PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Esercizio 1. Si consideri in $L^2(0, 2\pi)$ il sottospazio lineare $E = \{\, \lambda \cos x \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}$. Sia $\ell \colon E \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da $\ell(\lambda \cos x) = \lambda$.

(1) Si calcoli la norma di ℓ.
(2) Si estenda ℓ ad un operatore lineare $L \colon L^2(0, 2\pi) \to \mathbb{R}$.
(3) Si calcoli la norma di L.

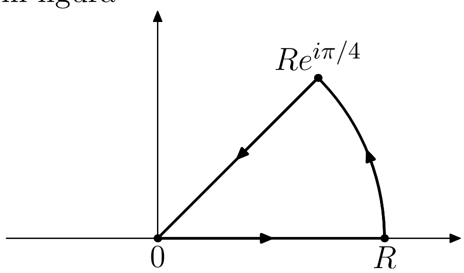
Esercizio 2. Mostrare che l'operatore definito da

$$(\mathsf{T}x)_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \qquad \text{per ogni } x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

è lineare, ben definito e limitato da $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ e da $\ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Denotato T_2 tale operatore quando agisce su $\ell^2(\mathbb{N})$ e T_∞ quando agisce su $\ell^\infty(\mathbb{N})$, si discuta la limitatezza, l'iniettività e la suriettività di tali operatori.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale improprio $\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$ utilizzando il metodo dei residui. Suggerimento: si integri la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ lungo il cammino in figura



Data: 13 ottobre 2008.