

PROVA SCRITTA ANALISI II - MODULO A

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 + 9|x - 1| - x^2.$$

Di tale funzione si determini l'insieme in cui è continua e l'insieme in cui è differenziabile, i massimi, i minimi e punti stazionari in tutto il piano. La funzione è limitata? (10 punti)

Esercizio 2. Della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2}$$

si cerchino massimi e minimi assoluti e relativi nell'insieme $x^2 + y^2 \leq 4$. (8 punti)

Esercizio 3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = 5 + xe^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(6 punti)

Esercizio 4. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - xy' = e^x$$

(6 punti)

Esercizio 5. Dopo aver verificato l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si calcoli esplicitamente la soluzione corrispondente a $\alpha = 1$. (8 punti)