ordinato all'insieme $\mathcal{I}_P(R) = \{Q \in \text{Spec} R \mid Q \subseteq P\}$ degli ideali primi di R contenuti in P . Ovviamente $\mathcal{I}_P(R)$ ha massimo: questo massimo è P , quindi l'ideale di R_P corrispondente a P , cioè P^e è il massimo (rispetto all'inclusione) in $\text{Spec}(R_P)$. Da questo segue subito che P^e è massimo tra gli ideali propri di R_P : ogni ideale proprio di R_P è contenuto in un ideale massimale, quindi primo, e dunque in P^e . Abbiamo così provato:

Corollario 4.13. *Sia R un anello commutativo unitario e sia P un suo ideale primo. Allora R_P è un anello locale, di ideale massimale P^e .*

Gli anelli di frazioni di questa forma sono noti come localizzazioni. Più precisamente, per ogni ideale primo P di un anello commutativo unitario R , l'anello di frazioni $R_P = (R \setminus P)^{-1}R$ è la *localizzazione di R a P* .

Un importante esempio è dato dalle localizzazioni di \mathbb{Z} , che possiamo rapidamente descrivere tutte. Ricordiamo ([Esercizio 4.A.1](#)) che gli anelli di frazioni dei domini di integrità si possono realizzare come sottoanelli dei campi dei quozienti: se R è l'anello e $0 \notin S$, $S^{-1}R$ sarà il sottoanello di $Q(R)$ generato da R e da $\{s^{-1} \mid s \in S\}$. Allora, per ogni ideale primo P di \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_P è il sottoanello di \mathbb{Q} generato dai reciproci degli elementi di $\mathbb{Z} \setminus P$. Se $P = \{0\}$ questo è il campo \mathbb{Q} . Se $P \neq 0$, dunque $P = p\mathbb{Z}$ per qualche numero primo positivo p , otteniamo

$$\mathbb{Z}_P = \{n/m \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge p \text{ non divide } m\} =: \mathbb{Q}_{p'},^9$$

come si verifica facilmente. Come si può descrivere $\mathcal{I}(\mathbb{Q}_{p'})$? Gli ideali primi di $\mathbb{Q}_{p'}$ sono le espansioni degli ideali primi di \mathbb{Z} contenuti in $p\mathbb{Z}$, quindi di $\{0\}$ e $p\mathbb{Z}$. Dunque $\text{Spec}(\mathbb{Q}_{p'}) = \{\{0\}, p\mathbb{Q}_{p'}\}$. Similmente, dal fatto che gli ideali primari non nulli di \mathbb{Z} contenuti in $p\mathbb{Z}$ sono quelli della forma $p^n\mathbb{Z}$ al variare di $n \in \mathbb{N}^+$ ricaviamo che gli ideali primari di $\mathbb{Q}_{p'}$ sono l'ideale nullo e gli ideali della forma $p^n\mathbb{Q}_{p'}$ al variare di $n \in \mathbb{N}^+$. Ci saremmo potuti arrivare anche per altra via: sappiamo che $\mathbb{Q}_{p'}$ è principale

⁹usiamo questa notazione che ricorda il fatto che questo sottoanello, quozientato con \mathbb{Z} , costituisce la p' -componente del gruppo additivo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Altre notazioni usate per questo anello sono $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$, che è quella generale per le localizzazioni ma non è molto comune, \mathbb{Z}_p , che è una 'semplificazione' della precedente ma è terribilmente fuorviante, \mathbb{Q}_p , che non è solo una mescolanza tra le precedenti, ma viene giustificata dal riferimento al campo dei numeri p -adici. La notazione che usiamo qui è particolarmente diffusa tra chi si occupa di teoria di gruppi.

(Corollario 4.8)) e che gli ideali primari degli anelli principali sono tutte e solo le potenze degli ideali primi. Ma in questo caso di ideali primi ne abbiamo solo due, e le loro potenze sono gli ideali che abbiamo elencato. Osserviamo che questi ideali sono a due a due distinti, vale a dire $p^a\mathbb{Q}_{p'} \neq p^b\mathbb{Q}_{p'} \neq \{0\}$ per ogni coppia di interi positivi distinti a, b ; ciò segue (ad esempio) dal 4.11. Oltre questi ideali e l'anello stesso, esistono altri ideali in $\mathbb{Q}_{p'}$? Sappiamo che la funzione espansione e è suriettiva, dunque $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'}) = \{H^e \mid H \triangleleft \mathbb{Z}\} = \{(m\mathbb{Z})^e \mid m \in \mathbb{N}\} = \{m\mathbb{Q}_{p'} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Sia $m \in \mathbb{N}^+$; possiamo senz'altro scrivere $m = p^n u$ per opportuni $n, u \in \mathbb{N}$ tali che p^n non divida u . Ma allora u è invertibile in $\mathbb{Q}_{p'}$, abbiamo dunque $m\mathbb{Q}_{p'} = p^n\mathbb{Q}_{p'}$. In questo modo arriviamo a concludere che $\mathbb{Q}_{p'}$ non ha ideali oltre a quelli già identificati. In definitiva, $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$ è costituito dall'ideale nullo e dagli ideali $p^n\mathbb{Q}_{p'}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ (includiamo così nel conto anche $\mathbb{Q}_{p'} = p^0\mathbb{Q}_{p'}$) e sono, ripetiamo, a due a due distinti. Dunque, $\mathfrak{I}(\mathbb{Q}_{p'})$ è una catena numerabile. Menzioniamo il fatto che questo rende $\mathbb{Q}_{p'}$ un esempio di anello di valutazione (nozione non ancora introdotta). Il fatto che tutti gli ideali non nulli di $\mathbb{Q}_{p'}$ siano potenze del suo ideale massimale $p\mathbb{Q}_{p'}$ non è un caso; questa è una proprietà comune a tutti gli anelli noetheriani di valutazione.

Un'altra osservazione a proposito delle localizzazioni riguarda i loro campi residui. A partire da un anello commutativo unitario R e da un suo ideale primo P , è possibile ottenere un campo in modo abbastanza diretto in due modi: il primo è passare al quoziente R/P , che è un dominio di integrità, e quindi al campo dei quozienti $Q(R/P)$ di questo; il secondo è il passaggio alla localizzazione R_P e quindi al suo campo residuo R_P/P^e . Queste due procedure portano essenzialmente allo stesso risultato:

4.14. *Siano R un anello commutativo unitario e P un suo ideale primo. Allora $R_P/P^e \simeq Q(R/P)$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma 4.9. Posto $S = R \setminus P$ e $\bar{R} = R/P$, l'immagine di S in \bar{R} è $\bar{S} := \bar{R} \setminus \{0\}$, quindi $Q(R/P) = (\bar{S})^{-1}\bar{R} \simeq S^{-1}R/P^e = R_P/P^e$. \square

Possiamo anche dire qualcosa sugli anelli di frazioni della forma $S^{-1}R$, dove $S = R \setminus \bigcup \mathcal{P}$ per un insieme finito \mathcal{P} di ideali primi. In questo caso, mediante le biezioni espansione e contrazione, $\text{Spec}(S^{-1}R)$ corrisponde all'insieme degli ideali primi di R che siano contenuti in $\bigcup \mathcal{P}$. Ma il Lemma 2.3 mostra che un ideale (primo o non primo) di R è contenuto in $\bigcup \mathcal{P}$ se e solo se è contenuto in un elemento di \mathcal{P} . Dunque l'insieme di questi ideali (che, ripetiamo, come insieme ordinato è isomorfo a $\text{Spec}(S^{-1}R)$) è $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{I}_P(R)$. Se ne deduce che gli ideali massimali di $S^{-1}R$, cioè gli elementi massimali di $\text{Spec}(S^{-1}R)$ sono espansioni di ideali primi appartenenti a \mathcal{P} , precisamente degli elementi di \mathcal{P} massimali per inclusione. Se chiamiamo *semilocale* un anello commutativo unitario in cui l'insieme degli ideali massimali è finito, abbiamo provato:

Corollario 4.15. *Sia R un anello commutativo unitario e sia \mathcal{P} un insieme finito di suoi ideali primi. Allora $(R \setminus \bigcup \mathcal{P})R_P$ è un anello semilocale. I suoi ideali massimali sono gli ideali della forma P^e al variare di P nell'insieme degli elementi di \mathcal{P} massimali per inclusione.¹⁰*

Osservazioni ed esercizi.

4.D.1. L'idea di localizzazione è molto semplice da visualizzare in questi termini: scelto un ideale primo P dell'anello commutativo R , il passaggio all'anello di frazioni R_P “rende invertibili” gli elementi di R non in P . In questo modo si ottiene un anello in cui gli elementi esterni ad un certo ideale proprio (P^e) sono invertibili, quindi un anello locale. Cosa cambia se si parte da un ideale non primo al posto di P ?

4.D.2. Verificare che tutti gli anelli di frazioni che siano locali sono localizzazioni. Si tratta di provare che, se R è un anello commutativo unitario e S è un sottomonoide saturo di (R, \cdot) tale che $S^{-1}R$ sia locale, allora $R \setminus S$ è un ideale primo di R .

4.D.3. Realizzare il sottoanello $\mathbb{Q}_2 = \{n/2^m \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$ di \mathbb{Q} come localizzazione di \mathbb{Z} e descriverne gli ideali. Determinare l'ideale di \mathbb{Q}_2 generato da $\{24/13, 36/5\}$ e la sua contrazione in \mathbb{Z} .

¹⁰si badi bene: la richiesta qui non è che questi ideali P siano massimali come ideali di R , ma solo che siano massimali per inclusione tra gli elementi di \mathcal{P} .

5. ANELLI ARTINIANI

Proposizione 5.1. *Ogni dominio di integrità artiniano non triviale è un campo.*

Dimostrazione. Sia R un dominio di integrità artiniano e sia $0_R \neq r \in R$. La successione di ideali $(r^n R)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $r^n R = r^{n+1} R$. Dunque, per ogni $a \in R$ esiste $a' \in R$ tale che $r^n a = r^{n+1} a'$. Poiché r è cancellabile, allora $a = ra'$. Abbiamo provato che ogni elemento di R è multiplo di r , vale a dire: $R = rR$. Come caso particolare, per $a = r$, abbiamo anche $r = rr'$, per un $r' \in R$. Ma allora, per ogni $a \in R$, otteniamo $r'a = r'ra' = ra' = a$. Abbiamo così provato che r' è l'unità di R . Ora, con le notazioni di sopra (per r' al posto di a), $r' = rr''$, il che mostra che r'' è l'inverso di r . Dunque, R è unitario ed ogni suo elemento non nullo ha inverso; R è un campo. \square

Lemma 5.2. *Sia R un anello commutativo artiniano. Allora:*

- (i) ogni ideale primo di R è massimale;
- (ii) $\text{Spec}(R)$ è finito.

Dimostrazione. Sia $P \in \text{Spec}(R)$. Allora R/P è un campo, per la [Proposizione 5.1](#), quindi $P \triangleleft R$. Ciò prova la (i). Sia ora \mathcal{J} l'insieme degli ideali di R che siano intersezione di un numero finito di ideali massimali. Se $\mathcal{J} = \emptyset$, allora $\text{Spec}(R) = \emptyset$ e la (ii) vale banalmente. Se $\mathcal{J} \neq \emptyset$, esiste in \mathcal{J} un elemento minimale J , perché R è artiniano. Allora $J = \bigcap \mathcal{P}$ per un opportuno insieme finito \mathcal{P} di ideali massimali di R . Per ogni ideale primo (e quindi massimale) P di R , $J \cap P$ è intersezione di un numero finito di ideali massimali, quindi $J \cap P = J$ per la minimalità di J , ovvero $\bigcap \mathcal{P} = J \subseteq P$. Ma allora $M \subseteq P$ per qualche $M \in \mathcal{P}$; essendo M massimale questo significa $M = P$. Pertanto $P \in \mathcal{P}$. Ciò prova che $\text{Spec}(R) \subseteq \mathcal{P}$, dunque $\text{Spec}(R)$ è finito. \square

Più in generale, ad essere sempre finito in un anello commutativo artiniano è l'insieme degli ideali massimali—si veda l'[Esercizio 5.A.3](#).

Un ideale nilpotente è, per definizione, un ideale H tale che $H^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.3. *Sia R un anello commutativo artiniano. Allora $\text{Jac}(R)$ è nilpotente.*

Dimostrazione. Sia $J = \text{Jac}(R)$. La successione $(J^n)_{n \in \mathbb{N}}$ di ideali di R è decrescente, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $J^n = J^{n+1}$. Ragionando per assurdo, supponiamo $J^n \neq 0$. Sia \mathcal{S} l'insieme degli ideali H di R tali che $H = HJ \neq 0$. Chiaramente $J^n \in \mathcal{S}$, quindi $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ed esiste in \mathcal{S} un elemento minimale H . Poiché $HJ^n = H \neq 0$, esiste $h \in H$ tale che $hJ^n \neq 0$. Ovviamente $hJ^n \triangleleft R$ e $(hJ^n)J = hJ^{n+1} = hJ^n$, quindi $hJ^n \in \mathcal{S}$. Ma $hJ^n \subseteq H$, quindi $hJ^n = H$ per la minimalità di H .¹¹ Sia $\eta: R \rightarrow \text{End}(H, +)$ l'omomorfismo di anelli definito da $x^{n^*} = xr$ per ogni $x \in H$. Essendo $h \in H = HJ^n$, esiste $u \in J^n$ tale che $h = hu$. Ora, per ogni $x \in H$ esiste $a \in J^n$ tale che $x = ah$, quindi $xu = ah u = ah = x$. Dunque $h^n = \text{id}_H$. Se $K = \ker \eta$, allora R/K è isomorfo al sottoanello $\text{im } \eta$ di $\text{End}(H, +)$, che è unitario perché $\text{id}_H = u^n \in \text{im } \eta$. Dunque R/K è un anello unitario di unità $u + K$, il che prova l'esistenza di un ideale massimale M di R contenente K e tale che $u \notin M$. Ma $u \in J \subseteq M$; otteniamo così una contraddizione. \square

È ovvia conseguenza sia del [Lemma 5.3](#) che del [Lemma 5.2](#) che in un anello artiniano il radicale di Jacobson ed il nilradicale coincidono.

Lemma 5.4. *Per uno spazio vettoriale V su un campo K sono equivalenti le proprietà di essere artiniano, di essere noetheriano, di avere dimensione infinita.*

Dimostrazione. Come anello, K è sia artiniano che noetheriano, essendo semplice. Se V ha dimensione finita, allora V è un modulo finitamente generato su K , quindi è sia artiniano che noetheriano.

Se V ha dimensione infinita, esiste in V un insieme numerabile K -linearmente indipendente B . Scriviamo B come $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, dove $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano, rispettivamente, V_n il sottospazio di V generato da $B_n := \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ e W_n quello generato da $B \setminus B_n$. Allora $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sono una successione strettamente crescente ed una successione strettamente decrescente di sottospazio di V . Quindi V non è né artiniano né noetheriano. \square

Lemma 5.5. *Sia A un modulo sull'anello commutativo unitario R e supponiamo che A sia annullato da un prodotto di ideali massimali (non necessariamente distinti) di R . Allora A è artiniano se e solo se è noetheriano.*

¹¹se R fosse unitario, a questo punto basterebbe invocare il Lemma di Nakayama per ottenere una contraddizione e completare la dimostrazione. In realtà si potrebbe dimostrare una versione del lemma di Nakayama per una nozione generale di modulo su anelli non unitari, questa basterebbe a concludere la dimostrazione in ogni caso.

Dimostrazione. Siano M_1, M_2, \dots, M_n ideali massimali di R tali che $AM_1M_2 \cdots M_n = 0$. Poniamo $A_0 = A$ e $A_i = AM_1M_2 \cdots M_i$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Fissato $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, abbiamo $A_{i-1}M_i = A_i$, quindi il quoziente $F_i = A_{i-1}/A_i$ è annullato da M_i e quindi si può riguardare come (R/M_i) -modulo, cioè come (R/M_i) -spazio vettoriale. Ora, l'insieme degli R -sottomoduli di F_i coincide con quello degli (R/M_i) -sottospazi di F_i , quindi F_i è artiniano (risp. noetheriano) come R -modulo se e solo se lo è come (R/M_i) -spazio vettoriale. Segue allora dal [Lemma 5.4](#) che F_i è artiniano (come R -modulo) se e solo se è noetheriano. Allora, se A ha una delle proprietà di essere artiniano o noetheriano, ciascuno dei quozienti F_i ha la stessa proprietà, e quindi anche l'altra. Pertanto A ha una serie finita, precisamente

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{n-1} \supseteq A_n = 0,$$

i cui fattori (i quozienti F_i) sono sia artiniano che noetheriano, quindi A è sia artiniano che noetheriano. \square

Lemma 5.6. *Siano R e $H \triangleleft R$. Se \sqrt{H} è finitamente generato (come ideale di R), allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(\sqrt{H})^n \subseteq H$.*

Dimostrazione. Sia F un insieme finito di generatori di \sqrt{H} . Per ogni $a \in F$ esiste $\lambda_a \in \mathbb{N}$ tale che $a^{\lambda_a} \in H$. Ogni elemento r di \sqrt{H} è una combinazione lineare degli elementi di F a coefficienti in R . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora, r^n è una combinazione lineare di elementi della forma $\prod_{a \in F} a^{\mu_a}$, dove gli μ_a sono numeri naturali tali che $\sum_{a \in F} \mu_a = n$. Se n è scelto in modo che $n > \sum_{a \in F} (\lambda_a - 1)$, allora la condizione sui naturali μ_a assicura che $\mu_a \geq \lambda_a$, e quindi $a^{\mu_a} \in H$, per almeno un $a \in F$, dunque $r^n \in H$. Ciò prova che, per ogni tale n , $(\sqrt{H})^n \subseteq H$. \square

È appena il caso di notare che l'ipotesi del [Lemma 5.6](#) è automaticamente verificata da ogni ideale di un anello noetheriano.

Teorema 5.7. *Sia R un anello commutativo unitario. Allora R è artiniano se e solo se R è noetheriano e tutti i suoi ideali primi sono massimali.*

Dimostrazione. Sia R artiniano. Sappiamo dal [Lemma 5.2](#) che R ha solo un numero finito di ideali massimali; sia J il loro prodotto questi. Segue dal [Lemma 5.3](#) che $J^n = 0$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}$. Allora R è annullato da J^n , che è un prodotto di ideali massimali di R , quindi R è noetheriano per il [Lemma 5.5](#).¹² Insieme al [5.2](#), questo prova che la condizione è necessaria.

Viceversa, sia R un anello noetheriano in cui tutti gli ideali primi sono massimali. Sia $0 = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$ una decomposizione primaria minimale dell'ideale nullo di R ; per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sia $P_i = \sqrt{Q_i}$. Allora $P_i \triangleleft R$ per il [Lemma 5.2](#) e, per il [Lemma 5.6](#), esiste $t_i \in \mathbb{N}$ tale che $P_i^{t_i} \subseteq Q_i$. A questo punto abbiamo $P_1^{t_1} P_2^{t_2} \cdots P_n^{t_n} \subseteq Q_1 Q_2 \cdots Q_n \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n = 0$. Dunque, in R l'ideale nullo è un prodotto di ideali massimali. Come prima, utilizzando il [Lemma 5.5](#), concludiamo da ciò che R è artiniano. \square

La dimostrazione di quest'ultimo teorema ha una ulteriore conseguenza: ogni anello commutativo unitario artiniano è, in modo essenzialmente unico, prodotto diretto di un numero finito di anelli commutativi locali; :

Proposizione 5.8. *Sia R un anello commutativo unitario artiniano. Allora esistono, e sono univocamente determinati a meno di permutazioni, $n \in \mathbb{N}$ e n ideali non nulli H_1, H_2, \dots, H_n di R che, come anelli, sono unitari e artiniani e tali che $R = \bigoplus_{i=1}^n H_i$.*

Dimostrazione. Sia $0 = \bigcap_{i \in F} Q_i$ una decomposizione primaria minimale dell'ideale nullo di R . Per ogni $i \in F$, il radicale P_i di Q_i è l'unico ideale massimale di R contenente Q_i , perché gli ideali primi di R sono massimali ([Lemma 5.2](#)), dunque R/Q_i è un anello locale e, se $j \in F \setminus \{i\}$ allora Q_i e Q_j sono comassimali perché $Q_j \not\subseteq P_i$, dal momento che $P_i \neq P_j$. Per il [Lemma 2.4](#), questo mostra che l'omomorfismo $r \in R \mapsto (r + H_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \in \prod_{i=1}^n (R/Q_i)$ è un isomorfismo, quindi R è prodotto diretto di n anelli (unitari) artiniani locali.

Resta da provare l'unicità della decomposizione di R come prodotto diretto interno di anelli locali. Sia $R = \bigoplus_{i \in I} H_i$ una tale decomposizione, dunque, per ogni $i \in I$, $0 \neq H_i \triangleleft R$ e H_i è un anello (unitario) locale; sia M_i il suo ideale massimale. Poiché R è artiniano, è chiaro che I è finito. Per ogni $i \in I$, siano $K_i = \sum_{j \neq i} H_j$ e $L_i = K_i + M_i$. Allora L_i è massimale, ad esempio perché $R/L_i \simeq H_i/M_i$ è un campo.

¹²anche se irrilevante per la dimostrazione, notiamo che $J = \text{Jac}(R)$, dal momento che, come è ovvio, gli ideali massimali di R sono a due a due comassimali, quindi il loro prodotto è l'intersezione tra essi.

Inoltre, $M_i = \text{Jac}(H_i)$ è nilpotente per il [Lemma 5.3](#), quindi $L_i = \sqrt{K_i}$ e di conseguenza K_i è L_i -primario. Ora, $\bigcap_{i \in I} K_i = 0$ mentre $\bigcap_{j \neq i \in I} K_i = H_j \neq 0$ per ogni $j \in I$ (e $\sqrt{K_i} = L_i \neq L_j = \sqrt{K_j}$ se $j \neq i \in I$), quindi quella ottenuta è una decomposizione primaria minimale dell'ideale nullo (pertanto $|I| = n$ per il primo teorema di unicità per decomposizioni primarie). I primi associati a 0 sono tutti massimali, quindi a due a due non confrontabili, dunque tutti isolati. Il secondo teorema di unicità mostra allora che 0 ha, a meno di permutazioni, una sola decomposizione primaria minimale; in altri termini l'insieme $\mathcal{K} = \{K_i \mid i \in I\}$ è univocamente determinato in R . Infine, come già notato, ciascuno degli ideali H_i è l'intersezione $\bigcap_{j \neq i \in I} K_j$ tra tutti gli elementi di \mathcal{K} tranne uno di essi. Questo mostra che l'insieme $\{H_i \mid i \in I\}$ è descritto dall'unica decomposizione primaria minimale dell'ideale nullo in R , e quindi è univocamente determinato. \square

Esercizi.

5.A.1. Sia R un anello commutativo artiniiano e sia $P \triangleleft R$. Allora P è primo se e solo se P è massimale e R/P è unitario.

5.A.2. Sia R un arbitrario anello commutativo e sia $M \triangleleft R$. Allora, se M non è primo, $R^2 \subseteq M$ e $|R : M|$ è un numero primo.

5.A.3. Sia R un anello commutativo artiniiano. Allora l'insieme degli ideali massimali di R è finito. (Suggerimento: si tratta di verificare che è finito il numero degli ideali massimali non primi. Per l'esercizio precedente, questi hanno tutti indice finito. Si può ora duplicare la dimostrazione del punto (ii) del [Lemma 5.2](#).)

[Esercizi, Osservazioni, Esempi]

5.A.4. L'ipotesi che R sia unitario è essenziale per il [Teorema 5.7](#). Ad esempio, un anello che abbia un gruppo abeliano artiniiano infinito (come un gruppo di Prüfer) come gruppo additivo e prodotto costante nullo è artiniiano ma non noetheriano. Lo stesso discorso vale per l'implicazione inversa: in un anello con prodotto costante nullo non esistono ideali primi; se un tale anello R è infinito ma il suo gruppo additivo è finitamente generato (ad esempio, se è ciclico infinito), allora R è noetheriano e tutti gli ideali primi di R sono massimali, ma R non è artiniiano.

5.A.5. Sempre in relazione al [Teorema 5.7](#), va menzionato il fatto che l'ipotesi di commutatività è invece meno rilevante. Infatti questo teorema ha un analogo nella teoria degli anelli unitari non necessariamente commutativi, il teorema di Hopkins-Levitzki che caratterizza gli anelli unitari artiniiani come particolari anelli noetheriani (qui 'artiniiano' e 'noetheriano' è riferito a condizioni di catena sugli ideali destri).

5.A.6. L'anello \mathbb{Q}_2' è un anello commutativo unitario noetheriano con un solo ideale massimale e spettro finito, ma non è artiniiano. Il suo radicale di Jacobson è ovviamente il suo ideale massimale, e non coincide col nilradicale (in particolare, non è nilpotente), che è l'ideale nullo. Tutti gli anelli locali noetheriani che non siano campi verificano queste stesse proprietà.

5.A.7. La [Proposizione 5.8](#) riduce lo studio degli anelli commutativi unitari artiniiani al caso degli anelli locali. Semplice esempi di anelli commutativi unitari artiniiani locali sono i quozienti $K[x]/(x^n)$, dell'anello dei polinomi ad una indeterminata x su un campo K , dove n è un arbitrario intero positivo. (Perché questi anelli sono artiniiani e locali?). Questo esempio mostra che, nella situazione in cui R sia un anello commutativo unitario artiniiano locale con ideale M il minimo intero positivo n tale che $M^n = 0$ può assumere valori arbitrari.

Teorema 5.9 (Teorema dell'intersezione di Krull). *Siano R un anello commutativo unitario noetheriano, M un R -modulo finitamente generato, $H \triangleleft R$. Allora, se $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} MH^n$, si ha $DH = D$.*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare il teorema nel caso particolare in cui M sia un ideale di R . Sia $DH = \bigcap_{i \in I} Q_i$ una decomposizione primaria minimale di DH e, per ogni $i \in I$, sia $P_i = \sqrt{Q_i}$. Ovviamente $DH \subseteq D$. Ragionando per assurdo, supponiamo questa inclusione propria e sia $d \in D \setminus DH$. Allora esiste $i \in I$ tale che $d \notin Q_i$. Ora, $dH \subseteq DH \subseteq Q_i$ e quindi, poiché Q_i è P_i -primario, $H \subseteq P_i$. Per il [Lemma 5.6](#) esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $P_i^n \subseteq Q_i$, ma allora $d \in D \subseteq MH^n \subseteq H^n \subseteq P_i^n \subseteq Q_i$, una contraddizione. Questa contraddizione dimostra il teorema nel caso un cui $M \triangleleft R$.

Passiamo al caso generale. Sia $R_1 = M \rtimes R$ l'idealizzazione di M . Dunque, effettuate le consuete identificazioni, $M \triangleleft A$ e $M^2 = 0$. Ora, M è noetheriano come R -modulo (perché R è noetheriano e M è

finitamente generato) e quindi lo è come R_1 -modulo; poiché anche $R_1/M \simeq R$ è noetheriano ne segue che R_1 è noetheriano. Per ogni $a, b \in M$ e $r \in R$ abbiamo $a(b+r) = ar$.¹³ Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo $MH^n = MH_1^n$, dove $H_1 = M + H \triangleleft A$. Pertanto $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} MH_1^n$. Essendo $M, H_1 \triangleleft R_1$ ci siamo ridotti al caso particolare esaminato nella prima parte della dimostrazione, possiamo dunque concludere: $D = DH_1 = D(M + H) = DH$. \square

Un'applicazione del teorema dell'intersezione di Krull fornisce un'informazione utile sulla struttura degli anelli locali noetheriani.

Proposizione 5.10. *Sia R un anello locale noetheriano, con ideale massimale M . Allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^n = 0$ e R è isomorfo ad un sottoanello unitario di $\prod_{n \in \mathbb{N}} (R/M^n)$.*

Inoltre, R è artiniiano se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $M^n = 0$.

Dimostrazione. Sia $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^n$. Allora, per il [Teorema 5.9](#), $DM = M$. Ma $M = \text{Jac}(R)$ e D è finitamente generato perché R è noetheriano, quindi $D = 0$ per il Lemma di Nakayama. È così provata la prima affermazione nell'enunciato. Di conseguenza, l'applicazione $r \in R \mapsto (r + M^n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} (R/M^n)$ è un monomorfismo di anelli unitari. Infine, se R è artiniiano, $M^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, dal momento che la successione $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente (o, in alternativa, per il [Lemma 5.3](#)). Viceversa, se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $M^n = 0$, allora R è artiniiano per il [Lemma 5.5](#). A questo punto la dimostrazione è completa. \square

¹³si noti: il prodotto ar può essere, in modo indifferente, letto come risultato dell'operazione interna di A e dell'operazione esterna $M \times R \rightarrow M$. Questo assicura che non c'è ambiguità in scritte come MH^n , che nell'enunciato del teorema sono riferite all'operazione esterna ma che, d'ora in avanti, nella dimostrazione sono riferite all'operazione interna.