

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO B

Esercizio 1. Tracciare accuratamente il grafico della funzione

$$f(x) = -\arctan x + \arctan \frac{1}{x} + x$$

Indicare dominio di f , punti notevoli, limiti, eventuali asintoti, l'espressione della derivata prima e seconda (7 punti).

Esercizio 2. Calcolare la somma della serie (2 punti)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!}$$

Esercizio 3. Determinare il carattere della serie (3 punti)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n}{2} \sin \frac{2}{n}\right).$$

Esercizio 4. Scrivere, fino all'ordine 3, lo sviluppo di Taylor della funzione (4 punti):

$$f(x) = \sin^2 x \quad \text{nel punto } x_0 = 0$$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale definito (3 punti)

$$\int_1^2 x^2 \log x \, dx$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali indefiniti (2 + 3 punti)

$$\int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx \qquad \int \cos(\log x) \, dx$$

Esercizio 7. Calcolare l'integrale improprio (3 punti)

$$\int_2^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2+1)} \, dx$$

Esercizio 8. Dire se, al variare di $a \in \mathbb{R}$, risulta convergente, divergente o non esiste l'integrale improprio (4 punti)

$$\int_2^{\infty} \frac{\log^a\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1+x} \, dx$$

Esercizio 9. Calcolare il limite puntuale delle successioni di funzioni

$$f_n(x) = x^{2n} e^{-nx}$$

Nell'insieme $[0, +\infty]$ (2 punti). La convergenza è uniforme (3 punti)?

Esercizio 10. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ se a_n è dato da

$$\frac{\log n}{n} \quad (2 \text{ punti})$$