

**PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI
MATEMATICA 2**

Esercizio 1. Consideriamo l'applicazione $\Lambda: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ definita da

$$\Lambda(f)(x) = \int_0^1 (x - s)f(s) ds$$

Si dimostri che Λ un operatore lineare ben definito e limitato. Se ne stimi la norma. L'operatore è iniettivo? È possibile caratterizzarne il nucleo e l'immagine $\Lambda(L^2([0, 1]))$?

Esercizio 2. Calcolare, utilizzando il metodo dei residui, il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2 + 1)^2}.$$

Esercizio 3. Siano f e g due funzioni in $L^1([0, 1])$, $\mu(E) = \int_E f dm$ e $\nu(E) = \int_E g dm$. Allora $\mu \ll m$, $\nu \ll m$. Enunciare condizioni su f e g tali che risulti

- $\mu \ll \nu$
- $\mu \perp \nu$