

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO B

Esercizio 1. Tracciare accuratamente il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 - 1 - \log(x^2 - 1)$$

Indicare dominio di f , punti notevoli, limiti, eventuali asintoti, l'espressione della derivata prima e seconda (7 punti).

Esercizio 2. Calcolare la somma della serie (3 punti)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^{n-2}}$$

Esercizio 3. Determinare il carattere delle serie (3 punti)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n}$$

Esercizio 4. Scrivere, fino all'ordine 4, lo sviluppo di Taylor della funzione (4 punti):

$$f(x) = \sin(\pi x) \log x \quad \text{nel punto } x_0 = 1$$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale definito (3 punti)

$$\int_1^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali indefiniti (4 + 3 punti)

$$\int \frac{x}{x^3 + 1} dx \qquad \int x \log x dx$$

Esercizio 7. Si calcoli l'integrale improprio (3 punti):

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dire se, al variare di $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, risulta convergente, divergente o non esiste l'integrale improprio (4 punti)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^a}} dx$$

Esercizio 8. Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{nx^2 + x + 1} - \sqrt{nx^2 - x - 1}$$

nell'insieme $[2, +\infty]$ (2 punti). La convergenza è uniforme in $[2, 3]$? E in $[2, \infty]$? (4 punti)?

Esercizio 9. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ se a_n è dato da

$$a_n = \left(\sin \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \quad (3 \text{ punti})$$