PROGRAMMA FONDAMENTI 1
ANNO ACCADEMICO 2007–2008

VITTORIO COTI ZELATI

Topologia

Spazi Metrici. Definizione ed esempi. Palle e insiemi aperti. Proprietà degli aperti in uno spazio metrico. Funzioni continue tra spazi metrici. Metriche topologicamente equivalenti. Omeomorfismi e isometrie. Continuità delle applicazioni lineari tra R^n e R^m. Insiemi chiusi. Covergenza di successioni in uno spazio metrico. Successioni di Cauchy. Spazi metrici completi. Compattezza in spazi metrici. Teorema di caratterizzazione degli spazi metrici compatti.

Spazi topologici. Definizione ed esempi. Topologie meno fini e più fini. Basi di una topologia. Teorema di caratterizzazione delle basi. Intorni. Convergenza di successioni in uno spazio topologico. Primo e secondo assioma di numerabilità. Insiemi chiusi. Inetrno, esterno e frontiera di un insieme. Caratterizzazione di insiemi aperti e chiusi tramite interno, esterno e frontiera. Chiusura di un insieme. Punti di accumulazione. Insiemi densi e loro caratterizzazione. Spazi separabili. Separabilità e assiomi di numerabilità. Applicazioni continue tra spazi topologici. Omeomorfismi. Topologia immagine diretta e topologia delle controimmagini. Sottospazi topologici. Prodotto di spazi topologici. Topologia prodotto. Proiezioni canoniche e caratterizzazione della topologia prodotto. Applicazioni tra uno spazio topologico e uno spazio topologico prodotto: componenti e continuità.

Compattezza di spazi topologici. Definizioni equivalenti. Le applicazioni continue mandano compatti in compatti. Teorema di Tychonoff (solo enunciato). Proprietà di separazione: spazi topologici di Hausdorff. Spazi topologici di Hausdorff e compattezza.

Connessione. Definizione ed esempi. Definizioni equivalenti. Sottoinsiemi connessi di R. Le applicazioni continue mandano connessi in connessi. Un teorema di punto fisso per funzioni continue da $[a, b]$ in $[a, b]$. Prodotto di spazi connessi. Connessione per archi. Definizione ed esempi. Componenti connesse per archi.

Misura in $\mathbb{R}^n$

La misura esterna di Lebesgue dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. L'insieme di Cantor. Gli insiemi misurabili e la loro σ-algebra. Proprietà della misura di Lebesgue: additività numerabile, regolarità interna ed esterna, invarianza per rototraslazioni. Insiemi non misurabili.

Spazi astratti di misura e funzioni misurabili

Spazi misurabili e spazi con misura. Funzioni misurabili: misurabilità della somma, del prodotto, del $\sup_k f_k$, del $\liminf_k f_k$.

Integrazione astratta

Integrazione di funzioni semplici e di funzioni misurabili nonnegative. Convergenza monotona, lemma di Fatou. Integrazione delle funzioni a valori complessi, teorema della convergenza dominata. Caratterizzazione delle funzioni Riemann integrabili. Teorema di Egorov.

Integrazione in spazi topologici

Preliminari topologici, lemma di Uryshon, partizioni dell'unità. Teorema di Lusin. Teorema della Rappresentazione di Riesz. Regolarità delle misure.

Spazi L^p

Richiami sulle funzioni convesse, diseguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski. Definizione degli spazi $L^p(\mu)$ e loro completezza.

Spazi di Hilbert

Definizione, proiezione sui convessi e sui sottospazi lineari chiusi. Diseguaglianza di Bessel, sistemi ortonormali massimali e loro caratterizzazione. Cenni alle serie di Fourier.

Testi Consigliati

[1] N. Fusco, P. Marcellini, and C. Sbordone, *Analisi matematica due*, Liguori, Napoli.
[2] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Bollati Boringhieri, Torino, 1966.
[3] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker, New York, 1977.